Le nombre d'or et Fibonacci

Pierre Arnoux et Anne Siegel

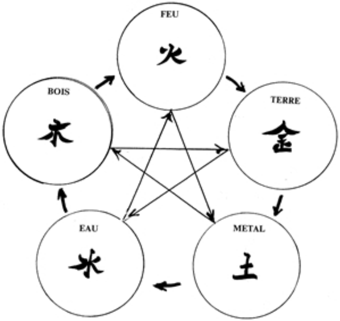
Août 2004, Bordeaux

Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

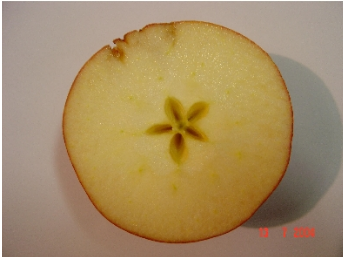


Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée



Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

Le pentagramme

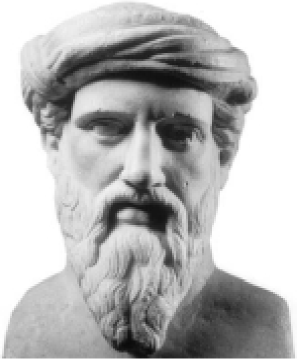
- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée

Le pentagramme

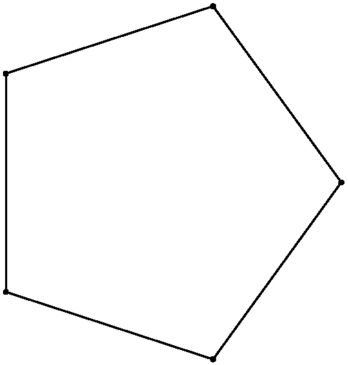
- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée



Les pythagoriciens !

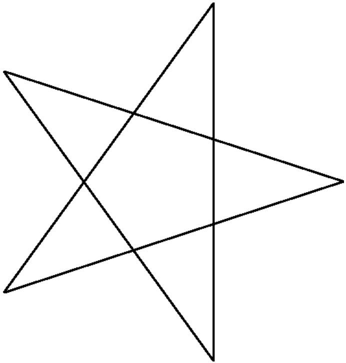
Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée



Le pentagramme

- magique
- se retrouve partout dans la nature
- et hors de la nature
- est le symbole d'une très ancienne secte
- sous sa forme usuelle
- ou sous sa forme étoilée



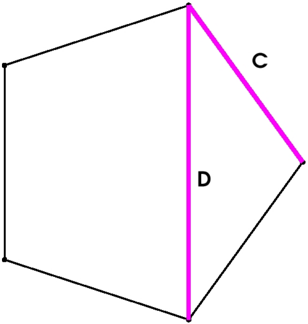
Un nombre naturel...

Pour les pythagoriciens, le rapport des mesures sur le pentagone est si naturel qu'il ne peut être que rationnel !

Trouver $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\phi = \frac{D}{C} = \frac{p}{q}$?

$C = p(D/q) \qquad D = q(D/q)$

Trouver un petit segment telle que le côté et la diagonale soient tous deux des multiples entiers de ce segment ?

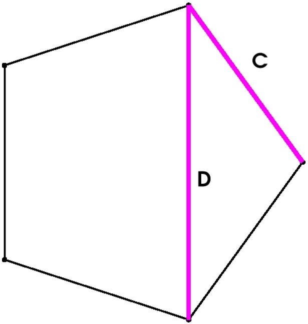


Un nombre naturel...

Pour les pythagoriciens, le rapport des mesures sur le pentagone est si naturel qu'il ne peut être que rationnel !

Trouver $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $\phi = \frac{D}{C} = \frac{p}{q}$?

$$C = p(D/q) \qquad D = q(D/q)$$



Trouver un petit segment telle que le côté et la diagonale soient tous deux des multiples entiers de ce segment ?

Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel

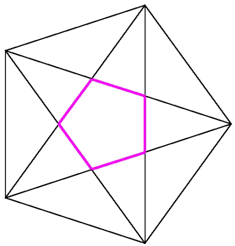
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



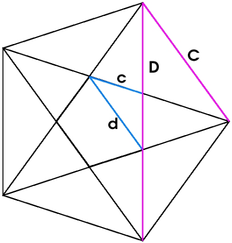
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



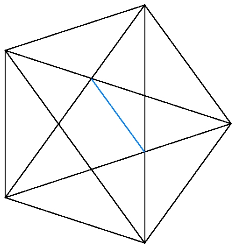
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



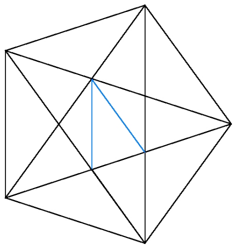
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



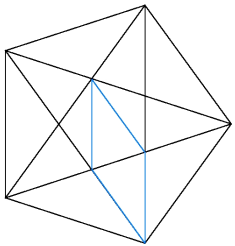
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



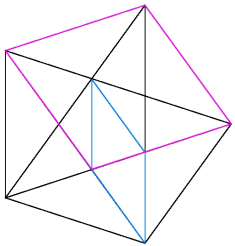
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



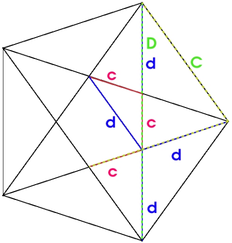
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



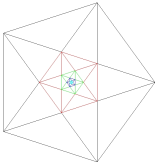
Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel



$$d = D - C \qquad c = 2C - D$$

Une mesure commune à C et D est commune à c et d et donc nulle

Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel

$$\phi = \frac{D}{C} = \frac{d}{c} = \frac{p}{q}$$
$$(c+d)p - (c+2d)q = 0$$
$$cp - dq = 0$$
$$dp - cq - dq = 0$$
$$\frac{d}{c} = \frac{q}{p-q} = \frac{p}{q}$$
$$q^2 = p(p-q)$$
$$p \text{ divise } q$$

Irrationalité

Théorème

Le rapport ϕ de la diagonale par le côté d'un pentagone est un nombre irrationnel appelé nombre d'or.

(et probablement le plus ancien connu)

- Le pentagone contient un plus petit pentagone
- On introduit les mesures c et d des petits côtés
- Symétries dans le pentagone
- $C = c + d \quad D = c + 2d$
- Non rationnel

Série géométrique

Prop

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

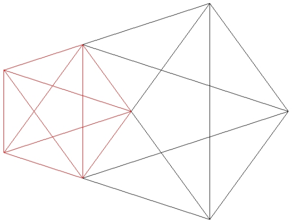
- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite

- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
  $= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

Série géométrique

Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite

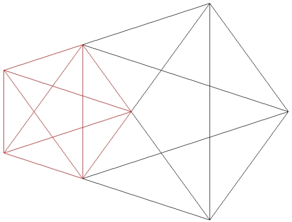


- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
  $= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

Série géométrique

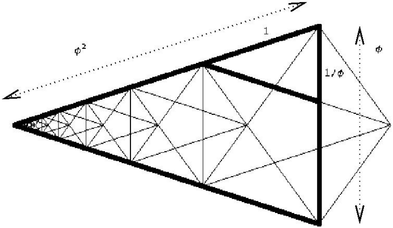
Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite



- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
  $= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

Série géométrique



Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

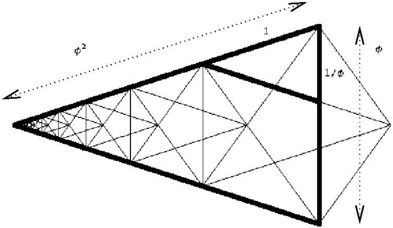
- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite

- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
$= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

Série géométrique

Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite

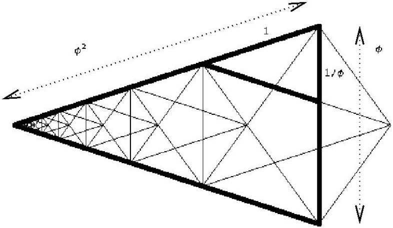


- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
$= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

Série géométrique

Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2$

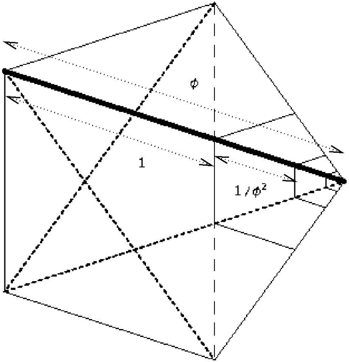
- Pentagone de côté C_0 et de diagonale D_0
- Nouveau pentagone de diagonale $D_1 = C_0$.
- On itère la construction
- Passage à la limite



- $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{C_0}{\phi}$
- $C_n = \frac{C_0}{\phi^n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{\phi^n} = D_{-1}$
  $= \phi C_{-1} = \phi D_0 = \phi^2 C_0$

(Autre) série géométrique

Prop
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^{2n+1}} = 1$

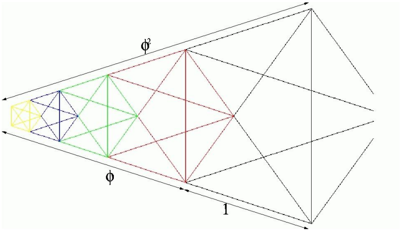


Equation algébrique

Théorème

Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est l'unique racine positive du polynome $X^2 - X - 1$.

- $\phi^2 = \phi + 1$
- Valeur exacte $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$
- Développement en racines
- Développement en fractions continues

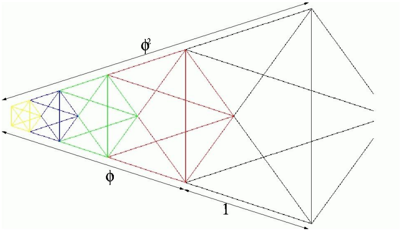


Equation algébrique

Théorème

Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est l'unique racine positive du polynome $X^2 - X - 1$.

- $\phi^2 = \phi + 1$
- Valeur exacte $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$
- Développement en racines
- Développement en fractions continues



Equation algébrique

Théorème

Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est l'unique racine positive du polynome $X^2 - X - 1$.

- $\phi^2 = \phi + 1$
- Valeur exacte $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$
- Développement en racines
- Développement en fractions continues

Prop

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}$

$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ contractante sur $\mathbb{R}^+$

$\lim u_n = \phi$

Equation algébrique

Théorème

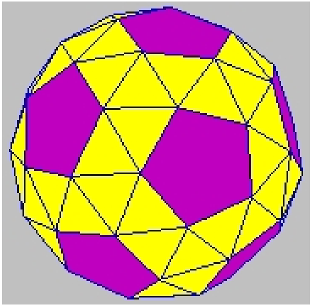
Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est l'unique racine positive du polynome $X^2 - X - 1$.

- $\phi^2 = \phi + 1$
- Valeur exacte $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$
- Développement en racines
- Développement en fractions continues

Prop
$\phi = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$

Diverses remarques

- Le pentagone apparaît dans diverses autres figures géométriques
- Les puissances de ϕ sont des combinaisons de 1 et ϕ.



Diverses remarques

- Le pentagone apparaît dans diverses autres figures géométriques
- Les puissances de ϕ sont des combinaisons de 1 et ϕ.

$$\phi^2 = 1 + \phi$$
$$\phi^3 = \phi^2 + \phi = 1 + 2\phi$$

Diverses remarques

- Le pentagone apparaît dans diverses autres figures géométriques
- Les puissances de ϕ sont des combinaisons de 1 et ϕ.

Exercice

Trouver les coefficients a_n et b_n tels que $\phi^n = a_n + b_n\phi$.

Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

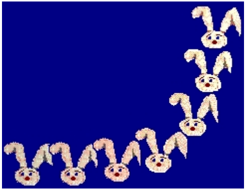
Leonardo de Pise

- fils de Guglielmo Bonacci: *filius Bonacci* ou Fibonacci
- né en 1270 ; meurt en 1340
- voyage en Algérie et autour de la méditerranée
- apprend les techniques de l'ouzbek Al-Khwarizmi
- publie son *livre de l'abaque*

Le contenu de ses livres correspondait à un DEA de math financières ; ces techniques sont maintenant enseignées en CM2 !

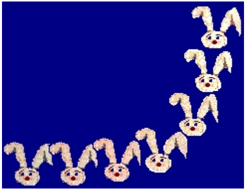
Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



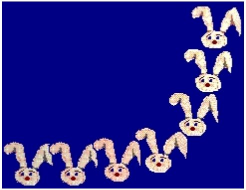
Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



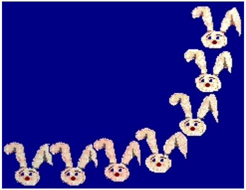
Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



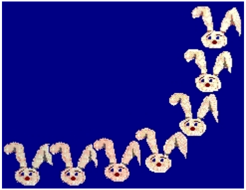
Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



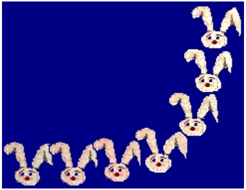
Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



Croissance démographique

- an 0: un couple de lapins nait
- an 1: le couple est déposé sur une île
- an 2: le couple engendre un couple
- an 3: le premier couple engendre encore un couple ; le second grandit
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple ; le couple de l'an 3 grandit
- les lapins sont immortels



Suite de Fibonacci

Définition

On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *et, si* $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

- F_n est le nombre de couples de lapins présent sur l'île dans l'année n après les naissances.
- L'année $n+2$, il y a
  - tous les lapins de l'année précédente (F_{n+1}) ;
  - les bébés engendrés par les adultes, qui sont vieux d'au moins deux ans (F_n) ;
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Suite de Fibonacci

Définition

On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 0$*,* $F_1 = 1$ *et, si* $n \geq 0$*,*

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

- F_n est le nombre de couples de lapins présent sur l'île dans l'année n après les naissances.
- L'année $n + 2$, il y a
  - tous les lapins de l'année précédente (F_{n+1}) ;
  - les bébés engendrés par les adultes, qui sont vieux d'au moins deux ans (F_n) ;
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Suite de Fibonacci

Définition

On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *et, si* $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

- F_n est le nombre de couples de lapins présent sur l'île dans l'année n après les naissances.
- L'année $n + 2$, il y a
  - tous les lapins de l'année précédente (F_{n+1}) ;
  - les bébés engendrés par les adultes, qui sont vieux d'au moins deux ans (F_n) ;
- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Fibonacci dans la nature

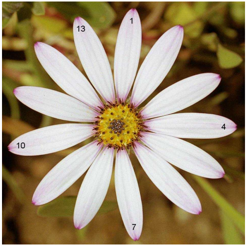
Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

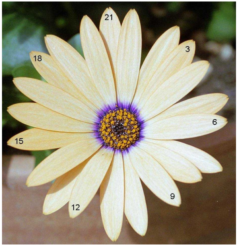
- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas



Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas



Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Fibonacci dans la nature

Les végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci

- fleurs (ou pommes de pin)
  - les marguerites non abimées ont toujours 21 pétales
  - les paquerettes en ont 8 ou 13
- 34 spirales dans un sens et 55 dans l'autre
- arbres et ananas

Premières propriétés

- Lien avec le nombre d'or
- Nombreuses formules
- Nombres premiers entre eux

- $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$
- récurrence
- $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$

Premières propriétés

- Lien avec le nombre d'or
- Nombreuses formules
- Nombres premiers entre eux

- $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$
- récurrence
- $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$

Premières propriétés

- Lien avec le nombre d'or
- Nombreuses formules
- Nombres premiers entre eux

- $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$
- récurrence
- $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$

Croissance

Les nombres de Fibonacci ont une croissance proportionnelle au nombre d'or

Prop

$lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

- $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$
- $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ préserve $[1, 2]$ et est contractante sur cet intervalle
- r_n converge vers un point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Les r_n sont les meilleures approximations rationnelles de ϕ

Croissance

Les nombres de Fibonacci ont une croissance proportionnelle au nombre d'or

Prop

$lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

- $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$
- $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ préserve $[1, 2]$ et est contractante sur cet intervalle
- r_n converge vers un point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Les r_n sont les meilleures approximations rationnelles de ϕ

Croissance

Les nombres de Fibonacci ont une croissance proportionnelle au nombre d'or

Prop

$lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

- $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$
- $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ préserve $[1, 2]$ et est contractante sur cet intervalle
- r_n converge vers un point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Les r_n sont les meilleures approximations rationnelles de ϕ

Croissance

Les nombres de Fibonacci ont une croissance proportionnelle au nombre d'or

Prop

$lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$

- $r_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}=1+\frac{1}{r_{n-1}}$
- $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ préserve $[1,2]$ et est contractante sur cet intervalle
- r_n converge vers un point fixe de $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$.

Les r_n sont les meilleures approximations rationnelles de ϕ

Croissance

Les nombres de Fibonacci ont une croissance proportionnelle au nombre d'or

Prop

$lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$

- $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$
- $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ préserve $[1, 2]$ et est contractante sur cet intervalle
- r_n converge vers un point fixe de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Les r_n sont les meilleures approximations rationnelles de ϕ

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ avec $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \ \ u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \;\; u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \ \ u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \;\; u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \;\; u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \;\; u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Calcul Explicite

Théorème

$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ *avec* $\overline{\phi} = -\frac{1}{\phi}$.

- Suites du type de Fibonacci : $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$
- Déterminée par ses deux premières valeurs
- La somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite
- Deux suites g_n et h_n non proportionnelles les engendrent toutes
  $(u_0 = Ag_0 + Bh_0, \;\; u_1 = Ag_1 + Bh_1 \implies u_n = Ag_n + Bh_n)$
- Pour que $g_n = r^n$, il faut $r^2 = 1 + r$
- $r = \phi$ ou $r = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$

Formalisation

- Prestidigitation ?
  - Que se passerait-il pour $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$
- Principe de superposition
  - La somme de deux solutions est encore une solution
- Calcul du terme suivant ?
  - Dépend des deux précédents
- Considérer deux termes à la fois !

Formalisation

- Prestidigitation ?
  - Que se passerait-il pour $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$
- Principe de superposition
  - La somme de deux solutions est encore une solution
- Calcul du terme suivant ?
  - Dépend des deux précédents
- Considérer deux termes à la fois !

Formalisation

- Prestidigitation ?
  - Que se passerait-il pour $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$
- Principe de superposition
  - La somme de deux solutions est encore une solution
- Calcul du terme suivant ?
  - Dépend des deux précédents
- Considérer deux termes à la fois !

Formalisation

- Prestidigitation ?
  - Que se passerait-il pour $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$
- Principe de superposition
  - La somme de deux solutions est encore une solution
- Calcul du terme suivant ?
  - Dépend des deux précédents
- Considérer deux termes à la fois !

Preuve moderne

- Application linéaire sur des vecteurs
- "Suite" géométrique: calculer les puissances d'une matrice
- Diagonaliser
- Expression générale
- Suite de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Preuve moderne

- Application linéaire sur des vecteurs
- "Suite" géométrique: calculer les puissances d'une matrice
- Diagonaliser
- Expression générale
- Suite de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Preuve moderne

- Application linéaire sur des vecteurs
- "Suite" géométrique: calculer les puissances d'une matrice
- Diagonaliser
- Expression générale
- Suite de Fibonacci

- polynome caractéristique : $X^2 - X - 1$
- valeurs propres : ϕ et $\overline{\phi}$
- vecteurs propres : $\begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \overline{\phi} \\ 1 \end{pmatrix}$
- matrice diagonalisable

Preuve moderne

- Application linéaire sur des vecteurs
- "Suite" géométrique: calculer les puissances d'une matrice
- Diagonaliser
- Expression générale
- Suite de Fibonacci

$$P = \begin{pmatrix} \phi & \overline{\phi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \overline{\phi} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Prop

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \overline{\phi}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Preuve moderne

- Application linéaire sur des vecteurs
- "Suite" géométrique: calculer les puissances d'une matrice
- Diagonaliser
- Expression générale
- Suite de Fibonacci

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Comportement de la suite de Fibonacci

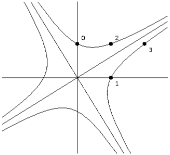
- Soit $P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n P_0$.
- Dans la nouvelle base, les coordonnées de P_n sont $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^n X_0 \\ \bar{\phi}^n Y_0 \end{pmatrix}$
- Hyperboles : $X_n Y_n = (-1)^n X_0 Y_0$
- Les points P_n alternent sur deux hyperboles et se rapprochent très rapidement de la droite dilatante.

Comportement de la suite de Fibonacci

- Soit $P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n P_0$.
- Dans la nouvelle base, les coordonnées de P_n sont $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^n X_0 \\ \bar{\phi}^n Y_0 \end{pmatrix}$
- Hyperboles : $X_n Y_n = (-1)^n X_0 Y_0$
- Les points P_n alternent sur deux hyperboles et se rapprochent très rapidement de la droite dilatante.

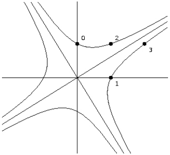
Comportement de la suite de Fibonacci

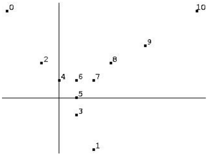
- Soit $P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n P_0$.
- Dans la nouvelle base, les coordonnées de P_n sont $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^n X_0 \\ \bar{\phi}^n Y_0 \end{pmatrix}$
- Hyperboles : $X_n Y_n = (-1)^n X_0 Y_0$
- Les points P_n alternent sur deux hyperboles et se rapprochent très rapidement de la droite dilatante.

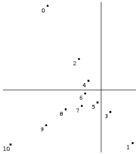


Comportement de la suite de Fibonacci

- Soit $P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n P_0$.
- Dans la nouvelle base, les coordonnées de P_n sont $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^n X_0 \\ \bar{\phi}^n Y_0 \end{pmatrix}$
- Hyperboles : $X_n Y_n = (-1)^n X_0 Y_0$
- Les points P_n alternent sur deux hyperboles et se rapprochent très rapidement de la droite dilatante.







Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$

$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
-

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
-

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2
  1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,
  1024,2048,4096,8192,16384

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
- $2^{13} = 8192 \leq 8529 < 16384 = 2^{14}$

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
- $2^8 = 256 \leq 8529 - 2^{13} = 337 < 512$

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
- $2^6 = 64 \leq 337 - 2^8 = 81 < 128$

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8 * 1 + 2 * 10 + 5 * 10^2 + 8 * 10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2
  1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384
- $81 - 64 = 17 = 16 + 1$

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2

$$8529 = 8*1 + 2*10 + 5*10^2 + 8*10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

Preuve

- Suite des puissances de 2
  1,2,4,8,16,32,64,128,256,512, 1024,2048,4096,8192,16384

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2
- Décomposer un nombre en base de Fibonacci
- Eviter les simplifications

$$8529 = 8*1+2*10+5*10^2+8*10^3$$
$$8529 = 2^0 + 2^4 + 2^6 + 2^8 + 2^{13}$$

$$8529 = a_0 F_0 + a_1 F_1 + \cdots + a_n F_n\,?$$

$(a_k, a_{k+1}) \neq (1,1)$

Sinon $a_k F_k + a_{k+1} F_{k+1}$ peut être remplacé par F_{k+2}

Développer des nombres entiers

- Nous écrivons les entiers en base 10
- Les informaticiens écrivent les nombres en base 2
- Décomposer un nombre en base de Fibonacci
- Eviter les simplifications

$$8529 = 8*1+2*10+5*10^2+8*10^3$$
$$8529 = 2^0+2^4+2^6+2^8+2^{13}$$

$$8529 = a_0F_0 + a_1F_1 + \cdots + a_nF_n\,?$$

$(a_k, a_{k+1}) \neq (1,1)$
Sinon $a_kF_k + a_{k+1}F_{k+1}$ peut être remplacé par F_{k+2}

Développement de Zeckendorff

Théorème

Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de zéros et de uns qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

- $k \in \mathbb{N}$, N maximal tel que $F_N \leq k$
- $k - F_N < F_{N-1}$
- Existence du développement pour tout entier $k < F_N$
- Unicité

N existe car F_n est une suite d'entiers strictement croissante pour $n > 1$, et tend donc vers l'infini

Développement de Zeckendorff

Théorème

Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de zéros et de uns qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

- $k \in \mathbb{N}$, N maximal tel que $F_N \leq k$
- $k - F_N < F_{N-1}$
- Existence du développement pour tout entier $k < F_N$
- Unicité

Sinon, $k \geq F_N + F_{N-1} = F_{N+1}$

Développement de Zeckendorff

Théorème

Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de zéros et de uns qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

- $k \in \mathbb{N}$, N maximal tel que $F_N \leq k$
- $k - F_N < F_{N-1}$
- Existence du développement pour tout entier $k < F_N$
- Unicité

Vrai pour $N = 3$ car $F_2 = 1$ et $F_3 = 2$

Si vrai pour $k < F_N$

Soit $F_N \leq k < F_{N+1}$

$$k - F_N < F_{N+1} - F_N = F_{N-1}$$
$$k - F_N = \sum_{n=2}^{N-2} \epsilon_n F_n$$
$$k = \sum_{n=2}^{N-2} \epsilon_n F_n + F_N$$

Développement sans deux 1 consécutifs

Développement de Zeckendorff

Théorème

Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de zéros et de uns qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

- $k \in \mathbb{N}$, N maximal tel que $F_N \leq k$
- $k - F_N < F_{N-1}$
- Existence du développement pour tout entier $k < F_N$
- Unicité

$\sum_{n=2}^{N-1} \epsilon_n F_n < F_N$ si deux 1 ne sont jamais consécutifs

Vrai pour $n = 3$: $F_2 < F_3$

Si vrai pour N

Soit $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$ avec $\epsilon_n \epsilon_{n+1} = 0, \forall n < N$

Si $\epsilon_N = 0$ alors $k < F_N < F_{N+1}$

Si $\epsilon_N = 1$ alors $\epsilon_{N-1} = 0$

$$k = F_N + \sum_{n=2}^{N-2} \epsilon_n F_n < F_N + F_{N-1} = F_{N+1}$$

Développement de Zeckendorff

Théorème

Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite finie de zéros et de uns qui ne contient pas deux 1 consécutifs.

- $k \in \mathbb{N}$, N maximal tel que $F_N \leq k$
- $k - F_N < F_{N-1}$
- Existence du développement pour tout entier $k < F_N$
- Unicité

Si $k = \sum_{n=2}^{N_1} \epsilon_n F_n = \sum_{n=2}^{N_2} \alpha_n F_n$

Soit N maximal tel que les deux développements sont distincts

$F_N + \sum_{n=2}^{N-1} \epsilon_n F_n = \sum_{n=2}^{N-1} \alpha_n F_n$

Alors $F_N \leq \sum_{n=2}^{N-1} \alpha_n F_n < F_N$

Impossible

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, on notera aussi $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \ldots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$6765 = F_{20} < 8529 < F_{21} = 10946$$

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$1597 = F_{17} < 1764 = 8529 - 6765 < F_{18}$$

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$*, on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,
144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$144 = F_{12} < 167 = 1764 - 1597 < F_{13}$$

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \ldots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,
144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$21 = F_8 < 23 = 167 - 144 < F_9$$

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$23 - 21 = 2 = F_2$$

Développement

Définition

Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, *on notera aussi* $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \dots \epsilon_2)_F$

Le développement de 8529 est

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1)_F$$

Suite de Fibonacci : 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, 144,233,377,610,987, 1597,2584,4181,6765,10946

$$8529 = F_2 + F_8 + F_{12} + F_{17} + F_{20}$$

Conduire aux Etats-Unis

- 1 miles = 1,608 km $\approx \phi$ km
- pour multiplier approximativement un nombre par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développement
- convertisseur de limitations
- Ca marche...
- Concrètement

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$$

Conduire aux Etats-Unis

- 1 miles = 1,608 km $\approx \phi$ km
- pour multiplier approximativement un nombre par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développement
- convertisseur de limitations
- Ca marche...
- Concrètement

Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$
Alors
$k\phi = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n \phi F_n$
$\approx \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_{n+1}$

Conduire aux Etats-Unis

- 1 miles = 1,608 km $\approx \phi$ km
- pour multiplier approximativement un nombre par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développement
- convertisseur de limitations
- Ca marche...
- Concrètement

Limitation à K miles/h

$K = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$

Décaler d'un cran

$L = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_{n+1}$

La limitation est de L km/h

Conduire aux Etats-Unis

- 1 miles $= 1{,}608$ km $\approx \phi$ km
- pour multiplier approximativement un nombre par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développement
- convertisseur de limitations
- Ca marche...
- Concrètement

Entre 0 et 100, on se trompe au plus d'une unité !

Conduire aux Etats-Unis

- 1 miles $= 1{,}608$ km $\approx \phi$ km
- pour multiplier approximativement un nombre par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développement
- convertisseur de limitations
- Ca marche...
- Concrètement

les nombres de Fibonacci
$(34, 55, 89, 144)$
sont proches des limitations de vitesses standard

Il suffit de connaître les nombres de Fibonacci

55 miles/h $\mapsto$ 89 km/h

Littérature

- Dans la bibliothèque oulipienne (OUvroir de la LIttérature POtentielle), le volume 1 est lié a Fibonacci
- Chaque poème est eclairci par les poèmes dont les numéros figurent dans son développement de Zeckendorff
- Le poème 1 s'intitule *l'explication préalable, ou la raison des rimes*, par Paul Braffort...
- on peut y chercher toutes les références à Fibonacci !

Ode à Fibonacci

C'est mon devoir, c'est mon défi,
tel Jarry, Cyrano bouffi,

de chercher des poux à Rimbaud,

et sur les zizis des bobos.

Qu'il neigeât ou bien qu'il fît beau
A Lhassa Emma Sophie Bo-

vary veuve d'un lent cornac
se donnait au dieu de l'arnaque.

Leibiz, disant "vers..." Quel bon ac-
teur pour ce "vers..." superbe. Oh "nach"!

Il vise, Emma, l'apoplexie
des grands buveurs de galaxie

Au club des rois du "spinach" (si
Bach n'y vint jamais, Banach si!)

Leibniz- son graphe ibo n'a qu'six
mus, trois nus, un phi bon à xi-

hante sans profit Bonn: "ach! Si
j'étais le grand Fibonacci!!.. .

Annexe

- Construire un rectangle d'or.
- Construire un pentagone de côté 1.
- Valeur de $\cos(2\pi/5)$.
- Géométrie dans l'espace: dodécaèdre, icosaèdre et ballon de foot.
- Comment approximer le rectangle d'or.
- Approximation des suites de type de Fibonacci.
- Problème de découpage.