Chapitre 1: introduction et exemples

Philippe Chartier

5 septembre 2012

1 Le problème à deux corps

Le problème à deux corps et sa généralisation à N corps, apparaît dans de nombreuses applications, notamment en mécanique céleste, avec la simulation du mouvement de 2, 3 (ou plus), planètes, ou en dynamique moléculaire, où l'on est amené à simuler des réseaux de N particules (atomes, molécules...) soumises à des forces d'attraction-répulsion du type Lennard-Jones (potentiel en $-\frac{1}{r^6}+\frac{1}{r^{12}}$). Dans ce dernier cas, N est généralement très grand, typiquement de l'ordre de 10^6.

1.1 Historique

- Tycho Brahé (1540-1603) conduit une série d'observations astronomiques et établit empiriquement que la trajectoire de la terre est une ellipse.
- Johannes Kepler (1571-1630) analyse les relevés de T. Brahé et établit les très fameuses lois de Kepler, à savoir :
  1. Les planètes du système solaire décrivent un mouvement plan autour du soleil et l'orbite d'une planète est une ellipse dont le soleil est le centre (stricto-sensu, il s'agit du centre de gravité du système).
  2. Loi des aires : si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, l'aire balayée par le segment $[SM]$ entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale à la durée qui sépare les positions E et F.
  3. Loi des périodes : si a est le demi-grand axe de l'ellipse, et T la période de révolution, alors $a^3/T^2 = \text{Constante}$
- Isaac Newton (1642-1727) établit les lois fondamentales de la dynamique et le principe de gravitation

1.2 Résolution des équations du problème à deux corps

Soient x_1 et x_2 les centres de gravité de deux corps de masses respectives m_1 et m_2. La loi de Newton s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} m_1 \ddot{x}_1 & = & \kappa m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3} \\ m_2 \ddot{x}_2 & = & \kappa m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} \end{array} \right.$$

où $r = \|x_1 - x_2\|_2$. Le corps 1 exerce sur le corps 2 une force $F_{1\to 2}$ portée par le vecteur $u = \frac{x_1 - x_2}{r}$, de direction la direction de u, et de norme $\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$. Le corps 2 exerce sur le corps 1 une force $F_{2\to 1}$ portée par le vecteur $-u$, de direction la direction de $-u$, et de norme $\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$. On a ainsi la figure suivante :

Soit maintenant x, le centre de gravité de (x_1, m_1) et (x_2, m_2) : $(m_1 + m_2)x = m_1 x_1 + m_2 x_2$. En notant $m = m_1 + m_2$, il vient alors :

$$m\ddot{x} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3}(x_2 - x_1 + x_1 - x_2) = 0,$$

c'est-à-dire que $x(t) = ta + b$, décrit un mouvement rectiligne de direction $a \in \mathbb{R}^3$. Pour compléter la description du mouvement, on considère donc $X = x_1 - x_2$. Il vient aisément :

$$m\ddot{X}(t) \;\; = \;\; -\kappa \, \frac{m^2}{r^3} \, X(t),$$

où $r(t) = \|X(t)\|_2$. Cette composante décrit un mouvement à force centrale, que nous allons maintenant analyser.

Remarque 1.1 *Si $m_2 >> m_1$, alors $m \approx m_2$ et $x \approx x_2$. Après changement de repère (à mouvement rectiligne), on a $x_2 \approx 0$ et $x_1 \approx X$. C'est la situation typiquement du système terre-soleil.*

Lemme 1.2 *Le mouvement de X, régi par l'équation*

$$m\ddot{X}(t) = -\kappa \, \frac{m^2}{r^3(t)} \, X(t),$$

où $r(t) = \|X(t)\|_2$, est un mouvement plan. Il s'effectue dans le plan perpendiculaire à $n_0 = \dot{X}(0) \wedge X(0)$ passant[1] par $X(0)$.

1. On rappelle que le produit vectoriel est défini par $u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$. Il est bilinéaire et antisymétrique.

Preuve. En dérivant $\dot{X}(t) \wedge X(t)$ par rapport à t, il vient

$$\frac{d}{dt}\dot{X}(t) \wedge X(t) = \ddot{X}(t) \wedge X(t) + \dot{X}(t) \wedge \dot{X}(t)$$

Le second terme est nul car $a \wedge b = 0$ dès lors que a et b sont colinéaires. Le premier donne

$$\ddot{X}(t) \wedge X(t) = -\kappa \, \frac{m}{r^3} \, X(t) \wedge X(t)$$

et est donc nul pour la même raison. Il résulte que

$$\dot{X}(t) \wedge X(t) = \dot{X}(0) \wedge X(0) := n_0$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}\langle X(t) - X(0), n_0 \rangle = \langle \dot{X}(t), n_0 \rangle = \langle \dot{X}(t), \dot{X}(t) \wedge X(t) \rangle = \det(\dot{X}(t), \dot{X}(t), X(t)) = 0$$

par définition du produit mixte et nullité de tout déterminant dont deux colonnes sont colinéaires. Donc $X(t) - X(0)$ est pour tout t perpendiculaire à n_0, ce qui implique que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à n_0 passant par $X(0)$. ■

Dans la suite, on suppose donc que $X(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui satisfait l'équation

$$m\ddot{X}(t) = -\kappa \, \frac{m^2}{r^3} \, X(t),$$

où $r(t) = \|X(t)\|_2$. Nous allons désormais montrer que le mouvement de X possède les deux invariants suivants :

1. l'énergie totale du système : $E(t) = \frac{1}{2}m\|\dot{X}(t)\|_2^2 - \kappa \frac{m^2}{\|X(t)\|}$, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.
2. le moment angulaire du système : $G(t) = \det(X(t), m\dot{X}(t))$

Remarque 1.3 *On peut également travailler avec l'énergie massique $E_m(t) = \frac{1}{2}\|\dot{X}(t)\|_2^2 - \kappa \frac{m}{\|X(t)\|} = E(t)/m$. La constante κ est la constante gravitationelle. Dans le système S.I., elle vaut $\kappa = 6,6742867 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}.*

Lemme 1.4 *Soit $X(t) \in \mathbb{R}^2$ le vecteur coordonnées du centre de gravité du système, satisfaisant*

$$m\ddot{X}(t) = -\kappa \, \frac{m^2}{r^3} \, X(t),$$

où $r(t) = \|X(t)\|_2$. Alors, il existe des constante E_0 et L_0 de $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0, \\ G(t) &= L_0. \end{aligned}$$

Preuve. En dérivant $E(t)$ par rapport à t, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= m\langle \ddot{X}(t), \dot{X}(t)\rangle - \kappa\, m^2 \frac{-d\|X(t)\|_2}{dt}\frac{1}{\|X(t)\|_2^2} \\
&= m\langle \ddot{X}(t), \dot{X}(t)\rangle + \frac{\kappa\, m^2}{r^2}\frac{d\sqrt{\langle X(t), X(t)\rangle}}{dt} \\
&= m\langle \ddot{X}(t), \dot{X}(t)\rangle + \frac{\kappa\, m^2}{2r^3}\frac{d\langle X(t), X(t)\rangle}{dt} \\
&= m\langle \ddot{X}(t), \dot{X}(t)\rangle + \frac{\kappa\, m^2}{2r^3}2\langle \dot{X}(t), X(t)\rangle \\
&= \langle m\ddot{X}(t) + \frac{\kappa\, m^2}{r^3}X(t), \dot{X}(t)\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc $E(t) = E(0) := E_0$. De même, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= \det(X(t), m\ddot{X}(t)) + \det(\dot{X}(t), m\dot{X}(t)) \\
&= \det(X(t), -\frac{\kappa\, m^2}{r^3}X(t)) = 0
\end{aligned}$$

donc $G(t) = G(0) := L_0$. ■

L'idée est alors d'exploiter l'invariance de ces deux quantités en passant en coordonnées polaires :

$$X(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Le calcul donne, d'une part

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}m\|\dot{X}(t)\|_2^2 - \kappa\, m^2\frac{1}{\|X(t)\|_2} \\
&= \frac{1}{2}m\left((\dot{r}(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\dot{\theta}(t))^2 + (\dot{r}(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t))^2\right) \\
&\quad -\kappa\, m^2\frac{1}{r(t)} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + r^2(t)\dot{\theta}^2(t)\right) - \kappa\, m^2\frac{1}{r(t)}
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
G(t) &= m\det(X(t), \dot{X}(t)) \\
&= m\begin{vmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) & \dot{r}(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) \\ r(t)\sin(\theta(t)) & \dot{r}(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\cos(\theta(t))\dot{\theta}(t) \end{vmatrix} \\
&= mr^2(t)\dot{\theta}(t)
\end{aligned}$$

autrement dit, $\dot{\theta}(t) = \frac{L_0}{mr^2(t)}$. En remplaçant $\dot{\theta}(t)$ par $\frac{L_0}{mr^2(t)}$ dans l'expression de $E(t)$, il vient alors

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2(t) + r^2(t)\left(\frac{L_0}{mr^2(t)}\right)^2\right) - \kappa\frac{m^2}{r} = E_0$$

soit

$$\dot{r}^2(t) + \frac{L_0^2}{m^2r^2(t)} - \kappa\frac{2m}{r} = \frac{2E_0}{m}$$

On observe alors que $\dot{\theta}(t)$ conserve un signe constant, celui de L_0, que l'on suppose non nul (si L_0 est nul, alors $\dot{X}(t)$ et $X(t)$ sont colinéaires pour tout t, et donc le mouvement de X est rectiligne). On peut alors faire le changement de changement de variable $t = t(\theta)$ et exprimer l'équation en fonction de θ. Il vient :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L_0}{mr^2} = -\frac{L_0}{m}\frac{d(1/r)}{d\theta}$$

de sorte qu'en posant $z = 1/r$, on obtient finalement l'équation :

$$\left(\frac{dz}{d\theta}(\theta)\right)^2 + z^2(\theta) - \frac{2\kappa m^3}{L_0^2}z(\theta) = \frac{2E_0m}{L_0^2}$$

Un dernier calcul avec $\alpha = \frac{\kappa m^3}{L_0^2}$, $\beta = \frac{2E_0m}{L_0^2}$ et $u = z - \alpha$ montre que

$$\left(\frac{du}{d\theta}(\theta)\right)^2 + u^2(\theta) = \alpha^2 + \beta$$

et en dérivant par rapport à θ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta) + u(\theta) = 0$$

dont la solution générale peut s'écrire : $u(\theta) = u_{\theta_0}\cos(\theta - \theta_0)$, avec la condition initiale $u_{\theta_0} = \pm\sqrt{\beta + \alpha^2}$. Ainsi, r s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 \pm e\cos(\theta - \theta_0)}$$

avec $p = 1/\alpha = \frac{L_0^2}{\kappa m^3}$ et $e = \sqrt{1 + \frac{2E_0L_0^2}{m^5\kappa^2}}$. Suivant la valeur de e, la trajectoire de $X(t)$ est donc une parabole, une hyperbole, ou une ellipse d'excentricité e (on peut vérifier en effet que $1 + \frac{2E_0L_0^2}{m^5\kappa^2} > 0$).

2 Dynamique des polulations

2.1 Cas d'une espèce

(*i*) Loi de Malthus

Si $N(t)$ désigne le nombre d'individus d'une population quelconque, on peut modéliser l'évolution de N par une équation différentielle du type :

$$\dot{N}(t) \quad = \quad rN(t)$$

où r représente le taux intrinsèque d'accroissement naturel. Il s'ensuit que :

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

(*ii*) Modèle de Verhulst

Verhulst a proposé ce modèle en réponse au modèle de Malthus qui conduit à une croissance exponentielle de la population. Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Il pose en outre que, lorsque les populations sont de petites tailles, elles ont tendance à croître.

Si l'on désigne, comme précédemment par N le nombre d'individu, $m(N)$ le taux de mortalité et $n(N)$ le taux de natalité, N satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{N}(t) = N(t)\Big(n(N(t)) - m(N(t))\Big).$$

Si maintenant, comme l'a supposé Verhulst, $m(N)$ et $n(N)$ sont des fonctions affines respectivement croissante et décroissante alors $n(N) - m(N)$ est une fonction affine décroissante. Enfin, si pour $N \to 0$, $\dot{N}(t)$ est positive, l'équation peut s'écrire

$$\dot{N}(t) = N(t)\Big(a - bN(t)\Big).$$

En posant $c = a/b$, l'équation devient

$$\dot{N}(t) = aN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{c}\Big).$$

Il est clair que $N(t) \equiv c$ est solution, que si $N < c$ alors N croît et que si $N > c$, alors N décroît. c est appelé *capacité d'accueil*.

Les solutions strictement positives définies pour $t \in [0; +\infty[$ du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{N}(t) & = & aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{c})\right) \\ N(0) & = & N_0 \end{array} \right.$$

sont alors de la forme

$$N(t) = \frac{c}{1 + \left(\dfrac{c}{N_0} - 1\right) e^{-at}}$$

On observe que la population tend vers la capacité d'accueil c.

2.2 Cas de deux espèces : équation de Lotka-Volterra

Les équations de Lotka-Volterra s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t)(\alpha - \beta N_2(t)) \\ \dot{N}_2(t) = -N_2(t)(\delta - \gamma N_1(t)) \end{cases}$$

où $N_1(t)$ est l'effectif des proies et $N_2(t)$ l'effectif des prédateurs. Les paramètres suivants caractérisent les interactions entre les deux espèces :

- α, taux de reproduction des proies en l'absence de prédateurs ;
- β, taux de mortalité des proies due aux prédateurs ;
- δ, taux de mortalité des prédateurs en l'absence de proies ;
- γ, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies mangées.

(*i*) Equilibres du système

Un état d'équilibre de la population est observé quand les dérivées sont simultanément nulles, ce qui se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} N_1(t)(\alpha - \beta N_2(t)) & = & 0 \\ -N_2(t)(\delta - \gamma N_1(t)) & = & 0 \end{cases}$$

qui a pour solutions

$$\{N_2(t) = 0, N_1(t) = 0\} \quad \text{et} \quad \left\{N_2(t) = \frac{\alpha}{\beta}, N_1(t) = \frac{\delta}{\gamma}\right\}$$

La première solution correspond à une extinction définitive des deux espèces, la seconde à des valeurs dépendant des quatre paramètres α, β, δ et γ, qui restent stables indéfiniment.

La stabilité des points fixes peut être déterminée par linéarisation du système (voir Chapitre 3). La matrice jacobienne du système est

$$J(N_1(t), N_2(t)) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta N_2(t) & -\beta N_1(t) \\ \gamma N_2(t) & \gamma N_1(t) - \delta \end{bmatrix}$$

Au premier point fixe (0,0), cette matrice prend la valeur :

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix},$$

qui a pour valeurs propres $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = -\delta$. Ces valeurs propres sont de signes opposés, donc ce point fixe est un point selle, instable (voir Chapitre 3). En particulier, suivant ce modèle, l'extinction simultanée des deux espèces n'est pas possible.

En évaluant la matrice jacobienne au second point fixe, la valeur suivante est obtenue :

$$J\left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\delta}{\gamma} \\ \frac{\alpha\gamma}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

et elle a pour valeurs propres $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\delta}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\delta}$.

Ce point fixe est donc un centre (voir Chapitre 3), ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

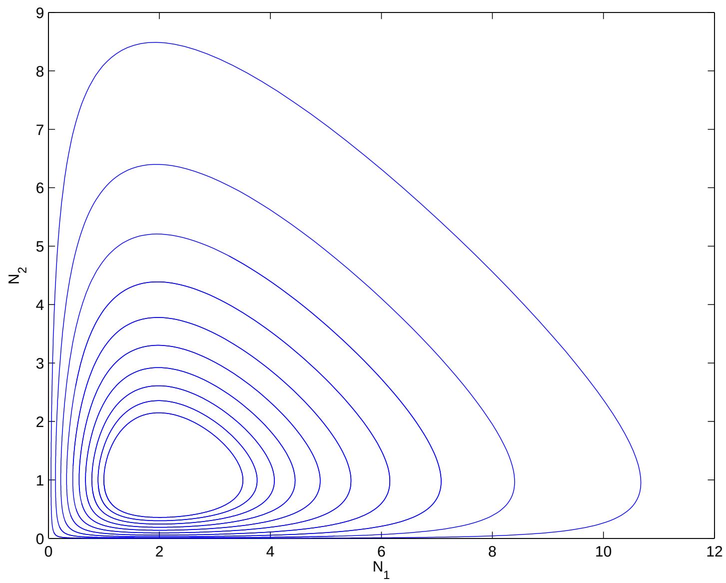

FIGURE 1 – Solutions de l'équation de Lotka-Volterra pour différentes valeurs de $I(N_1(0), N_2(0))$

(*ii*) Existence d'un invariant

En multipliant la première équation par $N_2(t)(\delta - \gamma N_1(t))$ et la seconde par $N_1(t)(\alpha - \beta N_2(t))$, il vient

$$\dot{N}_1(t)N_2(t)(\delta - \gamma N_1(t)) + \dot{N}_2(t)N_1(t)(\alpha - \beta N_2(t)) = 0$$

soit

$$\frac{\dot{N}_1(t)(\delta - \gamma N_1(t))}{N_1(t)} + \frac{\dot{N}_2(t)(\alpha - \beta N_2(t))}{N_2(t)} = 0$$

c'est-à-dire encore

$$\delta\frac{\dot{N}_1(t)}{N_1(t)} - \gamma\dot{N}_1(t) + \alpha\frac{\dot{N}_2(t)}{N_2(t)} - \beta\dot{N}_2(t) = 0$$

De sorte que l'on obtient par intégration

$$I(N_1(t), N_2(t)) = \log(N_1(t)^\delta) - \gamma N_1(t) + \log(N_2(t)^\alpha) - \beta N_2(t) = \text{Const.}$$

C'est un invariant du système, qui assure que les courbes solutions sont fermées (voir Fig. 1).

3 Exemples de résolution d'équations simples

3.1 Équation différentielle d'ordre un à variables séparées

Il s'agit d'équations de la forme :

$$y' = f(x)g(y).$$

Solutions régulières : On recherche les solutions dites régulières, i.e. telles que $g(y)$ ne soit jamais nul. La présentation classique de Leibniz, bien que difficile à justifier mathématiquement, permet d'obtenir une bonne partie des solutions. Elle consiste "séparer les différentielles" en écrivant

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

sous la forme

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx.$$

En intégrant séparément chaque membre :

$$H(y) = F(x) + K$$

où H représente une primitive de $1/g$ et F représente une primitive de f et où K est une constante arbitraire. En outre, la fonction H est continûment dérivable, strictement monotone, donc admet une fonction réciproque de sorte que la solution s'exprime comme

$$y = H^{-1}(F(x) + K).$$

Présentation rigoureuse : Le calcul précédant ne possédant pas un sens mathématique précis, il est préférable d'en donner une version plus rigoureuse en intégrant chaque membre de l'équation

$$\frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x)$$

par rapport à la variable x, ce qui donne

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(u))}y'(u)\, du = \int_{x_0}^{x} f(u)\, du$$

Après changement de variable, on obtient donc

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)}\, dv = \int_{x_0}^{x} f(u)\, du.$$

Exemple 3.1 *Résoudre sur tout intervalle I non vide l'équation :*

$$(E): \quad y' = 2x(1+y^2).$$

Soit y une solution sur un intervalle I de (E). Pour tout $x \in I$,

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = 2x$$

donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan(y(x)) = x^2 + C$. Puisque pour tout $x \in I$, $\arctan(y(x)) \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $x^2 + C \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $y(x) = \tan(x^2 + C)$. Inversement de telles fonctions sont solutions.

3.2 Équation différentielle de Bernoulli

Une équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^m(x)$$

où m est différent de 0 et 1 et où a et b sont des applications continues définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. En général, m est un entier naturel.

Cette forme d'équation a été proposée par Jacques Bernoulli en 1695 et résolue un an plus tard par Leibniz grâce à un changement de fonction qui ramène à une équation différentielle linéaire : en supposant que la fonction $y > 0$ sur l'intervalle I, on peut diviser l'équation par $y^m(x)$ et on obtient

$$\frac{y'(x)}{y^m(x)} + a(x)\frac{1}{y^{m-1}(x)} = b(x)$$

On pose

$$u(x) = \frac{1}{y^{m-1}(x)} = y^{1-m}(x)$$

donc

$$u'(x) = (1-m)y^{-m}(x)y'(x) = \frac{(1-m)y'(x)}{y^m(x)}.$$

L'équation de Bernoulli sur y équivaut donc à l'équation différentielle linéaire d'ordre un sur u :

$$\frac{1}{1-m}u'(x) + a(x)u(x) = b(x)$$

dont la solution générale est

$$u(x) = e^{-(1-m)\int a(t)\mathrm{d}t}\left(C + (1-m)\int b(t)e^{(1-m)\int a(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right),$$

ce qui donne pour la fonction $y = u^{1/(1-m)}$:

$$y(x) = e^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \left(C + (1-m) \int b(t) e^{(1-m)\int a(s)\mathrm{d}s} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

La solution de cette équation qui passe par le point (x_0, y_0) est la fonction y définie par :

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t} \left(1 + (1-m) y_0^{m-1} \int_{x_0}^{x} b(t) \left(e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s} \right)^{m-1} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

Des solutions peuvent être cherchées parmi les fonctions qui ne sont pas partout positives sur leur domaine de définition, mais alors de nombreuses précautions doivent être prises quant aux domaines de validité des solutions.

Exemple 3.2 *Considérons l'équation :*

$$(E) : y' + \cos(x) y = -\frac{1}{2} y^3.$$

Le changement de variable s'écrit ici $u = y^{-2}$ et l'équation sur u est de la forme :

$$u' - 2\cos(x) u = 1,$$

dont la solution s'obtient par la technique de "variation de la constante" :

$$u(x) = \left(\int_0^x e^{-2\sin(t)} dt + C \right) e^{2\cos(x)}.$$

3.3 Équation différentielle de Riccati

Une équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y' = q_0(x) + q_1(x) y + q_2(x) y^2,$$

uù q_0, q_1, et q_2, sont des fonctions continues sur un intervalle commun à valeurs réelles. Elle porte le nom de Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) et de son fils Vincenzo Riccati (1707-1775). Dès que l'on en connaît une solution particulière, une équation de Riccati se ramène par changement de variable, à une équation de Bernoulli. Ainsi, s'il est possible de trouver une solution y_1, alors la solution générale est de la forme

$$y = y_1 + u$$

En remplaçant y par $y_1 + u$ dans l'équation de Riccati, on obtient :

$$y_1' + u' = q_0 + q_1(y_1 + u) + q_2(y_1 + u)^2\,,$$

et comme

$$y_1' = q_0 + q_1 y_1 + q_2 y_1^2\,,$$

on a :
$$u' = q_1 u + 2q_2 y_1 u + q_2 u^2\,.$$
Or
$$u' - (q_1 + 2q_2 y_1)u = q_2 u^2$$
est une équation de Bernoulli. La substitution nécessaire à la résolution de cette équation de Bernoulli est alors :
$$z = u^{1-2} = \frac{1}{u}$$
Substituer $y = y_1 + \frac{1}{z}$ directement dans l'équation de Riccati donne l'équation linéaire :
$$z' + (q_1 + 2q_2 y_1)z = -q_2$$
La solution générale de l'équation de Riccati est alors donnée par :
$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$
où z est la solution générale de l'équation linéaire citée ci-dessus.

Exemple 3.3 *Considérons l'équation suivante :*
$$(E) : y' = \cos(x) - \sin(x)y + y^2.$$
Il est facile de vérifier que $y(x) = \cos(x)$ *est solution particulière. On pose donc :* $y(x) = \sin(x) + \frac{1}{z(x)}$*, de sorte que*
$$z' + \sin(x)z + 1 = 0.$$

3.4 Équation différentielle homogène

Équation différentielle du premier ordre, homogène de degré n : Une équation différentielle du premier ordre, mais non nécessairement linéaire, est dite homogène de degré n si elle peut s'écrire sous la forme
$$y'(x) = F(x, y)$$
où F est une fonction homogène de degré n, c'est-à-dire vérifiant $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$. Autrement dit (en posant $h(u) = F(1, u)$), c'est une équation qui s'écrit
$$y'(x) = x^n h\left(\frac{y}{x}\right).$$
Le cas le plus étudié est celui où $n = 0$, à tel point que dans ce cas on ne mentionne même pas le degré. La résolution d'une telle équation se fait par séparation des variables : grâce à la substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, l'équation homogène
$$y'(x) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

se transforme en une équation à variables séparées :

$$\frac{u'(x)}{h\left(u(x)\right) - u(x)} = \frac{1}{x}.$$

Équation différentielle linéaire homogène : Une équation différentielle linéaire mais d'ordre quelconque est dite homogène si elle est de la forme

$$Ly = 0,$$

où l'opérateur différentiel L est une application linéaire et y est la fonction inconnue.

Exemple 3.4

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants., où a, b, c sont supposées connues.

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients variables $a(x)$, $b(x)$ fonctions supposées connues.

3.5 Équation différentielle de Lagrange

L'équation différentielle de Lagrange est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme suivante

$$y(x) = a(y'(x))x + b(y'(x)),$$

pour deux fonctions a et b continûment dérivables. Elle porte le nom du mathématicien Joseph-Louis Lagrange. Les fonctions affines solutions portent le nom de solutions singulières. Elles sont de la forme $x \longmapsto mx + b(m)$, avec $a(m) = m$.

Les solutions régulières sont celles qui vérifient y de classe C^2 et y'' non nulle. Soit x dans $\mathbb{R}$. On dérive les deux membres de l'équation et on effectue le changement de variable $p = y'$, pour obtenir

$$p = a'(p)p'x + a(p) + b'(p)p'$$

L'équation obtenue peut alors se mettre sous la forme

$$(p - a(p))\frac{dx}{dp} = a'(p)x + b'(p)$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre un. Elle se résout explicitement, ce qui donne l'expression de p et grâce à l'équation initiale on connaît $y(p)$.