

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

module : Commande des Systèmes

examen du cours B7–1

“Filtrage bayésien et approximation particulière”

vendredi 23 octobre 2015, 15:45 à 17:15

PROBLÈME

L’objectif de ce problème est d’étudier deux approximations de type particulière pour le calcul de la probabilité de dépassement

$$P_n = \mathbb{P}[V(X_n) \geq a] ,$$

portant sur l’état final X_n d’une chaîne de Markov (X_0, X_1, \dots, X_n) à valeurs dans E , caractérisée par

- la distribution initiale $\eta(dx)$,
- le noyau de transition $Q_k(x, dx')$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Cette formulation apparemment restrictive ne permet à première vue de considérer que des dépassements de niveau à l’instant final.

- (i) **Quitte à considérer une chaîne de Markov augmentée, incluant aussi le maximum courant de la suite $(V(X_0), V(X_1), \dots, V(X_n))$, montrer que cette formulation permet en fait de traiter le calcul de la probabilité de dépassement plus générale**

$$P_{0:n} = \mathbb{P}[V(X_k) \geq a, \text{ pour un certain } k = 0, 1, \dots, n] .$$

Les deux méthodes proposées dans ce problème reposent sur la remarque suivante, justifiée par la théorie des grandes déviations : pour évaluer la probabilité de dépassement P_n , une stratégie efficace consiste à utiliser la mesure de probabilité \mathbb{P}^λ , absolument continue par rapport à la mesure de probabilité \mathbb{P} , et définie par sa dérivée de Radon–Nikodym

$$\frac{d\mathbb{P}^\lambda}{d\mathbb{P}} = \exp\{\lambda (V(X_n) - \Lambda_n(\lambda))\} \quad \text{avec} \quad \Lambda_n(\lambda) = \log \mathbb{E}[\exp\{\lambda V(X_n)\}] .$$

Intuitivement, cette mesure de probabilité \mathbb{P}^λ favorise (pondère davantage) les trajectoires telles que $V(X_n)$ est grand, qui sont justement les trajectoires susceptibles d'entrer dans l'ensemble critique $\{x \in E, V(x) \geq a\}$. Le choix du paramètre λ est une question importante, mais ne sera pas abordé ici : on considérera donc que λ est donné.

PREMIÈRE MÉTHODE

On introduit les fonctions positives

$$g_k^+(x') = \exp\{\lambda V(x')\} \quad \text{et} \quad g_k^-(x') = \exp\{-\lambda V(x')\},$$

définies sur E pour tout $k = 0, 1, \dots, n$. On pose

$$T_k(x_0, x_1, \dots, x_k) = \prod_{p=0}^k g_p^-(x_p),$$

pour tout $x_0, x_1, \dots, x_k \in E$ et pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

(ii) **Montrer que la probabilité de dépassement peut s'exprimer comme**

$$P_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(V(X_n) \geq a)} T_n(X_0, X_1, \dots, X_n) \prod_{k=0}^n g_k^+(X_k)],$$

On pose $X_k^{\text{mf}} = (X_k, W_k)$ avec $W_k = T_k(X_0, X_1, \dots, X_k)$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

(iii) **Montrer que la suite $(X_0^{\text{mf}}, X_1^{\text{mf}}, \dots, X_n^{\text{mf}})$ forme une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble produit $E \times [0, \infty)$, caractérisée par**

- **la distribution initiale définie par**

$$\eta_0^{\text{mf}}(dx, dv) = \mathbb{P}[X_0 \in dx, W_0 \in dv] = \eta(dx) \delta_{g_0^-(x)}(dv),$$

- **et le noyau de transition défini par**

$$\begin{aligned} Q_k^{\text{mf}}(x, v, dx', dv') &= \mathbb{P}[X_k \in dx', W_k \in dv' \mid X_{k-1} = x, W_{k-1} = v] \\ &= Q_k(x, dx') \delta_v g_k^-(x')(dv'), \end{aligned}$$

pour tout $k = 1, \dots, n$.

Clairement la probabilité de dépassement peut s'exprimer comme

$$P_n = \mathbb{E}[\mathbf{1}(V(X_n) \geq a) W_n \prod_{k=0}^n g_k^+(X_k)] .$$

On introduit les distributions de Feynman–Kac non-normalisées, et les distributions de Feynman–Kac normalisées associées, définies par

$$\langle \gamma_k^{\text{mf}}, F \rangle = \mathbb{E}[F(X_k, W_k) \prod_{p=0}^k g_p^+(X_p)] \quad \text{et} \quad \langle \mu_k^{\text{mf}}, F \rangle = \frac{\langle \gamma_k^{\text{mf}}, F \rangle}{\langle \gamma_k^{\text{mf}}, \mathbf{1} \rangle}, \quad (\star)$$

pour toute fonction F définie sur l'ensemble produit $E \times [0, \infty)$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

- (iv) **Montrer que la probabilité de dépassement peut s'exprimer comme $P_n = \langle \gamma_n^{\text{mf}}, F_a \rangle$ pour une fonction F_a particulière dont on donnera l'expression, définie sur l'ensemble produit $E \times [0, \infty)$.**
- (v) **Mettre en œuvre l'algorithme SIR et expliciter l'approximation particulière obtenue pour les distributions de Feynman–Kac définies en (\star) . En déduire une première approximation particulière de la probabilité de dépassement P_n . Décrire de manière intuitive le comportement qualitatif de l'algorithme ainsi obtenu.**

DEUXIÈME MÉTHODE

On introduit les fonctions positives

$$g_0(x, x') = g_0(x') = \exp\{\lambda V(x')\} \quad \text{et} \quad g_k(x, x') = \exp\{\lambda (V(x') - V(x))\},$$

définies sur $E \times E$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

- (vi) **Montrer que la probabilité de dépassement peut s'exprimer comme**

$$P_n = \mathbb{E}[\theta_a(X_n) \prod_{k=0}^n g_k(X_{k-1}, X_k)],$$

avec

$$\theta_a(x) = \mathbf{1}(V(x) \geq a) \exp\{-\lambda V(x)\},$$

pour tout $x \in E$.

On introduit les distributions de Feynman–Kac non-normalisées, et les distributions de Feynman–Kac normalisées associées, définies par

$$\langle \gamma_k, \phi \rangle = \mathbb{E}[\phi(X_k) \prod_{p=0}^k g_p(X_{p-1}, X_p)] \quad \text{et} \quad \langle \mu_k, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}, \quad (\star\star)$$

pour toute fonction ϕ définie sur E , pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

Clairement, la probabilité de dépassement peut s'exprimer comme $P_n = \langle \gamma_n, \theta_a \rangle$.

- (vii) **Mettre en œuvre l'algorithme SIR et expliciter l'approximation particulière obtenue pour les distributions de Feynman–Kac définies en $(\star\star)$. En déduire une deuxième approximation particulière de la probabilité de dépassement P_n . Décrire de manière intuitive le comportement qualitatif de l'algorithme ainsi obtenu.**