École Nationale Supérieure de Techniques Avancées module : Commande des Systèmes

examen du cours B7–1 "Filtrage bayésien et approximation particulaire"

mercredi 16 octobre 2013, 8:30 à 10:00

Problème

L'objectif de ce problème est de montrer que les estimations de l'erreur d'approximation particulaire obtenues dans le cours pour des fonctions bornées, peuvent également être établies pour certaines classes de fonctions non–nécessairement bornées.

On rappelle que les distributions non–normalisées vérifient la relation de récurrence suivante

$$\gamma_k = \gamma_{k-1}\, R_k = g_k\, (\gamma_{k-1}\, Q_k)$$

et les approximations particulaires proposées sont définies par

$$\gamma_k^N = g_k\, \eta_k^N\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la distribution empirique

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N\, Q_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}\ ,$$

où conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution commune $\mu_{k-1}^N\, Q_k$. Pour tout $k = 1, \cdots, n$, on rappelle que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \qquad (\star)$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée.

Soit V une fonction à valeurs dans $[1, \infty)$, et soit $\mathcal{A}_V$ l'ensemble des fonctions ϕ mesurables, non–nécessairement bornées, mais telles que la fonction $\dfrac{\phi}{V}$ soit bornée. On définit la norme $\| \cdot \|_V$ par $\|\phi\|_V = \sup_{x \in E} \dfrac{|\phi(x)|}{V(x)} = \|\dfrac{\phi}{V}\|$ pour tout $\phi \in \mathcal{A}_V$.

On suppose que la fonction V est une fonction de Lyapunov dans le sens suivant : pour tout $k = 1, \cdots, n$, il existe une constante $L_k > 0$ telle que

$$Q_k\, V(x) = \int_E Q_k(x, dx')\, V(x') \leq L_k\; V(x) \ ,$$

pour tout $x \in E$.

(i) **Montrer que, si la fonction ϕ appartient à $\mathcal{A}_V$, alors la fonction $Q_k(g_k\, \phi)$ aussi appartient à $\mathcal{A}_V$, et $\|Q_k(g_k\, \phi)\|_V \leq \sup_{x \in E} g_k(x)\; L_k\; \|\phi\|_V$.**

(ii) **Montrer (par exemple par récurrence) que, si la fonction de Lyapunov V est intégrable par rapport à la distribution initiale η_0, alors elle est intégrable par rapport aux distributions non–normalisées γ_k et par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.**

En déduire que toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$ est intégrable par rapport aux distributions non–normalisées γ_k et par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.

En déduire que la relation $(\star)$ est vérifiée aussi pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$.

(iii) **Montrer (par exemple par récurrence) que l'approximation particulaire des distributions non–normalisées est non–biaisée, i.e. $\mathbb{E}\langle \gamma_k^N, \phi \rangle = \langle \gamma_k, \phi \rangle$ pour toute fonction ϕ appartenant à $\mathcal{A}_V$.**

On suppose que la fonction V^2 aussi est une fonction de Lyapunov dans le sens suivant

$$Q_k\, V^2(x) = \int_E Q_k(x, dx')\, V^2(x') \leq L_k^{(2)}\; V^2(x)$$

(iv) **Montrer (par exemple par récurrence) que, si la fonction de Lyapunov V^2 est intégrable par rapport à la distribution initiale η_0, alors elle est intégrable par rapport aux distributions η_k et μ_k, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.**

Il est maintenant possible de suivre les étapes de la démonstration vue en cours dans le cas plus simple des fonctions bornées, et d'obtenir des estimations de l'erreur d'approximation particulaire dans le cas plus général des fonctions appartenant à $\mathcal{A}_V$.

(v) **Montrer (par exemple par récurrence, et en suivant les étapes de la démonstration vue en cours dans le cas plus simple des fonctions bornées) que**

$$\sup_{\phi \,:\, \|\phi\|_V = 1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}\, | \leq z_k^N \ ,$$

où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la relation de récurrence suivante

$$z_k^N \leq r_k\; L_k\; z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}}\, \langle \eta_k, V^2 \rangle^{1/2} \qquad \textbf{et} \qquad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}\, \langle \eta_0, V^2 \rangle^{1/2} \ .$$