

cours SOD333 (4/5)

Filtrage Bayésien et Approximation Particulaire

François Le Gland
INRIA Rennes et IRMAR

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/>

19 octobre 2018

Convergence des approximations particulières

rappel : distributions normalisées et non-normalisées
erreur dans \mathbb{L}^p pour les approximations particulières

TCL pour les approximations particulières

Probabilité d'extinction, sélection binaire

Distributions normalisées et non-normalisées (rappel)

évolution (non-linéaire) de la distribution normalisée

$$\mu_{k-1} \xrightarrow{\text{mutation}} \eta_k = \mu_{k-1} Q_k \xrightarrow{\text{pondération}} \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$, où la notation \cdot désigne le produit projectif

on suppose que chaque fonction g_k est bornée et strictement positive

approximation particulière (éventuellement) pondérée

$$\eta_k \approx \eta_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i} \quad \text{et} \quad \mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i}$$

avec les conditions initiales $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$ et $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ respectivement

immédiatement à partir de la définition

$$\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N = \frac{\sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i) \delta_{\xi_k^i}}{\sum_{j=1}^N g_k(\xi_k^j)} = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i}$$

est automatiquement sous la forme recherchée, et

$$\langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)$$

en revanche

$$\mu_{k-1}^N Q_k = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i m_k^i \quad \text{avec} \quad m_k^i(dx') = Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

apparaît seulement sous la forme d'un mélange fini, et l'approximation

$$\eta_k^N \approx \mu_{k-1}^N Q_k$$

doit encore être précisée

évolution (linéaire) de la distribution non-normalisée

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} R_k = g_k (\gamma_{k-1} Q_k) = g_k (\mu_{k-1} Q_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k \eta_k \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0 = g_0 \eta_0$: clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle \quad (\star)$$

approximation particulière proposée

$$\gamma_k^N = g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0^N = g_0 \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$: clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle \quad (\star\star)$$

d'où on déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

c'est-à-dire que la version normalisée de l'approximation γ_k^N proposée coïncide avec l'approximation μ_k^N

en itérant les relations (\star) et $(\star\star)$, on obtient

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k, g_k \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

Remarque clé pour la récurrence : pour tout $k = 1 \cdots n$, on a par différence

$$\begin{aligned} \gamma_k^N - \gamma_k &= g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k (\gamma_{k-1} Q_k) \\ &= g_k (\gamma_{k-1}^N Q_k - \gamma_{k-1} Q_k) + g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

décomposition de l'erreur au rang k , évaluée pour la fonction ϕ , en

- ▶ erreur au rang $(k-1)$, évaluée pour la fonction $R_k \phi = Q_k(g_k \phi)$
- ▶ et erreur locale d'approximation Monte Carlo

Erreur dans \mathbb{L}^p pour les approximations particulières

difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \geq 1$$

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right| \leq z_n^N \quad \text{et} \quad \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} |\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq 2 z_n^N$$

respectivement, où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la relation de récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans \mathbb{L}^p pour tout $p \geq 1$ (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

Remarque pour toute fonction ϕ mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, \mathbf{1} \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}$$

de sorte que

$$|\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} \right| + \|\phi\| \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} \right|$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} |\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq 2 \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} \right|$$

pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que l'erreur convenablement normalisée définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \right|$$

pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ vérifie la relation de récurrence linéaire annoncée

Preuve du Théorème on rappelle que

$$\mathbb{E} | \langle \eta_0^N - \eta_0, \phi \rangle | \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|\phi\|$$

► pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\mathbb{E} | \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle | \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_0(x) \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

on rappelle que

$$\mathbb{E}[|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, \phi \rangle| \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|\phi\|$$

où \mathcal{F}_{k-1}^N dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération

► pour tout $k = 1 \cdots n$, on rappelle (clé pour la récurrence) que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

on en déduit que

$$\begin{aligned} & \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle | \\ & \leq \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle | \\ & \quad + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} [| \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle | \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle] \end{aligned}$$

on remarque que

$$\begin{aligned} & \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle | \\ & \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle | \end{aligned}$$

compte tenu que

$$|Q_k(g_k \phi)(x)| = \left| \int_E Q_k(x, dx') g_k(x') \phi(x') \right| \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle = \langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} z_k^N &= \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \right| \\ &\leq \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle} \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| \\ &\quad + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, \mathbf{g}_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| \end{aligned}$$

i.e.

$$z_k^N \leq r_k z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \quad (\bullet)$$

avec comme terme forçant l'erreur locale définie par

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, \mathbf{g}_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right|$$

pour tout $k = 1 \dots n$

on remarque que

$$\mathbb{E}[|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle| | \mathcal{F}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_k(x) \|\phi\|$$

où \mathcal{F}_{k-1}^N dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération, puis

- ▶ en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle$ mesurable par rapport à \mathcal{F}_{k-1}^N
- ▶ et en divisant par $\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| | \mathcal{F}_{k-1}^N \right] \\ \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \|\phi\| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{N}} r_k \left(1 + \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| \right) \|\phi\| \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^N &= \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, \mathbf{g}_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, \mathbf{1} \rangle}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| \\ &\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} \left(1 + \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} \right| \right) \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} (1 + z_{k-1}^N) \end{aligned}$$

et en reportant cette estimation dans (●) on obtient

$$z_k^N \leq r_k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \square$$

Convergence des approximations particulières

TCL pour les approximations particulières

rappel : convergence en distribution, TCL conditionnel

TCL pour les approximations particulières

Probabilité d'extinction, sélection binaire

Convergence en distribution (rappel)

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^m : on dit que $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$ si et seulement si

$$\mathbb{E}[f(X_N)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{pour toute fonction } f \text{ continue et bornée}$$

une CNS est la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\exp\{j u^* X_N\}] \longrightarrow \mathbb{E}[\exp\{j u^* X\}] \quad \text{pour tout vecteur } u \in \mathbb{R}^m$$

Lemme de Slutsky soit X_N, Y_N et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^m : si

- ▶ $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$
- ▶ $|Y_N - X_N| \rightarrow 0$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$Y_N \Rightarrow X \text{ en distribution quand } N \uparrow \infty$$

TCL conditionnel

Lemme A si $Z_N = Z'_N + Z''_N$, où

- ▶ conditionnellement à \mathcal{F}_N , la v.a. Z'_N converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V' , au sens où pour tout u fixé

$$\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V'\}$$

en probabilité (et dans \mathbb{L}^1 , par le théorème de convergence dominée de Lebesgue) quand $N \uparrow \infty$

- ▶ la v.a. Z''_N est mesurable par rapport à \mathcal{F}_N , et converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V'' , i.e. pour tout u fixé

$$\mathbb{E}[\exp\{j u Z''_N\}] \longrightarrow \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V''\}$$

quand $N \uparrow \infty$

alors la v.a. $Z_N = Z'_N + Z''_N$ converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance $V = V' + V''$, quand $N \uparrow \infty$

Preuve il suffit d'exploiter la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\exp\{j u Z_N\}] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V\} \\
 &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \exp\{j u Z''_N\}] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V' - \frac{1}{2} u^2 V''\} \\
 &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V'\}) \exp\{j u Z''_N\}] \\
 &\quad + \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V'\} [\mathbb{E}[\exp\{j u Z''_N\}] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V''\}]
 \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{E}[\exp\{j u Z_N\}] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V\}| \\
 & \leq \mathbb{E} |\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V'\}| \\
 & \quad + |\mathbb{E}[\exp\{j u Z''_N\}] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 V''\}| \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

quand $N \uparrow \infty$



Lemme B si $Z'_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$, où

- ▶ conditionnellement à \mathcal{F}_N , les v.a. (X_1, \dots, X_N) sont i.i.d., centrées, de variance σ_N^2 et bornées, i.e.

$$\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_N] = 0, \quad \mathbb{E}[|X_i|^2 | \mathcal{F}_N] = \sigma_N^2 \quad \text{et} \quad |X_i| \leq c_N$$

pour tout $i = 1 \dots N$, où la variance σ_N^2 et la borne c_N sont mesurables par rapport à \mathcal{F}_N

- ▶ et $\sigma_N^2 \rightarrow \sigma^2$ et $c_N \rightarrow c$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} | \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma^2\}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

Preuve d'après l'hypothèse d'indépendance conditionnelle, on a

$$\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[\exp\{j \frac{u}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i\} \mid \mathcal{F}_N] = [\mathbb{E}[\exp\{j \frac{u X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N]]^N$$

où la v.a. X est distribuée comme chacune des v.a. (X_1, \dots, X_N)
d'après les majorations classiques

$$|\mathbb{E}[\exp\{j \frac{u X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - (1 - \frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N})| \leq \frac{1}{6} (c_N \frac{|u|}{\sqrt{N}})^3$$

et

$$|\exp\{-\frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N}\} - (1 - \frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N})| \leq \frac{1}{8} (c_N \frac{u}{\sqrt{N}})^4$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\mathbb{E}[\exp\{j \frac{u X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N}\}| \leq (c_N \frac{|u|}{\sqrt{N}})^3 (\frac{1}{6} + \frac{1}{8} c_N \frac{|u|}{\sqrt{N}})$$

il résulte de la majoration

$$|a^N - b^N| \leq N |a - b|$$

valide pour tout $|a| \leq 1$ et tout $|b| \leq 1$, et en particulier valide pour

$$a = \mathbb{E}\left[\exp\left\{j \frac{uX}{\sqrt{N}}\right\} \mid \mathcal{F}_N\right] \quad \text{et} \quad b = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N}\right\}$$

que

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}\left[\exp\left\{j u Z'_N\right\} \mid \mathcal{F}_N\right] - \exp\left\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_N^2\right\} \right| \\ &= \left| \left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{j \frac{uX}{\sqrt{N}}\right\} \mid \mathcal{F}_N\right] \right]^N - \left[\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N}\right\} \right]^N \right| \\ &\leq N \left| \mathbb{E}\left[\exp\left\{j \frac{uX}{\sqrt{N}}\right\} \mid \mathcal{F}_N\right] - \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{u^2 \sigma_N^2}{N}\right\} \right| \\ &\leq N \left(c_N \frac{|u|}{\sqrt{N}} \right)^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} c_N \frac{|u|}{\sqrt{N}} \right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, il résulte de la majoration

$$| \exp\{-x\} - \exp\{-x'\} | \leq |x - x'|$$

valide pour tout $x \geq 0$ et tout $x' \geq 0$, que

$$| \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_N^2\} - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma^2\} | \leq \frac{1}{2} u^2 | \sigma_N^2 - \sigma^2 | \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} & | \mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} | \mathcal{F}_N] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma^2\} | \\ & \leq | \mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} | \mathcal{F}_N] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_N^2\} | \\ & \quad + | \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma_N^2\} - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \sigma^2\} | \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$



TCL pour les approximations particulières

on se limite ici au cas de la redistribution multinomiale, c'est-à-dire que

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}$$

où, conditionnellement à la tribu \mathcal{F}_{k-1}^N engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \dots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité (mélange fini) commune

$$\mu_{k-1}^N Q_k(dx') = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

on rappelle que dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, \phi \rangle\right|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N\right] = \frac{1}{N} \text{var}(\phi, \mu_{k-1}^N Q_k)$$

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\sqrt{N} \left[\frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right] \implies \mathcal{N}(0, V_n) \quad \text{et} \quad \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \implies \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \eta_k, |g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

respectivement, où les fonctions

$$R_{k+1:n} \phi(x) = R_{k+1} \cdots R_n \phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n) \prod_{p=k+1}^n g_p(X_p) \mid X_k = x]$$

définies pour tout $k = 0, 1, \dots, n$, avec la convention $R_{n+1:n} \phi(x) = \phi(x)$, se calculent de manière rétrograde

Remarque pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle} \implies \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} \mathbf{1} \rangle^2}$$

on remarque en effet que

$$V_n = V_n(\mathbf{1}) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} \mathbf{1}, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} \mathbf{1} \rangle^2} = \sum_{k=0}^n \left[\frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} \mathbf{1})^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} \mathbf{1} \rangle^2} - 1 \right]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation

on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_n^N, \mathbf{1} \rangle} = \frac{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_n^N, \mathbf{1} \rangle} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ , et que $\langle \gamma_n^N, \mathbf{1} \rangle \rightarrow \langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, ce qui montre le Théorème pour la distribution normalisée (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n}(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} \mathbf{1} \rangle^2}$$

on vérifie enfin que

$$\begin{aligned}
 \langle \eta_k, \mathbf{g}_k R_{k+1:n}(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) \rangle &= \langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \langle \mu_k R_{k+1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle \\
 &= \langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \frac{\langle \gamma_k R_{k+1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \\
 &= \langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \\
 &= \langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle \frac{\langle \gamma_n, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \langle \mu_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = 0
 \end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1 \dots n$, de sorte que

$$\text{var}(\mathbf{g}_k R_{k+1:n}(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |\mathbf{g}_k R_{k+1:n}(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle$$

Remarque formulation “récursive” équivalente : on remarque que

$$\begin{aligned}\langle \eta_p, g_p R_{p+1:k} \mathbf{1} \rangle &= \langle \eta_p, g_p \rangle \langle \mu_p R_{p+1:k}, \mathbf{1} \rangle \\ &= \langle \eta_p, g_p \rangle \frac{\langle \gamma_p R_{p+1:k}, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_p, \mathbf{1} \rangle} = \langle \eta_p, g_p \rangle \frac{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_p, \mathbf{1} \rangle}\end{aligned}$$

de sorte que le rapport

$$\frac{\langle \eta_p, g_p R_{p+1:k} \mathbf{1} \rangle}{\langle \eta_p, g_p R_{p+1:k-1} \mathbf{1} \rangle} = \frac{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, \mathbf{1} \rangle} = \langle \eta_k, g_k \rangle$$

ne dépend pas de $p = 0, 1 \dots (k-1)$, et

$$\begin{aligned}V_k(\phi) &= \sum_{p=0}^k \frac{\text{var}(g_p R_{p+1:k} \phi, \eta_p)}{\langle \eta_p, g_p R_{p+1:k} \mathbf{1} \rangle^2} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\text{var}(g_p R_{p+1:k-1} R_k \phi, \eta_p)}{\langle \eta_p, g_p R_{p+1:k-1} \mathbf{1} \rangle^2 \langle \eta_k, g_k \rangle^2} + \frac{\text{var}(g_k \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k \rangle^2}\end{aligned}$$

soit

$$V_k(\phi) = \frac{V_{k-1}(R_k \phi)}{\langle \eta_k, g_k \rangle^2} + \frac{\text{var}(g_k \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k \rangle^2} \quad (\blacksquare)$$

Preuve du Théorème (par récurrence)

► pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\sqrt{N} \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle \implies \mathcal{N}(0, \text{var}(g_0 \phi, \eta_0))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \implies \mathcal{N}\left(0, \frac{\text{var}(g_0 \phi, \eta_0)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle^2}\right)$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, c'est-à-dire que l'hypothèse de récurrence (■) est vérifiée

► pour tout $k = 1 \cdots n$, on a (clé pour la récurrence)

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \phi \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} Z_N &= \sqrt{N} \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \\ &= \sqrt{N} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} + \sqrt{N} \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\ &= Z_N'' + Z_N' \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \implies \mathcal{N}(0, V_{k-1}(R_k \phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \eta_k, g_k \rangle$ on obtient

$$Z_N'' = \sqrt{N} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \implies \mathcal{N}\left(0, \frac{V_{k-1}(R_k \phi)}{\langle \eta_k, g_k \rangle^2}\right)$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

il reste à étudier

$$\begin{aligned} Z'_N &= \sqrt{N} \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{g_k(\xi_k^i) \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i \end{aligned}$$

avec

$$X_i = \frac{g_k(\xi_k^i) \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle}$$

on vérifie que

$$\sigma_N^2 = \mathbb{E}[|X_i|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = \frac{\text{var}(g_k \phi, \mu_{k-1}^N Q_k)}{\langle \eta_k, g_k \rangle^2} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2}$$

et

$$|X_i| \leq c_N = 2 \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \|\phi\|$$

pour tout $i = 1 \dots N$

clairement

$$\sigma_N^2 \longrightarrow \sigma^2 = \frac{\text{var}(\mathbf{g}_k \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle^2} \quad \text{et} \quad c_N \longrightarrow c = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle} \|\phi\|$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et grace au Lemme B, on en déduit que

$$|\mathbb{E}[\exp\{j u Z'_N\} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] - \exp\{-\frac{1}{2} u^2 \frac{\text{var}(\mathbf{g}_k \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle^2}\}] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, grace au Lemme A, on en déduit que

$$Z_N = \sqrt{N} \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, \mathbf{1} \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_k(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec

$$V_k(\phi) = \frac{V_{k-1}(R_k \phi)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle^2} + \frac{\text{var}(\mathbf{g}_k \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle^2}$$

c'est-à-dire que l'hypothèse de récurrence (■) est vérifiée



○○○○
○○○○○○○○

○○○○○○○
○○○○○○○○○○○

○○○○

Convergence des approximations particulières

TCL pour les approximations particulières

Probabilité d'extinction, sélection binaire

implicitement

Hypothèse A fonction de sélection g_k bornée supérieurement et strictement positive, c'est-à-dire que

$$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \quad \text{et} \quad g_k(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in E$$

plus généralement

Hypothèse B fonction de sélection g_k bornée supérieurement et positive, intégrale par rapport à η_k strictement positive, c'est-à-dire que

$$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \quad \text{et} \quad g_k(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in E$$

$$\text{et} \quad \langle \eta_k, g_k \rangle > 0$$

même si $\langle \eta_k, \mathbf{g}_k \rangle > 0$, il peut arriver que $g_k(\xi_k^i) = 0$ pour tout $i = 1 \dots N$, c'est-à-dire que toutes les particules reçoivent un poids nul, auquel cas $\langle \eta_k^N, \mathbf{g}_k \rangle = 0$ et $\langle \gamma_k^N, \mathbf{1} \rangle = 0$, de sorte que l'approximation μ_k^N n'est pas définie

on introduit le **temps d'extinction**

$$\begin{aligned} \tau^N &= \inf\{k \geq 1 : \langle \gamma_k^N, \mathbf{1} \rangle = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 1 : \langle \eta_k^N, \mathbf{g}_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i) = 0\} \\ &= \inf\{k \geq 1 : g_k(\xi_k^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N\}, \end{aligned}$$

i.e. le premier instant auquel toutes les particules reçoivent un poids nul

tant que $\tau^N > k$, les approximations particulières μ_0^N, \dots, μ_k^N et $\eta_0^N, \dots, \eta_k^N$, et les constantes de normalisation $\langle \gamma_0^N, \mathbf{1} \rangle, \dots, \langle \gamma_k^N, \mathbf{1} \rangle$ sont bien définies, mais aussi l'approximation particulière η_{k+1}^N et la constante de normalisation $\langle \gamma_{k+1}^N, \mathbf{1} \rangle$ sont bien définies

Proposition la probabilité d'extinction vérifie

examen 16/17

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq n] \leq a_n \exp\{-b_n N\}$$

Théorème la constante de normalisation et la distribution normalisée vérifient

$$\mathbb{E}[1_{\{\tau^N > n\}} \mid \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \mid] \leq z_n^N$$

et

$$\sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E}[1_{\{\tau^N > n\}} \mid \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \mid] \leq 2 z_n^N$$

Théorème la constante de normalisation et la distribution normalisée vérifient

$$\sqrt{N} 1_{\{\tau^N > n\}} \left[\frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n)$$

et

$$\sqrt{N} 1_{\{\tau^N > n\}} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

cas particulier : fonction de sélection **binaire**, à valeur 0 ou 1, de sorte que

$$p_k = \langle \eta_k, g_k \rangle \leq 1$$

terme général dans la variance asymptotique pour la constante de normalisation, compte tenu que $g_k^2 = g_k$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 &= \frac{\langle \eta_k, g_k (R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \\ &= \frac{\langle \mu_k, (R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \\ &= \left(\frac{1}{p_k} - 1 \right) + \frac{1}{p_k} \left[\frac{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2}{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} = \left(\frac{1}{p_k} - 1 \right) + \frac{1}{p_k} \frac{\text{var}(R_{k+1:n} 1, \mu_k)}{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$