École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
module : Commande des Systèmes

examen du cours OROC–SC–FP
“Filtrage bayésien et approximation particulaire”

vendredi 21 octobre 2016, 13:30 à 16:00

Problème

L’objectif de ce problème est d’étudier la convergence des approximations particulaires obtenues avec l’algorithme SIR de base (avec redistribution multinomiale) dans le cas plus général où l’Hypothèse A faite en cours

> Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, la fonction g_k est bornée et strictement positive, i.e.
>
> $$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \qquad \text{et} \qquad g(x) > 0 \text{ pour tout } x \in E,$$

est remplacée par l’Hypothèse B plus faible

> Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, la fonction g_k est bornée, positive au sens large, et son intégrale par rapport à la distribution η_k est strictement positive, i.e.
>
> $$\sup_{x \in E} g_k(x) < \infty \ , \qquad g_k(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in E \qquad \text{et} \qquad \langle \eta_k, g_k \rangle > 0 \ ,$$
>
> et on pose
>
> $$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \geq 1 \ .$$

Sous l’Hypothèse B, et même si $\langle \eta_k, g_k \rangle > 0$, il peut quand même arriver que $g_k(\xi_k^i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, N$, c’est–à–dire que toutes les particules sont affectées d’un poids nul, auquel cas $\langle \eta_k^N, g_k \rangle = 0$ et $\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0$, de sorte que l’approximation μ_k^N n’est pas définie. On définit le temps d’extinction du système de particules comme le premier instant

$$\begin{aligned}
\tau^N &= \inf\{k \geq 0 \, : \, \langle \gamma_k^N, 1 \rangle = 0\} \\
&= \inf\{k \geq 0 \, : \, \langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g_k(\xi_k^i) = 0\} \\
&= \inf\{k \geq 0 \, : \, g_k(\xi_k^i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, N\} \ ,
\end{aligned}$$

où toutes les particules sont affectées d'un poids nul, et où l'algorithme s'arrête (sous l'Hypothèse A, le temps d'extinction τ^N est bien sûr infini). Pour $k = 0$, on considère que $\{\tau^N > -1\}$ est toujours vrai.

(i) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, les approximations $\mu_0^N, \ldots, \mu_{k-1}^N$ et $\eta_0^N, \ldots, \eta_k^N$ des distributions normalisées, et les approximations $\gamma_0^N, \ldots, \gamma_k^N$ des distributions non–normalisées, sont bien définies.**

Solution

Pour $k = 0$, les distributions $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$ et $\gamma_0^N = g_0\, \eta_0^N$ sont bien définies, mais rien n'empêche que la constante de normalisation $\langle \eta_0^N, g_0 \rangle$ soit nulle, de sorte que la distribution $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ n'est pas nécessairement définie.

Sur l'ensemble $\{\tau^N > 0\}$ en revanche, la constante de normalisation $\langle \eta_0^N, g_0 \rangle$ n'est pas nulle, de sorte que la distribution $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ est bien définie.

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, les distributions γ_{k-1}^N et μ_{k-1}^N sont bien définies, donc les distributions $\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N\, Q_k)$ et $\gamma_k^N = g_k\, \eta_k^N\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$ aussi sont bien définies, mais rien n'empêche que la constante de normalisation $\langle \eta_k^N, g_k \rangle$ soit nulle, de sorte que la distribution $\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N$ n'est pas nécessairement définie.

Sur l'ensemble $\{\tau^N > k\}$ en revanche, la constante de normalisation $\langle \eta_k^N, g_k \rangle$ n'est pas nulle, de sorte que la distribution $\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N$ est bien définie.

□

On se propose d'estimer par récurrence la probabilité d'extinction, i.e. $\mathbb{P}[\tau^N \leq k]$.

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ et pour tout réel positif $c > 0$, on pose

$$E_k^N(c) = \sup_{\phi \geq 0\,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c \text{ et } \tau^N > k-1\,]\ ,$$

où le supremum porte sur les fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$, et

$$F_k^N = \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1 \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,]\ .$$

(ii) **Montrer que l'application $c \mapsto E_k^N(c)$ est décroissante et que $F_k^N \leq E_k^N(\frac{1}{2})$.**

Solution

Si $0 < c \leq c'$ et si

$$|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c' \qquad \text{alors nécessairement} \qquad |\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c\ ,$$

de sorte que

$$\mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c' \text{ et } \tau^N > k-1\,] \leq \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > c \text{ et } \tau^N > k-1\,] \;,$$

et en prenant le supremum par rapport aux fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$, on obtient $E_k^N(c') \leq E_k^N(c)$.

Clairement, $\phi \equiv 1$ est une fonction mesurable positive et telle que $\|\phi\| = 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} F_k^N &= \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1 \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,] \\ &\leq \sup_{\phi \geq 0 \,:\, \|\phi\|=1} P[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,] = E_k^N(\tfrac{1}{2}) \;. \end{aligned}$$

□

On aura besoin de l'inégalité exponentielle suivante (admise).

Inégalité exponentielle de Hoeffding

Soit $(X_1, \cdots, X_N)$ des variables aléatoires réelles indépendantes (mais pas nécessairement identiquement distribuées, ni centrées) et à valeurs bornées, i.e. $a \leq X_i \leq b$, pour tout $i = 1, \cdots, N$. Pour tout réel positif $c \geq 0$

$$\mathbb{P}[\,|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mathbb{E}(X_i))| \geq c\,] \leq 2 \, \exp\{-\frac{2\,N\,c^2}{(b-a)^2}\} \;.$$

► Initialisation, $k = 0$.

(iii) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[\tau^N = 0] = \mathbb{P}[\,\langle \gamma_0^N, 1 \rangle = 0\,] \leq \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, 1 \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2}\,] = F_0^N \;.$$

Solution

Si $\langle \gamma_0^N, 1 \rangle = 0$ alors $|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, 1 \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle}| = 1 > \frac{1}{2}$, de sorte que

$$\mathbb{P}[\tau^N = 0] = \mathbb{P}[\,\langle \gamma_0^N, 1 \rangle = 0\,] \leq \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, 1 \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle}| > \tfrac{1}{2}\,] = F_0^N \;.$$

□

(iv) **Montrer que pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$\mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle}{\langle \gamma_0, 1\rangle}| > c\,] = \mathbb{P}[\,|\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle| > c\,\langle \eta_0, g_0\rangle\,] \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .$$

[Indication : On pourra utiliser l'inégalité exponentielle de Hoeffding, avec

$$0 \leq X_i = g_0(\xi_0^i)\,\phi(\xi_0^i) \leq \sup_{x\in E} g_0(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N$$

où les v.a. $(\xi_0^i, \cdots, \xi_0^N)$ sont indépendantes de distribution commune η_0.]

En déduire que

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .$$

Solution

On rappelle l'expression

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle\ ,$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, et on en déduit que

$$\mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle}{\langle \gamma_0, 1\rangle}| > c\,] \;=\; \mathbb{P}[\,|\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle| > c\,\langle \eta_0, g_0\rangle\,]\ .$$

Pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$, on définit

$$0 \leq X_i = g_0(\xi_0^i)\,\phi(\xi_0^i) \leq \sup_{x\in E} g_0(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N$$

où les v.a. $(\xi_0^i, \cdots, \xi_0^N)$ sont indépendantes de distribution commune η_0, et on vérifie que

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}[g_0(\xi_0^i)\,\phi(\xi_0^i)] = \langle \eta_0, g_0\,\phi\rangle\ ,$$

et

$$\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle \;=\; \frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^N [g_0(\xi_0^i)\,\phi(\xi_0^i) - \langle \eta_0, g_0\,\phi\rangle] = \frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}(X_i))\ .$$

D'après l'inégalité de Hoeffding

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\,|\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle\,| > c\,\langle \eta_0, g_0\rangle\,] \;&\leq\; 2\,\exp\{-\,2\,(\frac{c\,\langle \eta_0, g_0\rangle}{\sup_{x\in E} g_0(x)})^2\,N\} \\ &\leq\; 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle}{\langle \gamma_0, 1\rangle}| > c\,] \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ ,$$

et en prenant le supremum par rapport aux fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$, on obtient

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ .$$

□

▶ Itération, $k = 1, \cdots, n$.

(v) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq k] = \mathbb{P}[\tau^N \leq k-1] + \mathbb{P}[\tau^N = k]\ ,$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau^N = k] \;&=\; \mathbb{P}[\,\langle \gamma_k^N, 1\rangle = 0 \text{ et } \tau^N > k-1\,]\\[2ex] &\leq\; \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,] = F_k^N\ .\end{aligned}$$

Solution

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, les *bons ensembles* $\{\tau^N > k\} \subseteq \{\tau^N > k-1\}$ sont emboîtés, et on a

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq k] = \mathbb{P}[\tau^N \leq k-1] + \mathbb{P}[\tau^N = k]\ .$$

Sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, si $\langle \gamma_k^N, 1\rangle = 0$ alors $|\dfrac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}| = 1 > \frac{1}{2}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau^N = k] \;&=\; \mathbb{P}[\,\langle \gamma_k^N, 1\rangle = 0 \text{ et } \tau^N > k-1\,]\\[2ex] &\leq\; \mathbb{P}[\,|\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, 1\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}| > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1\,]\\[2ex] &\leq\; F_k^N\ .\end{aligned}$$

□

(vi) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$ pour toute fonction mesurable bornée ϕ**

$$\begin{aligned}|\,\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi\rangle}{\langle \gamma_k, 1\rangle}\,| \;&\leq\; |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle\;\langle \eta_k, g_k\rangle}\,|\\[2ex] &\qquad + |\,\frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle}\,|\,(\,1 + |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,)\ .\end{aligned}$$

En déduire que

$$
\begin{aligned}
E_k^N(c) \; = & \sup_{\phi \geq 0 \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \, | > c \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
\leq & \sup_{\phi \geq 0 \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | > \tfrac{1}{2} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
& \qquad + \mathbb{P}[\, | \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
& \qquad + \sup_{\phi \geq 0 \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, | > \tfrac{1}{3} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \; .
\end{aligned}
$$

Solution

On rappelle la décomposition

$$
\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \; ,
$$

valide sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$ pour toute fonction ϕ mesurable bornée. On en déduit que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$

$$
\begin{aligned}
| \, \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle \, | \; \leq & \; | \, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle \, | + | \, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, | \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \\
\leq & \; | \, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle \, | \\
& \quad + | \, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, | \; (\, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle + | \, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle \, | \,) \; ,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
| \, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \, | \; \leq & \; | \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \; \langle \eta_k, g_k \rangle} \, | \\
& \quad + | \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \, | \; (\, 1 + | \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \,) \; .
\end{aligned}
$$

Sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, si

$$
| \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \leq \tfrac{1}{2} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \qquad \text{et} \qquad | \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \leq \tfrac{1}{2} \; ,
$$

et

$$
| \, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, | \leq \tfrac{1}{3} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \; ,
$$

alors nécessairement

$$| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} | \leq c \; .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_k^N(c) \; &= \sup_{\phi \geq 0 \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} | > c \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
&\leq \sup_{\phi \geq 0 \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} | > \tfrac{1}{2} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
&\qquad + \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} | > \tfrac{1}{2} \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
&\qquad + \sup_{\phi \geq 0 \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle | > \tfrac{1}{3} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \; .
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est majoré par F_{k-1}^N, compte tenu de la propriété d'emboîtement des *bons ensembles*.

$\square$

Dans le second membre, le deuxième terme est facilement majoré par F_{k-1}^N, et on se propose d'étudier successivement le premier et le troisième terme.

(vii) **Montrer que pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} | > \tfrac{1}{2} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \\
&\qquad \leq \sup_{\phi \geq 0 \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} | > \tfrac{1}{2} \, \frac{c}{r_k} \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \; .
\end{aligned}$$

En déduire que

$$\sup_{\phi \geq 0 \, : \, \|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} | > \tfrac{1}{2} \, c \, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2} \, \frac{c}{r_k}) \; .$$

Solution

Pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$, on a

$$0 \leq Q_k(g_k \, \phi)(x) = \int_E Q_k(x, dx') \; g_k(x') \, \phi(x') \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \; ,$$

pour tout $x \in E$, et on en déduit que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} | > \tfrac{1}{2}\, c\, \langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k-1\,] \\
&\quad = \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle\ \sup_{x\in E} Q_k(g_k\,\phi)(x)} | > \tfrac{1}{2}\, c\, \frac{\langle \eta_k, g_k\rangle}{\sup_{x\in E} Q_k(g_k\,\phi)(x)} \text{ et } \tau^N > k-1\,] \\
&\quad \leq \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle\ \sup_{x\in E} Q_k(g_k\,\phi)(x)} | > \tfrac{1}{2}\, c\, \frac{\langle \eta_k, g_k\rangle}{\sup_{x\in E} g_k(x)} \text{ et } \tau^N > k-1\,] \\
&\quad \leq \sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} | > \tfrac{1}{2}\, \frac{c}{r_k} \text{ et } \tau^N > k-1\,] \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2}\, \frac{c}{r_k})\ ,
\end{aligned}
$$

compte tenu de la propriété d'emboîtement des *bons ensembles*, et en prenant le supremum par rapport aux fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$ on obtient

$$
\sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, | \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} | > \tfrac{1}{2}\, c\, \langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k-1\,] \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2}\, \frac{c}{r_k})\ .
$$

□

(viii) **Montrer que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par toutes les particules jusqu'à la génération $(k-1)$, pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$**

$$
\mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\,\phi\rangle\,| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k\rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\}\ .
$$

[Indication : On pourra utiliser l'inégalité exponentielle de Hoeffding, avec

$$
0 \leq X_i = g_k(\xi_k^i)\, \phi(\xi_k^i) \leq \sup_{x\in E} g_k(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N
$$

où conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$ les v.a. $(\xi_k^i, \cdots, \xi_k^N)$ sont indépendantes de distribution commune $\mu_{k-1}^N\, Q_k$.]

En déduire que

$$
\sup_{\phi\geq 0\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\,\phi\rangle\,| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k\rangle \text{ et } \tau^N > k-1\,] \leq 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\}\ .
$$

Solution

Pour toute fonction mesurable positive ϕ telle que $\|\phi\| = 1$, on définit

$$0 \le X_i = g_k(\xi_k^i)\, \phi(\xi_k^i) \le \sup_{x \in E} g_k(x) \qquad \text{pour tout } i = 1, \cdots, N$$

où conditionnellement par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$ les v.a. $(\xi_k^i, \cdots, \xi_k^N)$ sont indépendantes de distribution commune $\mu_{k-1}^N\, Q_k$, et on vérifie que sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$

$$\mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{F}_{k-1}^N) = \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \ ,$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \ &= \ \frac{1}{N} \ \sum_{i=1}^N [\, g_k(\xi_k^i)\, \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle \,] \\
&= \ \frac{1}{N} \ \sum_{i=1}^N (X_i - \mathbb{E}(X_i \mid \mathcal{F}_{k-1}^N)) \ .
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hoeffding, sur l'ensemble $\{\tau^N > k-1\}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N \,] \\
&\le 2\, \exp\{-\, 2\, (\frac{\tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle}{\displaystyle\sup_{x \in E} g_k(x)})^2\, N\} \\
&\le 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\} \ .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N \,] \\
&= 1_{(\tau^N > k-1)}\ \mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle \mid \mathcal{F}_{k-1}^N \,] \\
&\le 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\} \ ,
\end{aligned}$$

de sorte que, en prenant l'espérance

$$\mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \le 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\} \ ,$$

et finalement, en prenant le supremum par rapport aux fonctions mesurables positives ϕ telles que $\|\phi\| = 1$, on obtient

$$\sup_{\phi \ge 0\, :\, \|\phi\| = 1} \mathbb{P}[\, |\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle| > \tfrac{1}{3}\, c\, \langle \eta_k, g_k \rangle \text{ et } \tau^N > k-1 \,] \le 2\, \exp\{-\, \tfrac{2}{9}\, \frac{c^2}{r_k^2}\, N\} \ .$$

$\square$

En reportant les estimations obtenues en réponse aux questions (vii) et (viii) dans la majoration obtenue en réponse à la question (vi), on obtient

$$E_k^N(c) \leq E_{k-1}^N(\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k}) + F_{k-1}^N + 2\,\exp\{-\,\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\}\ , \qquad (\star)$$

avec la condition initiale

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-\,\frac{2\,c^2}{r_0^2}\,N\}\ ,$$

obtenue en réponse à la question (iv).

(ix) **Montrer par récurrence, en utilisant la relation $(\star)$, que la probabilité d'extinction vérifie**

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq n] \leq a_n\ \exp\{-\,b_n\,N\}\ ,$$

où $a_n > 0$ et $b_n > 0$ sont des réels positifs.

Solution

On rappelle les estimations obtenues en réponse aux questions (iii) et (v), soit

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq k] \leq \mathbb{P}[\tau^N \leq k-1] + F_k^N \qquad \text{avec la condition initiale} \qquad \mathbb{P}[\tau^N \leq 0] \leq F_0^N\ ,$$

de sorte que

$$\mathbb{P}[\tau^N \leq n] \leq \sum_{k=0}^{n} F_k^N \leq \sum_{k=0}^{n} E_k^N(\tfrac{1}{2})\ .$$

en utilisant l'estimation obtenue en réponse à la question (ii).

On se propose de montrer par récurrence que

$$E_k^N(c) \leq e_k\ \max(\exp\{-d_k\,c^2\,N\}, \exp\{-f_k\,N\}) = e_k\ \exp\{-\min(d_k\,c^2, f_k)\,N\})\ ,$$

où $e_k > 0$, $d_k > 0$ et $f_k > 0$ sont des réels positifs.

Pour $k = 0$, on vérifie que

$$E_0^N(c) \leq 2\,\exp\{-2\,\frac{c^2}{r_0^2}\,N\}\ ,$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang 0, avec

$$e_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad d_0 = 2\,\frac{1}{r_0^2} \qquad \text{et} \qquad f_0 = +\infty\ .$$

Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $(k-1)$, c'est–à–dire si

$$E_{k-1}^N(c) \leq e_{k-1}\ \exp\{-\min(d_{k-1}\,c^2, f_{k-1})\,N\}\ ,$$

alors

$$E^N_{k-1}(\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k}) \;\leq\; e_{k-1}\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}\,\frac{c^2}{r_k^2}, f_{k-1})\,N\}\;,$$

et

$$F^N_{k-1} \leq E^N_{k-1}(\tfrac{1}{2}) \leq e_{k-1}\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}, f_{k-1})\,N\}\;.$$

En utilisant la relation $(\star)$ et la majoration

$$a\,\exp\{-x\} + a'\,\exp\{-x'\} \leq (a+a')\,\exp\{-\min(x,x')\}\;,$$

valide pour tous réels positifs $a > 0$, $a' > 0$, $x > 0$ et $x' > 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
E^N_k(c) \;&\leq\; E^N_{k-1}(\tfrac{1}{2}\,\frac{c}{r_k}) + F^N_{k-1} + 2\,\exp\{-\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\} \\
&\leq\; e_{k-1}\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}\,\frac{c^2}{r_k^2}, f_{k-1})\,N\} + e_{k-1}\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}, f_{k-1})\,N\} \\
&\qquad + 2\,\exp\{-\tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2}\,N\} \\
&\leq\; 2\,(e_{k-1}+1)\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}\,\frac{c^2}{r_k^2}, f_{k-1}, \tfrac{1}{4}\,d_{k-1}, \tfrac{2}{9}\,\frac{c^2}{r_k^2})\,N\} \\
&\leq\; 2\,(e_{k-1}+1)\;\exp\{-\min(\min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}, \tfrac{2}{9})\,\frac{c^2}{r_k^2}, \min(f_{k-1}, \tfrac{1}{4}\,d_{k-1}))\,N\}\;,
\end{aligned}$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang k, avec

$$e_k = 2\,(e_{k-1}+1) \qquad \text{et} \qquad d_k = \min(\tfrac{1}{4}\,d_{k-1}, \tfrac{2}{9})\,\frac{1}{r_k^2} \qquad \text{et} \qquad f_k = \min(f_{k-1}, \tfrac{1}{4}\,d_{k-1})\;.$$

En particulier pour $c = \frac{1}{2}$, on a

$$F^N_k \leq E^N_k(\tfrac{1}{2}) \leq e_k\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_k, f_k)\,N\}\;,$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau^N \leq n] = \sum_{k=0}^n F^N_k \;&\leq\; \sum_{k=0}^n e_k\;\exp\{-\min(\tfrac{1}{4}\,d_k, f_k)\,N\} \\
&\leq\; [\sum_{k=0}^n e_k\,]\;\exp\{-\min_{k=0,1,\cdots,n}\min(\tfrac{1}{4}\,d_k, f_k)\,N\}\;,
\end{aligned}$$

c'est–à–dire que la majoration annoncée est vérifiée avec

$$a_n = \sum_{k=0}^n e_k \qquad \text{et} \qquad b_n = \min_{k=0,1,\cdots,n}\min(\tfrac{1}{4}\,d_k, f_k)\;.$$

$\square$