

# DIXIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 20 au 24 MAI 1985

---

## LOCALISATION DE SOURCES PONCTUELLES AVEC UNE ANTENNE DE GEOMETRIE INCONNUE

P. NICOLAS et G. VEZZOSI

LABORATOIRE DE TRAITEMENT DU SIGNAL, UNIVERSITE DE RENNES I, CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX FRANCE

---

### RESUME

On propose une méthode de localisation de sources rayonnantes ponctuelles émettant des signaux à large bande reçus par un réseau aléatoire formé de capteurs de positions inconnues. La méthode fournit simultanément les directions des sources et les positions des capteurs, dans un repère lié aux capteurs. Les sources et les capteurs sont placés dans  $R^d$  ( $d = 2,3$ ).

Des simulations montrent les performances de la méthode et sa supériorité sur les méthodes classiques de corrélation temporelle. Elle ouvre des perspectives nouvelles d'applications à des systèmes de détection et de localisation en acoustique sous-marine.

### SUMMARY

This paper introduces a method for the locate of remote radiations sources. It is assumed that the emitted signals are wide-band processes. They are received by a random field of sensors with unknown coordinates. The method provides the directions of sources and the positions of sensors in a system of axes linked to the sensors.

Simulations show that this method is more efficient than the cross-correlation one. Some news applications can be derived, specially for the submarine detection and location systems.

\* Etude financée par le CELAR et le GERDSM.



## I - INTRODUCTION

Le thème général de la méthode proposée est le traitement spatial d'antennes dans le cas d'une antenne de géométrie inconnue. Elle permet de localiser des sources rayonnantes en direction et de déterminer les positions des capteurs de l'antenne de réception. Ce travail s'inscrit dans la continuité de l'étude monofréquente réalisée en [1]. On rappelle les données du problème.

On considère un nombre  $P$  de sources rayonnantes émettant des signaux aléatoires stationnaires à large bande.

Les sources sont supposées à l'infini et chacun des fronts d'ondes cohérent spatialement. L'antenne est formée de  $N$  capteurs omnidirectionnels dont les positions sont inconnues. On suppose que  $N$  est grand devant  $P$ . A la fréquence  $f$ , la source  $p$  est caractérisée par un vecteur source  $V_p(f)$  de la forme :

$$V_p(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\theta_{2p}(f)} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_{Np}(f)} \end{bmatrix}$$

où  $\theta_{np}(f)$  est le déphasage du signal émis par la source  $p$  sur le capteur  $n$  relativement au capteur 1 pris comme référence. La matrice interspectrale à la sortie des capteurs, pour la fréquence  $f$ , est égale à

$$\gamma(f) = \sum_{p=1}^P \alpha_p(f) \cdot V_p(f) \cdot V_p^*(f) + \sigma(f) \cdot I$$

où  $\alpha_p(f)$  est la densité spectrale de la source  $p$ ,  $\sigma(f)$  la densité spectrale du bruit de fond supposé blanc spatialement et  $I$  la matrice identité.

La méthode développée en [1] a permis d'estimer à partir d'une mesure bruitée de la matrice interspectrale  $\hat{\gamma}(f)$  le nombre  $P$  de sources, les  $P$  vecteurs sources caractérisés par la valeur principale des déphasages  $\theta_{np}(f)$  et la covariance des sources.

On se propose maintenant d'estimer les positions des capteurs et les directions des sources à partir des valeurs principales des déphasages comprises entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Dans l'espace  $E$  des sources et des capteurs de dimension  $d$  ( $d=2,3$ ), on définit un référentiel  $R$  lié aux capteurs et on suppose que la propagation se fait par ondes planes. Cette hypothèse permet d'écrire les déphasages  $\theta_{np}(f)$  sous la forme de produits scalaires :

$$\theta_{np}(f) = \vec{d}_n \cdot \vec{k}_p \quad \text{modulo } 2\pi \quad (1)$$

où  $\vec{k}_p$  est le vecteur d'onde de la source  $p$  et  $\vec{d}_n$  le vecteur position du capteur  $n$  dans le référentiel  $R$ . La résolution de l'équation (1) n'est possible qu'à modulo  $2\pi$ , ce qui entraîne une ambiguïté sur les vecteurs  $\vec{k}_p$  et  $\vec{d}_n$ .

On développe alors une méthode permettant de lever l'ambiguïté en  $2\pi$  en convertissant les déphasages en temps de retard  $\tau_{np}$  et en résolvant l'équation :

$$\tau_{np} = \frac{1}{c} \cdot \vec{d}_n \cdot \frac{\vec{k}_p}{\|\vec{k}_p\|} \quad (2)$$

La méthode comprend trois phases qui sont développées dans les sections II, III et IV.

Première phase : on effectue une analyse multifréquences qui consiste à appliquer la méthode d'estimation des déphasages [1] à toutes les fréquences dis-

ponibles. En supposant les signaux d'émission à large bande, on raccorde les vecteurs sources à chaque pas de l'analyse. On obtient ainsi leur variation en fonction de la fréquence.

Deuxième phase : pour la source  $p$  ( $p$  variant de 1 à  $P$ ) on récupère les déphasages  $\theta_{np}(f)$  à partir de leur valeur principale dont on connaît maintenant l'évolution en fonction de la fréquence avec une méthode de déroulement de la phase ("unwrapping"). On estime ensuite les temps de retard par une méthode des moindres carrés.

Troisième phase : Les temps de retard multipliés par la célérité  $c$  du milieu sont rangés dans une matrice  $T$  d'ordre  $N \times P$ . Soient  $X$  la matrice d'ordre  $d \times N$  des positions des capteurs et  $Y$  la matrice d'ordre  $d \times P$  des directions relatives normées inconnues des sources, on fait l'hypothèse que ces deux matrices sont de rang égal à  $d$ . On montre alors que la matrice  $T$  est aussi de rang  $d$  et on résout l'équation matricielle :

$$X^t \cdot Y = T \quad (3)$$

où le symbole  $t$  désigne la transposée.

Cette équation est résoluble à une transformation unitaire près d'où l'expression de "positions et directions relatives". On peut cependant connaître les directions et les positions vraies en localisant préalablement  $d+1$  capteurs qui forment alors le référentiel  $R$  dans l'espace  $E$ . La méthode employée pour résoudre l'équation (3) utilise la décomposition de la matrice  $T$  selon ses valeurs singulières et s'avère par conséquent très sensible aux erreurs d'estimation sur les temps de retard. En supposant connue la dimension de l'espace  $E$ , on développe un algorithme qui élimine les retards mal estimés. Le calcul des directions relatives des sources se fait alors avec une sous-matrice de  $T$  de rang  $d$ . On calcule ensuite les positions des capteurs qui ne correspondent pas aux temps de retard mal estimés. Ceci est développé au paragraphe V.

Des résultats provenant de simulations sont discutés dans la section VI. Ils permettent d'envisager l'application de la méthode mise au point à des systèmes de détection et de localisation en acoustique sous-marine.

## II - ANALYSE MULTIFREQUENCES ET RACCORDEMENT DES VECTEURS SOURCES

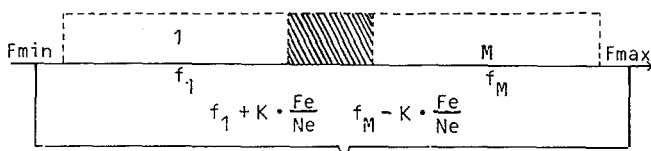
## II-1- Analyse multifréquences

On répète le traitement monofréquente sur un nombre  $M$  de fréquences correspondant à une bande de largeur  $\Delta f$  bornée inférieurement par  $f_{\min}$  et supérieurement par  $f_{\max}$ . Sans perdre en généralité, on suppose que les signaux sont tous présents sur cette bande. Le pas de l'analyse multifréquences, c'est-à-dire la différence entre deux fréquences d'analyse successives  $f_m$  et  $f_{m+1}$ , est fixé en fonction de la méthode d'estimation de la matrice interspectrale. On utilise ici la méthode du périodogramme lissé, le lissage étant effectué sur  $K$  fréquences de part et d'autre de la fréquence  $f_m$ . Pour assurer l'indépendance des matrices  $\gamma(f_m)$  et  $\gamma(f_{m+1})$  il suffit que :

$$f_{m+1} = f_m + (2 \cdot K + 1) \cdot \frac{Fe}{Ne}$$

où  $Fe$  est la fréquence d'échantillonnage des signaux temporels à la sortie des capteurs et  $Ne$  le nombre de points de la transformation de Fourier discrète. Pour chaque fréquence  $f_m$ ,  $m$  compris entre 1 et  $M$ , le traitement monofréquente fournit un jeu de vecteurs sources composés des  $P$  vecteurs sources vrais et de  $K_m$  vecteurs sources parasites. L'analyse multifréquences peut se schématiser de la façon suivante :

- estimation de  $\gamma(f_1)$
  - traitement mono-fréquence
  - $P_1$  vecteurs sources estimés dont :
    - $P$  vecteurs sources vrais
    - $K_1$  vecteurs sources parasites.
- estimation de  $\gamma(f_M)$
  - traitement mono-fréquence
  - $P_M$  vecteurs sources estimés dont :
    - $P$  vecteurs sources vrais
    - $K_M$  vecteurs sources parasites.



Largeur minimale du spectre des signaux émis par les P sources

III-2- Raccordement des vrais vecteurs sources entre eux

Soient  $V_{ip}(f_m)$ ,  $V_{jp}(f_{m+1})$  et  $V_{kp}(f_{m+2})$  les vecteurs sources correspondant à la source p estimés respectivement aux fréquences  $f_m$ ,  $f_{m+1}$  et  $f_{m+2}$ . On rappelle que ces vecteurs sont de la forme :

$$V_{ip}(f_m) = (1 e^{-i2\pi f_m \tau_{2p}} \dots e^{-i2\pi f_m \tau_{Np}})$$

$$V_{jp}(f_{m+1}) = (1 e^{-i2\pi f_{m+1} \tau_{2p}} \dots e^{-i2\pi f_{m+1} \tau_{Np}})$$

$$V_{kp}(f_{m+2}) = (1 e^{-i2\pi f_{m+2} \tau_{2p}} \dots e^{-i2\pi f_{m+2} \tau_{Np}})$$

où :  $1 \leq i \leq P_m$ ,  $1 \leq j \leq P_{m+1}$ ,  $1 \leq k \leq P_{m+2}$

Pour les valeurs exactes des vecteurs  $V_{ip}(f_m)$ ,  $V_{jp}(f_{m+1})$  et  $V_{kp}(f_{m+2})$  les produits scalaires  $(V_{ip}(f_m), V_{jp}(f_{m+1}))$  et  $(V_{jp}(f_{m+1}), V_{kp}(f_{m+2}))$  sont égaux. Dans le cas de valeurs estimées ces deux produits scalaires ne sont plus égaux mais très voisins. Cette propriété suggère de raccorder les vecteurs sources vrais de la façon suivante :

Pour les triplets de fréquences  $(f_m, f_{m+1}, f_{m+2})$ , m variant de 1 à M-2, on calcule les produits scalaires entre vecteurs sources  $(V_i(f_m), V_j(f_{m+1}))$ ,  $(V_j(f_{m+1}), V_k(f_{m+2}))$  et leur distance euclidienne  $d_{ijk}$  ( $1 \leq i \leq P_m$ ,  $1 \leq j \leq P_{m+1}$ ,  $1 \leq k \leq P_{m+2}$ ). On cherche ensuite l'ensemble des P plus petites distances. Si  $d_{ijk}$  appartient à cet ensemble on dit que les vecteurs  $V_i(f_m)$ ,  $V_j(f_{m+1})$  et  $V_k(f_{m+2})$  représentent l'évolution du même vecteur source  $V_p$  en fonction des trois fréquences  $f_m$ ,  $f_{m+1}$  et  $f_{m+2}$  et on relie ces vecteurs entre eux. On établit ainsi des chaînages entre les vecteurs sources trouvés aux différentes fréquences.

*Remarque* : Les vecteurs parasites étant décorrélés à cause de l'indépendance des trois matrices interspectrales  $\gamma(f_m)$ ,  $\gamma(f_{m+1})$ ,  $\gamma(f_{m+2})$ , sont éliminés par le procédé ci-dessus.

III - ESTIMATION DES TEMPS DE RETARD

III-1- Position du problème

L'analyse multifréquences donne l'expression de chaque vecteur source  $V_p$  en fonction de la fréquence  $f_m$  (m variant de 1 à M). Ceci se traduit, pour chaque capteur n, par un système surdéterminé de M équations à 2 inconnues de la forme

$$2\pi f_m \tau_{np} = \hat{\theta}_{np}(f_m) + k_{np} \cdot 2\pi \quad 1 \leq m \leq M \quad (4)$$

Les inconnues sont le retard  $\tau_{np}$  et la constante  $k_{np}$ .

*Remarque* : Le milieu étant supposé non dispersif, les déphasages sont des fonctions linéaires de la fréquence et par conséquent l'entier  $k_{np}$  est une constante.

On impose au déphasage  $\hat{\theta}_{np}(f_1)$  d'être compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Cette condition n'enlève rien à la généralité du système (4), le réajustement du déphasage étant réalisé par la constante  $k_{np}$ . Le traitement monofréquence ne fournissant que les valeurs principales des déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$ , il faut récupérer ces derniers avant de résoudre les N systèmes du type (4) pour chaque vecteur source  $V_p$ .

III-2- Récupération des déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$

On utilise un algorithme de déroulement de la phase ("unwrapping") [2]. Son principe repose sur la détection des discontinuités de la valeur principale des déphasages dues aux opérations modulo  $2\pi$ . On calcule la différence entre les valeurs principales pour deux fréquences successives  $f_m$  et  $f_{m+1}$ . Si cette différence est supérieure à un certain seuil  $S_0$ , on décide qu'il existe une discontinuité. On ajoute alors  $2\pi$  à toutes les valeurs principales correspondant aux fréquences strictement supérieures à  $f_m$ . On recommence la même opération pour le couple de fréquences  $(f_{m+1}, f_{m+2})$  jusqu'à  $(f_{M-1}, f_M)$ .

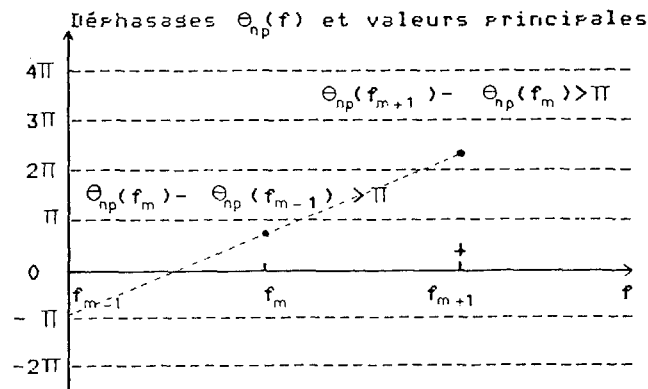
La partie délicate de l'algorithme est le positionnement du seuil  $S_0$  de façon à obtenir une bonne détection des discontinuités. On rappelle que la différence entre les déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_{m+1})$  et  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$  est égale à

$$\hat{\theta}_{np}(f_{m+1}) - \hat{\theta}_{np}(f_m) = 2\pi \cdot \Delta f \cdot \tau_{np} \quad (5)$$

où

$$\Delta f = f_{m+1} - f_m$$

Il faut imposer une condition sur cette différence pour que des situations identiques à celle de la figure 1 ne se produisent pas.



Légende : • déphasages  
+ valeurs principales des déphasages

FIGURE 1

Dans le cas de la figure 1 il est impossible de trouver un seuil  $S_0$  tel que la différence entre les valeurs principales des déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_{m+1})$  et  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$  soit supérieur à  $S_0$  et la différence entre les valeurs principales des déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$  et  $\hat{\theta}_{np}(f_{m-1})$  soit inférieure à  $S_0$ .

Pour obtenir une détection correcte des discontinuités et par conséquent un algorithme performant, une solution consiste à imposer aux déphasages  $\hat{\theta}_{np}(f_{m+1})$  et  $\hat{\theta}_{np}(f_m)$  de vérifier l'inégalité suivante



$$|\theta_{np}(f_{m+1}) - \theta_{np}(f_m)| < \pi \quad (6)$$

On peut alors choisir un seuil  $S_0$  égal à  $\pi$ . La condition (6) fixe une limite à la méthode d'estimation des temps de retard. Il ne sera possible de déterminer que les retards vérifiant

$$|\tau_{np}| < \frac{1}{2\Delta f} \quad (7)$$

*Remarque* : la condition (7) n'est pas très contraignante en réalité car la méthode utilisée pour l'estimation de la matrice interspectrale (le périodogramme lissé) impose déjà aux temps de retard d'être relativement faibles.

III-3- Estimation des temps de retard

Pour chaque source  $p$  et chaque capteur  $n$  il faut résoudre le système (4)

$$2\pi f_m \tau_{np} = \theta_{np}(f_m) + k_{np} \cdot 2\pi \quad 1 \leq m \leq M$$

Ce système est équivalent à l'équation matricielle

$$AX = B$$

où

$$A = 2\pi \begin{bmatrix} f_1 & -1 \\ f_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ f_M & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \tau_{np} \\ k_{np} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \theta_{np}(f_1) \\ \theta_{np}(f_2) \\ \vdots \\ \theta_{np}(f_M) \end{bmatrix}$$

Les colonnes de la matrice  $A$  étant linéairement indépendantes, la matrice  $A^t \cdot A$  est inversible et la solution de l'équation précédente selon les moindres carrés est

$$X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B$$

la valeur du temps de retard  $\tau_{np}$  est alors donnée par la relation suivante :

$$\tau_{np} = \frac{M \sum_{i=1}^M f_i \cdot \theta_{np}(f_i) - \sum_{i=1}^M f_i \sum_{i=1}^M \theta_{np}(f_i)}{2\pi (M \sum_{i=1}^M f_i^2 - (\sum_{i=1}^M f_i)^2)} \quad (8)$$

En résolvant de cette façon les  $N \cdot P$  systèmes (4) on construit la matrice  $T$  des temps de retard à  $N$  lignes et  $P$  colonnes :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & \dots & \tau_{2P} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & \dots & \tau_{3P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tau_{N1} & \tau_{N2} & \tau_{N3} & \dots & \tau_{NP} \end{bmatrix}$$

III-4- Calcul du rang de la matrice  $T$  des temps de retard

On rappelle que les  $P$  sources et les  $N$  capteurs se trouvent dans un espace  $E$  de dimension  $d$  muni d'un référentiel  $R$  lié aux capteurs.

Dans un premier temps on établit une hypothèse sur la configuration physique des capteurs. Le capteur 1 est choisi comme origine de  $R$  et on suppose que les capteurs  $2, 3, \dots, d+1$  sont non coplanaires pour  $d=3$  et non colinéaires pour  $d=2$ . Les vecteurs colonnes 2 à  $d+1$  de la matrice  $X$  des positions relatives des capteurs sont linéairement indépendants et forment la base du référentiel  $R$ . La matrice  $X$  est alors de rang égal à  $d$ . La matrice  $T$  des temps de retards étant

égale à

$$T = X^t \cdot Y$$

on obtient l'inégalité suivante

$$\text{rang}(T) = \text{rang}(X^t \cdot Y) \leq \text{rang}(X^t) = d$$

On émet maintenant une deuxième hypothèse portant sur la configuration physique des sources, identique à celle sur les capteurs, en supposant que les  $d$  premières d'entre elles sont non coplanaires pour  $d=3$  et non colinéaires pour  $d=2$ . Les  $d$  premiers vecteurs colonnes de la matrice  $Y$  des directions relatives des sources sont alors linéairement indépendants et  $Y$  est de rang  $d$ . Nous allons montrer que cette deuxième condition permet de minorer le rang de  $T$ .

*Démonstration* : La matrice  $X$  peut s'écrire sous la forme suivante

$$X = [0 \ X_d \ X_r]$$

où  $0$  est le vecteur colonne nul,  $X_d$  la sous-matrice formée des  $d$  colonnes indépendantes de  $X$  et  $X_r$  la matrice formée des colonnes restantes de  $X$ .

La matrice  $T$  prend alors la forme suivante

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ X_d^t \cdot Y \\ X_r^t \cdot Y \end{bmatrix}$$

et son rang est supérieur ou égal au rang de la sous-matrice  $X_d^t \cdot Y$ .

Le problème revient à chercher le rang de la matrice  $X_d^t \cdot Y$ . L'espace nul associé à une matrice  $A$  est noté  $N(A)$ .

Montrons que les matrices  $X_d^t \cdot Y$  et  $Y$  ont le même espace nul associé :

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in E, \quad x \in N(Y) &\Rightarrow Y \cdot x = 0 \Rightarrow (X_d^t \cdot Y) \cdot x = 0 \\ \text{donc} \quad x &\in N(X_d^t \cdot Y) \end{aligned}$$

$$\text{soit } x \in E, \quad x \in N(X_d^t \cdot Y) \Rightarrow (X_d^t \cdot Y) \cdot x = 0$$

La matrice  $X_d^t$  est une matrice carrée d'ordre  $d \cdot d$  et de rang  $d$  et par conséquent elle est inversible on a donc :

$$\begin{aligned} Y \cdot x &= (X_d^t)^{-1} \cdot 0 \\ Y \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } x \in N(Y)$$

Des deux appartenances précédentes on déduit que

$$N(Y) = N(X_d^t \cdot Y)$$

cette égalité entre les deux espaces nuls entraîne l'égalité entre les rangs des deux matrices, en effet

$$\text{rang}(X_d^t \cdot Y) + N(X_d^t \cdot Y) = \text{nombre de colonnes de } X_d^t \cdot Y = P$$

$\text{rang}(Y) + N(Y) = \text{nombre de colonnes de } Y = P$  et comme  $N(X_d^t \cdot Y) = N(Y)$  on a forcément

$$\text{rang}(X_d^t \cdot Y) = \text{rang}(Y)$$

On vient de montrer que le rang de la matrice  $T$  est supérieur ou égal au rang de la matrice  $Y$  et vérifie donc

$$d \leq \text{rang}(T) \leq d$$

soit

$$\text{rang}(T) = d \quad (9)$$

IV - ESTIMATION DES DIRECTIONS RELATIVES DES SOURCES ET DES POSITIONS RELATIVES DES CAPTEURS [3]

IV-1- Estimation des directions relatives des sources

On suppose que les matrices X, Y et T sont de rang d. Les vecteurs colonnes de la matrice Y étant les directions normées des sources, les termes diagonaux du produit  $Y^t \cdot Y$  sont égaux à 1. La matrice T est décomposée suivant ses valeurs singulières et s'écrit

$$T = U \cdot \Sigma \cdot V$$

la matrice U est la matrice d'ordre N\*N dont les colonnes sont N vecteurs propres de  $T \cdot T^t$ . La matrice V est la matrice d'ordre P\*P dont les lignes sont P vecteurs propres de  $T^t \cdot T$ . La matrice  $\Sigma$  est la matrice d'ordre N\*P définie par

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\Sigma_d$  est la matrice diagonale [ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ ] des valeurs singulières non nulles de T.

Soit  $V_d$  la sous-matrice d'ordre d x P formée des d premières lignes de V et  $U_d$  la sous-matrice d'ordre d x d formée des éléments 2 à d+1 des d premières colonnes de U.

$$X_d^t \cdot Y = U_d \cdot \Sigma_d \cdot V_d$$

où  $X_d^t$  est la matrice inversible définie au paragraphe III-4- d'où

$$Y = [(X_d^t)^{-1} \cdot U_d \cdot \Sigma_d] \cdot V_d$$

En posant

$$D = [(X_d^t)^{-1} \cdot U_d \cdot \Sigma_d]^t [(X_d^t)^{-1} \cdot U_d \cdot \Sigma_d] \quad (10)$$

$$Y^t \cdot Y = V_d^t \cdot D \cdot V_d$$

Il est possible de déterminer la matrice D, sous certaines conditions, en utilisant le fait que les termes diagonaux de la matrice  $Y^t \cdot Y$  sont égaux à 1.

On pose

$$V_d(i,j) = v_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq P \end{matrix}$$

$$D(i,j) = d_{ij} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i,j \leq d$$

$$v_i = i\text{ème ligne de } V_d$$

L'équation matricielle (10) fournit le système linéaire de P équations à  $d \cdot (d+1)/2$  inconnues suivant

$$1 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=i}^d d_{ij} (2 - \delta_{ij}) \cdot v_{ik} \cdot v_{jk} \quad (11)$$

avec  $1 \leq k \leq P$  et où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Soit  $w_{ij}$  le vecteur de dimension d définit par

$$w_{ij} = \mathcal{F}(v_i, v_j) (2 - \delta_{ij})$$

où  $\mathcal{F}(v_i, v_j)$  est le vecteur  $\{v_{i1} \cdot v_{j1}, \dots, v_{ip} \cdot v_{jp}\}$ .

Le système (11) possède une solution unique si et seulement si :

1. Le nombre d'équations est supérieur ou égal au nombre d'inconnues.
2. Les vecteurs  $w_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq d$ , sont linéairement indépendants.

La première condition est réalisée si le nombre de sources est supérieur ou égal à  $d \cdot (d+1)/2$ , la deuxième condition est vérifiée par construction des vec-

teurs  $w_{ij}$ .

Dans ce cas il existe une matrice D unique satisfaisant à l'équation matricielle suivante

$$Y^t Y = V_d^t \cdot D \cdot V_d$$

On peut décomposer D sous la forme  $L^t \cdot L$  par la méthode de Choleski, la matrice L étant déterminée à une matrice unitaire près, et écrire

$$Y^t Y = (L \cdot V_d)^t \cdot (L \cdot V_d)$$

où on identifie Y à  $L \cdot V_d$ .

On vient de démontrer qu'il est possible de trouver la matrice des directions normées des sources mais seulement à une transformation unitaire près. C'est pourquoi on parle de "directions relatives".

IV-2- Estimation des positions relatives des capteurs

Quand les directions relatives des sources sont calculées, on estime les positions relatives des capteurs en résolvant l'équation matricielle (3). Cette dernière est équivalente à N systèmes linéaires de P équations à d inconnues  $x_{in}$  de la forme suivante

$$\tau_{nk} = \sum_{i=1}^d x_{in} \cdot y_{ik} \quad 1 \leq k \leq P \quad (12)$$

où  $x_{in} = X(i,n)$ .

V - AMELIORATION DE LA METHODE D'ESTIMATION DES DIRECTIONS RELATIVES DES SOURCES ET DES POSITIONS RELATIVES DES CAPTEURS.

La résolution de l'équation (3) s'avère pratiquement très sensible aux perturbations sur les temps de retard. Comme le rang de la matrice T vaut d en l'absence de bruit, la présence dans la matrice T de valeurs singulières significatives en nombre strictement supérieur à d révèle l'existence de retards mal estimés. La méthode prévoit dans ce cas la recherche automatique dans le tableau T d'une sous-matrice T' de rang d et déduite de T par suppression de certaines lignes. Le système (3) est alors résolu pour cette sous-matrice, ce qui détermine les directions des sources et les positions des capteurs sélectionnés. La connaissance des directions des sources permet enfin de calculer les positions des capteurs correspondant aux lignes supprimées de T.

VI - RESULTATS EXPERIMENTAUX

VI-1- Test de la méthode avec un réseau aléatoire de capteurs éclairé par des ondes planes

L'antenne est constituée de 20 capteurs omnidirectionnels aléatoirement répartis dans un carré dont le côté a pour longueur L. Les ondes planes sont émises par 5 sources ponctuelles situées dans le plan de l'antenne. Les signaux d'émission sont simulés de la façon suivante: On construit 5 bruits blancs échantillonnés en tirant 5 suites indépendantes de Ne nombres aléatoires suivant une loi gaussienne centrée. Ces 5 signaux, filtrés par un filtre numérique passe-bande, donnent 5 signaux indépendants à large bande. Le signal recueilli à la sortie de chaque capteur est obtenu en retardant correctement les signaux émis par les sources, en les sommant et en ajoutant un bruit blanc. Les bruits blancs additifs sur les 20 capteurs sont indépendants.

La célérité du milieu est égale à 1500 m/s et la





LOCALISATION DE SOURCES PONCTUELLES AVEC UNE ANTENNE DE GEOMETRIE INCONNUE

fréquence d'échantillonnage des signaux à 320 Hz.

a) Caractéristiques des 5 sources :

Elles émettent des signaux à large bande occupant le même domaine de fréquences délimité par Fmin et Fmax. La position géométrique des sources est définie par l'angle (gisement) des vecteurs d'onde avec l'axe défini par les deux premiers capteurs. Les caractéristiques sont regroupées dans le tableau suivant

| sources  | fmin(Fo) | Fmax(Fo) | gisement (Des) | SNR(dB) |
|----------|----------|----------|----------------|---------|
| source 1 | 0.2      | 0.4      | 40             | 15      |
| source 2 | 0.2      | 0.4      | 60             | 15      |
| source 3 | 0.2      | 0.4      | 70             | 15      |
| source 4 | 0.2      | 0.4      | 90             | 15      |
| source 5 | 0.2      | 0.4      | 110            | 15      |

b) Caractéristiques des 20 capteurs :

La longueur L du carré est égale à c/15 où c est la célérité du milieu.

c) Caractéristiques de l'estimation interspectrale et de l'analyse multi-fréquences :

Le nombre Ne d'échantillons temporels est égal à 8192. L'estimation des matrices interspectrales est effectuée avec le périodogramme lissé utilisant un BT de 71 (on lisse sur 71 échantillons fréquentiels autour de la fréquence d'analyse).

Le nombre de fréquences de l'analyse est égal à 10.

d) Résultats :

Tableaux donnant les erreurs d'estimation sur les directions des sources et sur les positions des capteurs.

Tableau 1 : Erreurs d'estimation sur les directions des sources en degrés

| SOURCE   | ERREUR |
|----------|--------|
| source 1 | 1.268  |
| source 2 | 0.816  |
| source 3 | 0.811  |
| source 4 | 1.532  |
| source 5 | 1.542  |

Tableau 2 : Erreurs d'estimation sur les positions des capteurs en nombre de fois la célérité du milieu

| CAPTEUR    | ERREUR | CAPTEUR    | ERREUR |
|------------|--------|------------|--------|
| capteur 1  | 0.0000 | capteur 11 | 0.0021 |
| capteur 2  | 0.0007 | capteur 12 | 0.0019 |
| capteur 3  | 0.0019 | capteur 13 | 0.0018 |
| capteur 4  | 0.0019 | capteur 14 | 0.0016 |
| capteur 5  | 0.0015 | capteur 15 | 0.0011 |
| capteur 6  | 0.0026 | capteur 16 | 0.0019 |
| capteur 7  | 0.0013 | capteur 17 | 0.0019 |
| capteur 8  | 0.0019 | capteur 18 | 0.0015 |
| capteur 9  | 0.0019 | capteur 19 | 0.0027 |
| capteur 10 | 0.0013 | capteur 20 | 0.0009 |

La Figure 2 illustre les résultats obtenus.

VI-2- Comparaison de la méthode avec celle du corrélateur pour l'estimation des temps de retard

En utilisant les mêmes caractéristiques des sources et des capteurs qu'au paragraphe précédent, on estime la fonction d'intercorrélation entre le signal issu du capteur 1 et le signal issu d'un capteur i. On estime les temps de retard aux pics de cette fonction donnée par la formule suivante

$$R_{y_i} (t) = \sum_{j=1}^P R_{sjsj} * \delta(t - D_j)$$

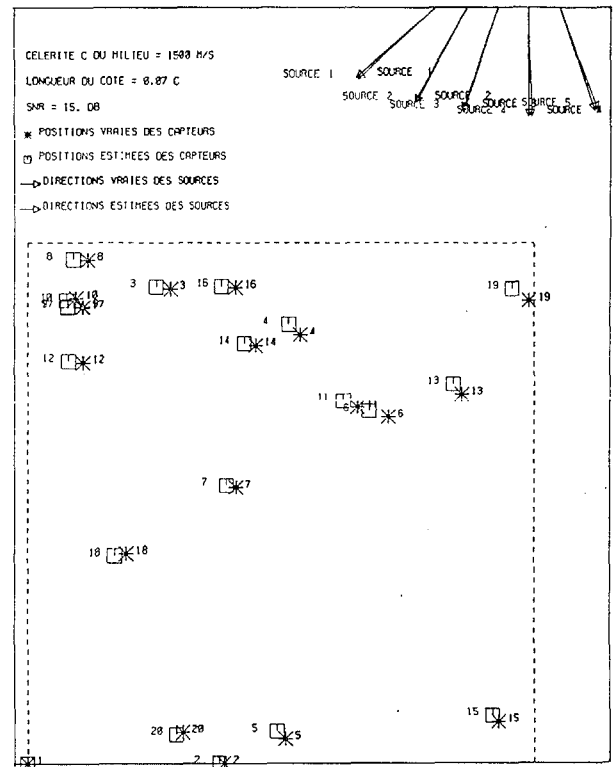


FIGURE 2

où  $R_{sjsj}$  est la fonction d'autocorrélation du signal émis par la source j,  $D_j$  est le retard du signal émis par la source j sur le capteur i par rapport au capteur 1.

Les intercorrélations sont estimées pour un temps d'observation  $T_{obs}$  égal à 8192 fois la période d'échantillonnage  $T_e$  soit 25.6 secondes.

Les fonctions d'intercorrélation représentées sur les figures 3 et 4 sont suréchantillonnées entre les instants  $-70 \cdot T_e$  et  $+70 \cdot T_e$ . La nouvelle période d'échantillonnage est égale à  $T_e/100$ .

c) Discussion des résultats obtenus :

L'intercorrélation entre les signaux issus des capteurs 1 et 2 ne permet pas de détecter les sources. Ceci est dû au fait que les deux capteurs sont à une distance faible l'un de l'autre (0.026 fois la célérité du milieu) ce qui implique des temps de retard très faibles. Par contre la méthode à haute résolution donne de bons résultats comme le témoigne le tableau suivant

| SOURCE   | RETARD VRAI | RETARD ESTIME |
|----------|-------------|---------------|
| source 1 | - 0179      | - 0190        |
| source 2 | - 0128      | - 0114        |
| source 3 | - 0088      | - 0089        |
| source 4 | 0000        | 0006          |
| source 5 | 0088        | 0093          |

L'intercorrélation entre les signaux issus des capteurs 1 et 19 permet de retrouver les sources 4 et 5. Le tableau suivant compare les résultats obtenus par les deux méthodes, retard 1 étant le retard estimé par la méthode à haute résolution et retard 2 celui estimé par l'intercorrélation

| SOURCE   | RETARD VRAI | RETARD 1 | RETARD 2   |
|----------|-------------|----------|------------|
| source 1 | -- 0887     | -- 0881  | non trouvé |
| source 2 | -- 0844     | -- 0838  | non trouvé |
| source 3 | -- 0783     | -- 0786  | non trouvé |
| source 4 | -- 0593     | -- 0593  | -- 0595    |
| source 5 | -- 0331     | -- 0329  | -- 0332    |

*Intercorrélation pour les capteurs 1 et 2*

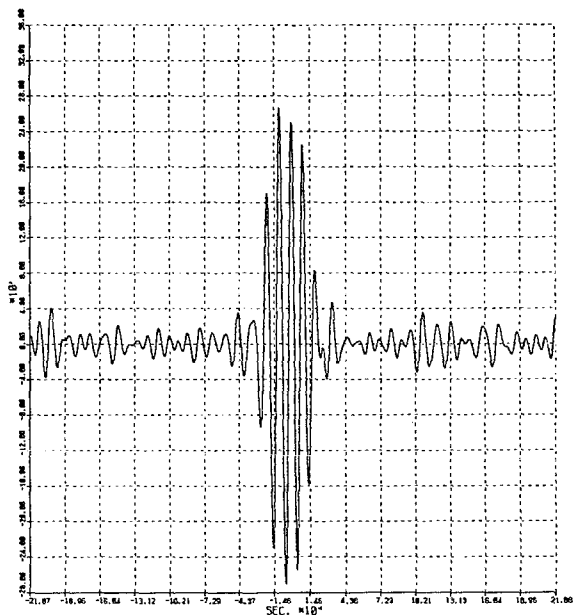


FIGURE 3

*Intercorrélation pour les capteurs 1 et 19*

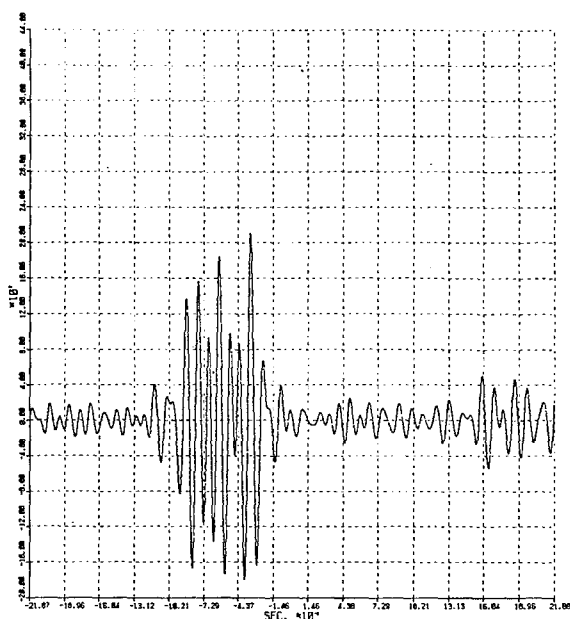


FIGURE 4

## VII - CONCLUSION

Les simulations montrent que la méthode présentée est supérieure aux méthodes classiques de corrélation temporelle pour l'estimation des temps de retard dans le cas de sources multiples.

La précision atteinte dans l'estimation des directions des sources et des positions des capteurs est très correcte (de l'ordre de 3%) avec un nombre de capteurs relativement faible.

L'idée nouvelle de géométrie inconnue de l'antenne de réception facilite la mise en place des capteurs et s'adapte particulièrement bien aux systèmes de localisation par langage de bouées passives.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] VEZZOSI G., NICOLAS P. : Séparation de fronts d'ondes corrélés. IX Colloque GRETSI, Nice (16-20 Mai 1983).
- [2] TRIBOLET J.M. : A New Phase Unwrapping Algorithm. IEEE ASSP Vol 25, April 1977.
- [3] BRANDEBURG W. : Measurement of azimuth and distance using arbitrary sensor configuration with unknown coordinates. ICASSP 1982.

