COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

EXTENSION DU CRITERE DE NEYMAN-PEARSON EN DETECTION D'HYPOTHESES MULTIPLES

B. PICINBONO G. VEZZOSI

Laboratoire des Signaux et Systèmes Ecole Supérieure d'Electricité 91190 GIF/YVETTE

RESUME

Le critère de Neyman-Pearson apparaît dans la détection de deux hypothèses quand les méthodes bayésiennes ne s'appliquent plus, soit parce que les coûts des décisions ne sont pas définis ou même comparables soit surtout parce que les probabilités a priori des deux hypothèses ne sont pas connues.

La question peut être élargie dans le cas d'hypothèses multiples pouvant être séparées en deux groupes dont les probabilités a priori ne sont pas connues.

Ceci s'applique tout particulièrement dans deux cas extrêmes suivants : l'hypothèse bruit seul (H_0) est simple, mais l'hypothèse signal H_1 peut se décomposer en un nombre fini d'hypothèses partielles, ce qui peut représenter la détection d'un signal de temps d'arrivée inconnu mais probabilisé ; l'hypothèse est simple, mais H_0 peut se décomposer, ce qui représente le cas d'un bruit à paramètres inconnus mais pro[illegible].

[illegible] problème sont présentées et on montre en particulier comment les stratégies de Neyman-Pearson moyennes ou conditionnelles se déduisent des stratégies de Bayes.

Les comparaisons des stratégies sont effectuées sur des exemples particuliers.

SUMMARY

The Neyman-Pearson strategy is used for the detection of two hypothesis when the bayesian methods cannot be used. That is the case when the costs of the decisions are not defined or when the a priori probabilities of the two hypotheses are unknown.

The problem can also be studied in the case of multiple hypotheses, which can splitted in two group with unknown a priori probabilities.

This can be applied in two particular cases : the hypothesis noise alone (H_0) is simple, but the hypothesis signal (H_1) can be decomposed in a finite number of partial hypotheses, and that is particularly the case of radar signal with unknown arrival time ; the other case is when H_0 is composite, which is the case of a noise with random parameters.

We study the most important methods of solving these problems, and we show particularly the connection between the bayesian strategy and a priori or conditional Neyman-Pearson strategies.

[illegible] these strategies is achieved on some particular examples.

EXTENSION DU CRITERE DE NEYMAN-PEARSON EN DETECTION D'HYPOTHESES MULTIPLES.

B. PICINBONO - G. VEZZOSI

I - INTRODUCTION

Sous sa forme la plus élémentaire, la théorie de la détection d'un signal dans un bruit se ramène à un *test entre deux hypothèses* (H_0 bruit seul ; H_1 signal plus bruit). [1]

Dans la théorie des tests de deux hypothèses le critère de Neyman-Pearson (N.P.) s'introduit lorsque les méthodes bayésiennes ne s'appliquent pas soit parceque les coûts correspondent aux situations H_0 et H_1 ne sont pas comparables ou même ne peuvent pas être définis, soit parce que les probabilités a priori des hypothèses en présence sont inconnues.

On est alors conduit à rechercher un test rendant maximum la *probabilité de détection* β pour une *probabilité de fausse alarme* α inférieure à une valeur donnée d'avance α_0. Le calcul conduit alors au test de N.P. fondé sur le *rapport de vraisemblance* qui est une statistique suffisante dans le choix entre deux hypothèses simples.

Pour de nombreuses raisons l'approche de N.P. nécessite d'être étendue au cas *d'hypothèses multiples* et nous examinons dans ce papier plus particulièrement les situations suivantes.

Supposons tout d'abord que H_1 (hypothèse signal) soit *composite* et décomposable en hypothèses $\{h_i\}$ de probabilités a priori $\{\pi_i\}$, les lois de l'observation sous ces hypothèses étant $\{p_i(x)\}$. Supposons par ailleurs que le problème de test ne consiste pas seulement à choisir entre H_0 et H_1 (détection pure), mais entre H_0 et l'une des hypothèses h_i (détection et classification).

Cette situation est une approche de celle bien connue en radar ou sonar, où sur une observation on doit non seulement détecter *l'existence* d'un signal mais son *temps d'arrivée*, c'est-à-dire la position de l'objet à détecter [2].

C'est également le cas des *communications digitales binaires* où le signal n'est pas toujours présent, et l'on doit décider entre trois hypothèses : H_0, pas de signal et h_1 ou h_2.

Lorsque les probabilités a priori de H_0 et H_1 sont connues, le problème est résolu par des *méthodes bayésiennes*. Si par contre ces probabilités sont inconnues, on peut introduire une probabilité de *classification correcte* β et chercher à la rendre maximum pour une valeur bornée de la probabilité de fausse alarme. C'est la première généralisation du critère de N.P. que nous étudierons.

Une autre situation opposée est également digne d'intérêt. Il peut arriver que H_0 (bruit seul) soit une *hypothèse composite*, ce qui est le cas lorsque le bruit comporte des paramètres aléatoires. On peut toujours appliquer à ce problème le critère de N.P. moyen, en réduisant H_0 à une hypothèse simple. Mais cette réduction peut être artificielle pour certains problèmes ou même impossible et on peut tenter de maximiser la probabilité de détection en imposant une borne à toutes les *probabilités de fausse alarme conditionnelles*. Le test obtenu sera appelé test de N.P. conditionnel (N.P.C.) dont nous présenterons brièvement la théorie et quelques propriétés [3].

II - DETECTION ET CLASSIFICATION D'HYPOTHESES

2.1. Notations de base

L'hypothèse H_0 est caractérisée par sa *probabilité a priori* π_0 et la *loi d'observation* $p_0(x)$ sous cette hypothèse.

L'hypothèse H_1 se décompose en n sous-hypothèses $[\pi_i, p_i(x)]$, et l'on a évidemment

$$(1) \qquad \tilde{\pi}_1 = 1 - \pi_0$$

où $\tilde{\pi}_1$ est la probabilité a priori de H_1 et

$$(2) \qquad \tilde{p}_1(x) = \sum_1^n \pi'_i \, p_i(x),$$

où $\tilde{p}_1(x)$ est la loi d'observation sous H_1, les $\{\pi'_i\}$ étant les probabilités conditionnelles des h_i sous H_1, définies par

$$(3) \qquad \pi'_i = Pr[h_i|H_1] = \frac{\pi_i}{1-\pi_0}$$

Le problème consiste à trouver une fonction test $\Phi(x)$, c'est-à-dire un ensemble de (n+1) fonctions $\{\Phi_i(x)\}$ ne prenant que les valeurs o ou 1 et telles que $\forall$ x

$$(4) \qquad \sum_0^n \Phi_i(x) = 1$$

d'où il résulte

$$(5) \qquad \Phi_i(x)\,\Phi_j(x) = o, \qquad i \neq j$$

Ces fonctions $\{\Phi_i(x)\}$ réalisent une partition de l'espace d'observation en (n+1) éléments, qui sont les régions de décision de toutes les hypothèses.

2.2. Stratégie bayésienne optimale

Supposons connues toutes les quantités $[\pi_i, p_i(x)]$. La probabilité de décision correcte s'écrit évidemment

$$(6) \qquad P_c = \int \sum_0^n \pi_i \, \Phi_i(x) \, p_i(x) \, dx$$

et la *solution de Bayes* $\Phi^B[\{\pi_i\}_0^n]$ est celle rendant maximum cette expression.

Il est bien connu que cette solution s'écrit

(7) $\Phi_i^B(x) = 1$ pour i rend maximum $\pi_j\ p_j(x)$

Si pour certaines valeurs de x il existe plusieurs entiers i_1, i_2, ... rendant maximum $\pi_j\ p_j(x)$, on choisira pour i l'un quelconque de ces entiers. Ceci signifie qu'il existe une *zone d'indifférence* dans le choix bayésien entre les hypothèses h_{i_1}, h_{i_2}, ...

Pour introduire le critère de N.P. il est commode de définir les probabilités de fausse alarme α et de classification correcte β.

La probabilité de *fausse alarme* est définie par

(8) $$\alpha = 1 - \int \Phi_o\ p_o(x)\ dx = \int \sum_1^n{}_i\ \Phi_i(x)\ p_o(x)\ dx$$

et celle de *classification correcte* est l'analogue de P_c limitée au cas des hypothèses h_1, h_2, ..., h_n, d'où

(9) $$\beta = \int \sum_1^n{}_i\ \pi'_i\ \Phi_i(x)\ p_i(x)\ dx$$

où les π'_i sont données par l'Eq. (3).

On peut alors simplement montrer que

(10) $$P_c = \pi_o + (1 - \pi_o)\ [\beta - k\ \alpha]$$

avec

(11) $$k = \frac{\pi_o}{1 - \pi_o}$$

π_o étant la probabilité a priori de l'hypothèse H_o. On peut donc tout aussi bien écrire la solution de Bayes par les deux notations

(12) $$\Phi^B\ |\{\pi_i\}_o^n| \quad \text{ou} \quad \Phi_k^B\ |\{\pi'_i\}_1^n|$$

2.3. Stratégie N.P. optimale

Cette notation nous conduit directement au critère de N.P. Supposons que π_o, donc k, ne soit pas connu. On peut alors chercher la fonction test $\Phi^{NP}(x)$ telle que β soit maximum pour α satisfaisant à

(13) $$\alpha \leq \alpha_o$$

Sans entrer dans les détails nous allons indiquer le fil conducteur de la solution de ce problème.

Soit C_{α_o} la classe des tests Φ définie par

(14) $$\Phi \in C_{\alpha_o} \longleftrightarrow \alpha[\Phi] \leqslant \alpha_o$$

Posons alors

(15) $$a(k) = \alpha(\Phi_k^B\ [\{\pi'_i\}_1^n])$$

Il est aisé de voir que l'équation

(16) $$a(k) = \alpha_o$$

a une solution unique. En effet posons

(17) $$f(x) = \max_{i:1,n}\ \pi'_i\ p_i(x).$$

Dans la solution bayésienne Φ^B la région de l'hypothèse H_o est définie, d'après (7) par

$$\Phi_o(x) = 1 \quad \text{si} \quad \pi_o\ p_o(x) \geq f(x)$$

ou encore

(18) $$B(x) = \frac{p_o(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{\pi_o} = \frac{1 + k}{k},$$

Il en résulte que a(k) peut s'écrire

(19) $$a(k) = \Pr\ [B(x) \leqslant \frac{1 + k}{k}\ |\ H_o]$$

qui est une fonction de répartition de la v.a. B ce qui prouve que $\forall\ \alpha_o$ il existe un seul k_o satisfaisant à $a(k_o) = \alpha_o$.

On peut alors écrire, d'après la propriété d'optimalité du test de Bayes et d'après (10) que $\forall\ \Phi$

(20) $$Q(\Phi) = \beta(\Phi) - k_o\ \alpha(\Phi) \leqslant \beta(\Phi_{k_o}^B) - k_o\ \alpha(\Phi_{k_o}^B)$$

Appliquant cette inégalité à la classe C_{α_o}, en utilisant l'Eq. (14), il apparait que $\forall\ \Phi \in C_{\alpha_o}$

(21) $$\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi_{k_o}^B)$$

ce qui montre

(22) $$\Phi^{NP} = \Phi_{k_o}^B\ [\{\pi'_i\}_1^n]$$

Ainsi la solution de N.P. est la solution de Bayes calculée pour la valeur k_o issue de la donnée de la fausse alarme α_o par l'Eq. (16).

[illegible] résumer [illegible] suivante :

(a) $\Phi_c^{NP}(x) = 1$ si $B(x) \geq s(\alpha_o)$

où $s(\alpha_o)$ est un seuil déterminé par α_o

(b) si $\Phi_o^{NP}(x) = o$,

$\Phi_i^{NP}(x) = 1$, si i rend maximum $\pi'_j\ p_j(x)$

2.4. Stratégie N.P. avec détection préalable [2]

On pourrait penser que le problème traité ci-dessus peut se décomposer en deux parties :

a)- Tester H_o contre H_1 (détection) b)- Dans le cas d'acceptation de H_1, choisir h_i, i : 1 à n (classification).

Le premier problème peut se traiter avec le critère de N.P. et conduit à comparer un rapport de vraisemblance L(x) à un seuil. Le second se traite par une méthode bayésienne. La fonction L(x) est évidemment définie par

$$L(x) = \frac{p_0(x)}{\tilde{p}_1(x)}$$

où $\tilde{p}_1(x)$ est donnée par l'Eq. (2).

La solution s'écrit donc

(a') $\quad \phi_0^{NPD}(x) = 1 \quad$ si $\; L(x) \geq s(\alpha_0)$

où $s(\alpha_0)$ est défini par α_0

(b') $\quad$ Si $\quad \phi_0^{NPD}(x) = o,$

$\phi_0^{NPD}(x) = 1$ si i rend maximum $\pi'_j p_j(x)$

Il est donc intéressant d'évaluer et de comparer les performances des deux méthodes (2.3) et (2.4)

2.5. Comparaison des deux dernières procédures

Les deux procédures (NP optimale, N.P.O., et N.P. avec détection préalable, N.P.D.P.) ne diffèrent que par le domaine de non détection, ou de décision de l'hypothèse H_0. Dans la solution N.P. optimale le choix de H_0 se fait en comparant B(x), Eq. (18) à un seuil, et dans celle avec détection préalable c'est le rapport de vraisemblance L(x) qui est utilisé.

L'idée de séparer l'opération complète en deux temps peut sembler correspondre à une pratique expérimentale, la phase de détection correspondant à une phase d'attente, avant de mettre en oeuvre une procédure de classification.

Toutefois cette séparation peut tout aussi bien se faire dans la solution de N.P.O., en effectuant sur l'observation un choix préliminaire sur H_0. La structure de B(x) montre seulement que ce choix isolé n'est pas un test d'hypothèse optimal.

Il pourrait apparaître intéressant de comparer les performances de ces méthodes.

Pour faire cette comparaison, on peut généraliser la notion de courbes caractéristiques opérationnelles de réception, (C.O.R.) qui présentent

(23) $\quad \beta = f\,[\alpha$; données du problème$]$.

Il est bien évident que pour α donné, $\beta_{D.P.} < \beta_0$, en raison du caractère optimal de la solution N.P.O. Mais il est intéressant d'évaluer la différence sur un exemple particulier tiré du problème des communications binaires digitales.

Supposons qu'en plus des symboles binaires 1 ou 2 il y ait des cas de probabilité inconnue ou aucun symbole n'est transmis (hypothèse H_0).

Les données du problème sont donc $p_0(x)$, $p_1(x)$ et $p_2(x)$, loi de l'observation sous les 3 hypothèses et π'_1, $\pi'_2 = 1 - \pi'_1$ probabilités conditionnelles des symboles 1 et 2 quand ils sont émis.

Les fonctions f(x) et $\tilde{p}(x)$ sont définies par les Eqs. (17) et (2), soit

(24) $\quad f(x) = \text{Max}\,[\pi'_1\, p_1(x),\ (1 - \pi'_1)\, p_2(x)]$

(25) $\quad \tilde{p}(x) = \pi'_1\, p_2(x) + \pi'_2\, p_2(x)$

Il s'agit alors de tracer les courbes

(26) $\quad \beta = f[\alpha\ ;\ \pi'_1,\ p_0,\ p_1,\ p_2]$.

Ce problème étant trop général, nous allons nous limiter au cas de signaux antipodaux en présence de bruit blanc gaussien. En appelant $g_\sigma(x)$ une loi de Gauss centrée, unidimensionnelle et de variance σ, on a

(27) $\quad p_0(x) = g_\sigma(x)\ ;\ p_{\substack{1\\2}}(x) = g_\sigma(x - s_{\substack{1\\2}})$.

Après un calcul qui ne présente guère de difficultés, on peut montrer que si $s_1 = - s_2$, c'est-à-dire si les signaux sont *antipodaux*, les deux méthodes sont *rigoureusement équivalentes*.

Par contre si $s_1 \neq - s_2$, la méthode N.P.D.P. apparaît sous optimale par rapport à la méthode N.P.O. mais la différence est tellement faible que l'on peut encore les considérer comme pratiquement équivalentes.

Il conviendrait de compliquer le modèle, en choisissant par exemple des *signaux orthogonaux* pour évaluer d'éventuelles différences entre les deux solutions.

III - DETECTION DANS UN BRUIT A PARAMETRES ALEATOIRES

3.1. Notations de base

Ce problème est exactement symétrique de celui traité au paragraphe précédent. Nous suivons le même déroulement, en simplifiant l'exposé.

L'hypothèse H_1 est supposée simple et caractérisée par π_1, $p_1(x)$.

L'hypothèse H_0 est supposée composite, et représente un bruit comprenant un paramètre aléatoire Γ. Soit $p(\gamma)$ la loi a priori de ce paramètre et $p_0(x, \gamma)$ la loi conditionnelle de l'observation, dans H_0 et pour γ donné.

Comme il s'agit d'un test *entre deux hypothè-*

ses, la fonction test se réduit à $\Phi = \Phi_1(x)$, puisque $\Phi_o = 1 - \Phi_1(x)$.

3.2. Stratégie bayésienne optimale

L'expression (6) devient

$$P_c = (1 - \pi_1) + \int \Phi(x)[\pi_1 \, p_1(x) - (1 - \pi_1) \, p_o(x)] \, dx \tag{28}$$

avec évidemment

$$p_o(x) = \int p_o(x, \gamma) \, p(\gamma) \, d\gamma. \tag{29}$$

En introduisant la probabilité de détection β et de fausse alarme moyenne $\bar{\alpha}$ définies par

$$\beta = \int \Phi(x) \, p_1(x) \, dx \tag{30}$$

$$\bar{\alpha} = \int \Phi(x) \, p_o(x) \, dx \tag{31}$$

on voit aisément que rendre maximum Pc revient à rendre maximum $\beta - k\,\bar{\alpha}$, avec $k = (1 - \pi_1)/\pi_1$.

Ainsi la stratégie de Bayes est caractérisée par la fonction test $\Phi^B_{k,\, p(\gamma)}$ telle que

$$\Phi^B_{k,\, p(\gamma)} = 1 \quad \text{si } p_1(x) > k \int p_o(x, \gamma) \, p(\gamma) \, d\gamma \tag{32}$$

3.3. Stratégie de N.P. moyen

Supposons π_1 inconnu, et $p(\gamma)$ connu. On peut alors rendre β maximum pour $\bar{\alpha}$ donné, et la solution s'obtient comme précédemment. On trouve alors

$$\Phi^{NPM}_{\bar{\alpha},\, p(\gamma)} = \Phi^B_{k,\, p(\gamma)} \tag{33}$$

où k est la solution unique de l'équation

$$\bar{\alpha}\,[\Phi^B_{k,\, p(\gamma)}] = \alpha. \tag{34}$$

3.4. Stratégie de N.P. conditionnel

Supposons maintenant qu'on veuille s'affranchir de la connaissance de $p(\gamma)$ pour la fausse alarme.

On peut alors chercher le test rendant β maximum pour

$$\alpha(\Phi, \gamma) = \int \Phi(x) \, p_o(x, \gamma) \, d \leq \alpha, \tag{35}$$

ce qui signifie que la *probabilité de f.a. conditionnelle* est maintenant bornée.

L'existence de ce test n'est pas assurée, mais indiquons brièvement le fil du raisonnement [3]. Soit C_α la classe des tests vérifiant

$$\Phi \in C_\alpha \leftrightarrow \alpha(\Phi, \gamma) \leq \alpha \quad \forall \gamma \tag{36}$$

Soit k et $q(\gamma)$ le scalaire et la loi de probabilité qui, s'ils existent, vérifient

$$\bar{\alpha}[\Phi^B_{k,\, q(\gamma)}] = \alpha \tag{37}$$

et posons

$$\Phi^* = \Phi^B_{k,\, q(\gamma)}.$$

En vertu des propriétés du test de Bayes on a pour tout Φ

$$\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi^*) + k\,[\bar{\alpha}(\Phi) - \bar{\alpha}(\Phi^*)] \tag{38}$$

Si de plus $\Phi \in C_\alpha$, $\alpha(\Phi, \gamma) \leq \alpha = \bar{\alpha}(\Phi^*)$, d'où en moyennant, $\bar{\alpha}(\Phi) \leq \alpha(\Phi^*)$. On en déduit que $\forall \ \Phi \in C_\alpha$,

$$\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi^*) \tag{39}$$

et Φ^* est le test cherché. D'après (32) il s'écrit

$$\Phi^* = 1 \quad \text{si } p_1(x) > k \int p_o(x, \gamma) \, q(\gamma) \, d\gamma \tag{40}$$

où k et $q(\gamma)$ sont déduits de (37)

L'existence de ces solutions n'est pas assurée dans le cas général.[3]. Toutefois on peut montrer que le couple $[k, q(\gamma)]$ existe si la paramètre prend ses valeurs dans un ensemble fini.

Comme précédemment il est intéressant d'envisager des cas particuliers pour examiner comment s'appliquent ces résultats.

3.5. Comparaison des stratégies sur des exemples particuliers

Exemple 1 :

Soit une suite de n v.a. X_i, indépendantes, gaussiennes, de variance σ^2, centrées dans l'hypothèse H_1 et de moyennes $\{S_i\}$ ou $\{-S_i\}$ dans H_o.

Le test entre H_o et H_1 admet un résumé exhaustif $Y = \Sigma\, X_i\, S_i/\sigma^2$, et le problème se réduit donc au suivant

$H_1 \qquad p_1(y) = N(o, d) \quad$ (loi normale)

$H_o \qquad p_o(y, 1) = N(-d^2, d)$

$\qquad\quad p_o(y, 2) = N(+d^2, d)$

avec $d^2 = \Sigma\, s_i^2/\sigma^2$.

Dans la stratégie N.P.C. il faut maximiser $\beta(\Phi)$ pour $\alpha_1(\Phi) \leq \alpha$ et $\alpha_2(\Phi) \leq \alpha$.

On peut voir assez aisément que la symétrie du problème impose que la loi q donne une probabilité $\frac{1}{2}$ aux deux situations 1 et 2, et le test N.P.C. $\Phi(y)$ vaut 1 si

$$2\exp - \frac{y^2}{2d^2} \gtrless k\,[\exp - \frac{1}{2}(\frac{y}{d} + d)^2 + \exp \frac{1}{2}(\frac{y}{d} - d)^2] \tag{41}$$

ou encore

(41') $\quad \text{Chy} < \frac{1}{k} e^{d^2/2}$

Ainsi le domaine de décision de l'hypothèse H_1 est du type $|y| \le s$. C'est pourquoi les probabilités de fausse alarme conditionnelles, évidemment égales, et de détection se calculent à l'aide de la fonction erreur.

Pour comparer ce test à celui de N.P. moyen il faut supposer connues les probabilités p_1 et p_2 des deux composantes de l'hypothèse H_0. Nous pouvons donc calculer la probabilité de f.a. moyenne

(42) $\quad \bar{\alpha}(\Phi) = p_1\, \alpha_1(\Phi) + p_2\, \alpha_2(\Phi)$

Par un calcul tout à fait similaire on trouve que le test N.P.M. s'écrit alors

(43) $\quad \Phi = 1 \text{ si } \left|y - \frac{1}{2} \text{Log}(p_1/p_2)\right| < s,$

ce qui permet évidemment à l'aide de la fonction erreur de calculer $\alpha_1(\Phi)$, $\alpha_2(\Phi)$, $\bar{\alpha}(\Phi)$ et $\beta(\Phi)$.

L'examen de (43) montre que si $p_1 = p_2$, la région de décision de l'hypothèse H_1 est encore de type $|y| \le s$, et les stratégies N.P.M. et N.P.C. sont identiques.

On ne peut trouver de différences que pour $p_1 \neq p_2$ et nous prendrons le cas particulier ou $p_1 = 10^{-2}$ et $p_2 = 1 - 10^{-2}$. En supposant de plus $d = 5$ on peut aisément obtenir les résultats suivants.

Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 10^{-5} = \bar{\alpha}$, on calcule $\beta^{NPC} = 0{,}53$.

Si on suppose $\text{Max}\,(\alpha_1, \alpha_2) = 10^{-5}$, on obtient $\bar{\alpha} \approx 10^{-7}$ et $\beta^{NPM} = 0{,}20$, ce qui montre l'avantage de la stratégie N.P.C.

Par contre si on impose $\bar{\alpha} = 10^{-5}$, on déduit $\beta^{NPM} = 0{,}69$, mais ceci conduit à $\text{Max}\,(\alpha_1 \alpha_2) \approx 3.10^{-4}$

D'autres exemples plus complets seront publiés ultérieurement.

Exemple 2 :

Soit (X_i) $i = 1, \ldots, n$ une suite de n v.a. gaussiennes indépendantes de moyenne connue (S_i) $i = 1, \ldots, n$ et de variance unité dans l'hypothèse H_1, et centrées et de variance inconnue $a \in (o, +\infty)$ dans l'hypothèse H_0. Cette variance représente le paramètre γ utilisé ci-dessus, on a donc

$$H_1 \quad X_i : N(s_i, 1)$$

$$H_0 \quad X_i : N(o, \sqrt{a}) \, .$$

On recherche le test Φ qui maximise la probabilité de détection :

(44) $$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \Phi(x) \exp - \frac{\sum_{1}^{n} {}_i (x_i - s_i)^2}{2} \, dx$$

et satisfait la conditions

(45) $$\alpha(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \, \frac{1}{a^{n/2}} \int \Phi(x) \exp - \frac{\sum_{1}^{n} {}_i \, x_i^2}{2a} \, da \le \alpha$$

$$\forall \, a \in (o, +\infty)$$

Dans cet exemple l'espace paramétrique n'est pas compact. Cependant on peut montrer que si $\alpha \le \frac{1}{2}$, la loi Q existe, et est concentrée en un point a_o de l'intervalle $(o, +\infty)$, de sorte que le test optimal a la structure suivante:

(46) $$\frac{\exp - \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} {}_i (x_i - s_i)^2}{\frac{1}{a_o^{n/2}} \exp - \frac{1}{2a_o} \sum_{1}^{n} {}_i \, x_i^2} \ \underset{H_1}{\overset{H_0}{\lessgtr}} \ t$$

où les constantes a_o et t s'obtiennent comme les solutions des équations non linéaires :

$$\alpha(a_o) = \alpha$$

$$\left(\frac{d\alpha}{da}\right)_{a_o} = o$$

la seconde équation provenant de ce que la loi est concentrée en un point a_o.

D'autre part, on sait que si dans le problème précédent on se limite à la classe des tests qui satisfont la contrainte avec une égalité, le test optimal est celui de Student

$$\frac{\Sigma_i \, x_i \, s_i}{\sqrt{\Sigma_i \, x_i^2}} \ \lessgtr \ k \, .$$

Il est intéressant de comparer le test optimal N.P.C. avec le test de Student. Les calculs s'effectuent aisément et montrent que dans certaines conditions la supériorité du test optimal N.P.C. sur le test de Student peut être considérable. Par exemple, pour $n = 3$ $d = \sqrt{\Sigma_i \, s_i^2} = 20$ et $\alpha = 10^{-4}$, la probabilité de détection du test optimal N.P.C. est déjà de 0,4 alors qu'elle n'est encore que de 0,07 pour le test de Student.

REFERENCES

|1| H.L. VAN TREES : Detection, Estimation and Modulation Theory. Wiley, New York, 1968.

|2| P.Y. ARQUES, O. MACCHI, G. VEZZOSI : Trois procédures de détection estimation simulatanées d'un signal. Ann. Télécomm. 28, 11, Nov. 1973, p. 459.

|3| G. VEZZOSI : Thèse de Doctorat d'Etat. A paraître.

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL
ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75

ASPECTS D'UN MODELE DISCRETISE DE L'EXTRACTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN NOYE DANS UN BRUIT GAUSSIEN

Denis de BRUCQ - Maitre de Conférences

Université de Rouen - Faculté des Sciences et des Techniques - 76130 Mont-Saint-Aignan

RESUME

Un résumé exhaustif calc·• able numériquement de façon récursive est présenté pour le test entre deux hypothèses. Le signal et le bruit satisfont chacun des systèmes différentiels stochastiques. L'observation est également bruitée. La méthode consiste à estimer le bruit puis à estimer le signal et le bruit suivant les techniques du filtrage linéaire.

SUMMARY

A recursively-calculable sufficient statistic is set out to test between two hypotheses. The signal and the noise satisfy cach stochastic differential equations. Noisely observation is observable uniquely. The method consist of estimate the noise and then of estimate the signal plus noise by linear filtering methods.