

N° d'ordre : 3651

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de : ***DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I***

Mention : Mathématiques et applications

par

Nicolas Papadakis

Équipe d'accueil : VISTA (IRISA, RENNES)

École doctorale : Mathématiques, Informatique, Signal, Électronique et Télécommunications

Composante Universitaire : IFSIC, Université de Rennes 1

Titre de la thèse :

**Assimilation de données images :
application au suivi de courbes et de champs de vecteurs**

Soutenue le 7 novembre 2007, devant la commission d'examen

Composition du jury :

M.	Vicent	CASELLES	Rapporteurs
M.	François-Xavier	LE DIMET	
Me.	Isabelle	HERLIN	Examineurs
M.	Etienne	MÉMIN	
M.	Patrick	PÉREZ	
M.	Jean	PONCE	

A l'école, quand je suis arrivé, les copains étaient tous déjà là et ils avaient l'air bien embêtés, sauf Agnan, le chouchou de la maîtresse, qui est toujours premier et qui aime bien les compositions.

- Moi, a dit Eudes, mon grand frère m'a raconté que quand il allait à l'école, il écrivait les réponses à la maison sur des petits bouts de papier qu'il cachait dans ses poches.

- Et en arithmétique, qu'est ce qu'il faisait ? a demandé Clotaire.

- Il était dernier a répondu Eudes.

La composition d'arithmétique, Histoires Inédites du Petit Nicolas, Vol 2, 1959-1965, Goscinny et Sempé.

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier Vicent Caselles et François-Xavier Le Dimet, pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse et avoir pris le temps de réaliser une analyse approfondie et constructive du document. Je remercie également mes examinateurs Isabelle Herlin et Patrick Pérez ainsi que le président du jury, Jean Ponce. Mes plus profonds égards vont ensuite à Etienne Mémin, mon directeur de thèse tout aussi passionné que passionnant. Ces trois années de travail commun ont été un réel plaisir, et la qualité de son engagement et de son encadrement sont pour moi un exemple à suivre.

Je remercie par la même occasion l'ensemble des personnes avec qui j'ai pu travailler au cours de cette thèse et plus particulièrement Patrick Héas, Thomas Corpetti, Nicolas Gengembre, Juan D'adamo et Guillermo Artana. Je n'oublie pas non plus l'ensemble des (parfois ex) membres de l'équipe VISTA, toujours prêts à donner de précieux conseils : Charles, Jean-Pierre, Patrick B., Patrick P., Yvan, Frédérique, ainsi que les "anciens" thésards : Gwenaëlle, Thomas V., Thomas B., Anne, Vincent, Jérôme, Elise. Je remercie également la dernière génération de thésards : Aurélie, Alex, Thierry, Emilie, Adrien, Christophe et Cécile pour avoir relu ce manuscrit et aidé à préparer la soutenance.

Viennent ensuite des remerciements plus personnels. Merci à Huguette pour sa disponibilité et ses coups de gueules. Merci à Thomas B. pour les repas et les week ends. Merci à Anne pour sa joie de vivre. Merci à Vinz pour le séjour en Italie. Merci à Jérôme pour son savoir. Merci à Alain pour la Saint-Patrick. Merci à Pat pour ses idées révolutionnaires, à Emilie pour le ficus que j'oublie d'arroser, à Jean, Gaïa et Léo pour m'avoir appris à apprécier les repas sans viande. Merci à Simon et Gaël pour les nombreuses pauses travail sur le balcon.

Je pense évidemment à la famille. Merci au Yey pour tout ce qu'il est, à Nanard et Tatal pour le goût de la logique, leur soutien permanent et tout ce qu'ils ont fait pour moi qui ne peut être écrit en une phrase, à Mamie Momone et Papy Joe pour leur patience (il en faut pour tout supporter) et leur hospitalité et à Mamie Doddy pour m'avoir transmis son amour, son vécu et ses valeurs morales.

Merci à la bande de LH : God pour ses blagues "l'amant-table", Baptiste pour les parties de Trivial Poursuite, Jacko pour sa ponctualité et ses défaites à Tobal2, Anaïs pour sa bonne humeur contagieuse, Guile pour les soirées caves et le Svink, Xav et Céline pour les soirées parisiennes.

Un grand merci à Pierre R. pour la pêche à la sèche, les férias et le voyage au 日本. Merci à Bernard Brochet pour ses précieux conseils et préceptes.

Merci également à Pierrô pour m'avoir montré qu'il y avait plus bordélique que moi. Merci à Christelle pour ses piques et son amitié.

Merci à Guille et Vivi pour leur accueil en Argentine, à Alfio pour le choclo et les parillas, à Paula pour pour m'avoir ouvert au tango, appris l'espagnol et accueilli à Lisbonne.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de la communauté crevardienne insaienne rouennaise, désormais dispersée aux quatre coins de France, qui perdure encore et toujours. Merci à mes 2+2 colloqs de la rue Sarail : Joy et Laurie pour leur profonde amitié, leur soutien, les parties de cartes

et tout le reste, Mat pour son esprit, sa patience et tous les bons moments partagés et Alexeï pour sa passion et son intérêt pour tout. Merci à G-Rhum pour son humour et ses escalators, à Gcef pour les séjours en Bretagne et les idées stupides, à Romain pour son imagination sans limites et pour le défunt Smile Project, à Fab pour les mimes et les mines, à Florian pour les pubs et la pub à Grenoble, à Jah pour le rubick's cube et pour le weekend "sportif" de Sophia, à Ipeul pour la Bodega, à Momo pour les bustes de Yoda, à Caro pour sa grande gentillesse, à Cuist pour la poire de son grand-père, à 61 pour les soirées à Coutain, la Soif et le bain de minuit sur le bassin.

Et évidemment, merci à Aurélie de me rendre chaque jour plus heureux.

Table des matières

Introduction générale	13
I Techniques séquentielles et variationnelles de suivi	19
Introduction	21
1 Théorie de l'estimation et méthodes séquentielles	23
1.1 Introduction	23
1.2 Approche déterministe de l'estimation	23
1.2.1 Problème des moindres carrés	23
1.2.2 Problème des moindres carrés généralisé	24
1.2.3 Problème des moindres carrés non linéaires	24
1.3 Approche bayésienne de l'estimation	25
1.3.1 Statistique suffisante	26
1.3.2 Estimateur minimum au sens des moindres carrés	26
1.3.3 Estimateur linéaire au sens des moindres carrés	27
1.4 Méthodes séquentielles	28
1.4.1 Filtre de Kalman linéaire	28
1.4.2 Filtre de Kalman étendu	29
1.4.3 Lissage de Kalman	30
1.4.4 Filtre de Kalman d'ensemble	30
1.4.5 Filtre particulière	32
1.5 Conclusion	34
2 Filtre de Kalman d'ensemble pondéré	37
2.1 Introduction	37
2.2 Extension au filtre de Kalman d'ensemble pondéré	38
2.3 Expérimentations unidimensionnelles	40
2.3.1 Cas linéaire	40
2.3.2 Cas non linéaire	42
2.4 Application à des variables de grandes dimensions	44
2.4.1 Calcul des poids des particules à partir des lois échantillonnées	45
2.4.2 Le cas particulier de la loi de propagation	46
2.4.3 Expérimentations	47
2.5 Conclusion	52

3	Assimilation variationnelle de données	55
3.1	Introduction	55
3.2	Formulation par contrôle optimal	55
3.2.1	Assimilation de données sous contrainte dynamique forte	55
3.2.2	Assimilation de données sous contrainte dynamique faible	61
3.3	Formulation par les équations d'Euler-Lagrange	64
3.3.1	Fonction de coût	64
3.3.2	Variable adjointe	65
3.3.3	Équations d'Euler-Lagrange	66
3.3.4	Fonction incrémentale	67
3.4	Relations avec le filtre de Kalman	67
3.5	Application de l'assimilation de données	69
3.5.1	Convergence et stabilité des solutions	69
3.5.2	Mise en œuvre du modèle adjoint	70
3.5.3	Matrices de covariance	71
3.6	Conclusion	71
	Conclusion	73
	II Suivi de courbes et de champs de vecteurs	75
	Introduction	77
4	Suivi de courbes fermées	79
4.1	Introduction	79
4.2	Représentation des contours	80
4.2.1	Contours actifs	80
4.2.2	Ensemble de lignes de niveau	81
4.3	État de l'art du suivi de courbes	83
4.3.1	Suivi sans dynamique de vitesse	83
4.3.2	Suivi avec dynamique de vitesse	85
4.4	Assimilation de courbes	86
4.4.1	Représentation par surfaces implicites	86
4.4.2	Modèle dynamique	87
4.4.3	L'opérateur tangent linéaire	87
4.4.4	Discrétisation des opérateurs	88
4.4.5	Condition initiale	89
4.4.6	Équations de mesure	89
4.4.7	Système d'optimalité	92
4.4.8	Résultats	92
4.5	Conclusion	99

5	Estimation de champs denses de mouvements fluides	101
5.1	Introduction	101
5.2	État de l'art des techniques d'estimation de champs denses	102
5.2.1	Principes généraux	102
5.3	Phénomènes fluides	107
5.3.1	Représentation physique des champs de vecteurs	108
5.3.2	Équations d'évolution des écoulements fluides	109
5.3.3	Application à l'estimation de mouvement	110
5.4	Assimilation de champs de vecteurs	112
5.4.1	Équation dynamique	112
5.4.2	Discrétisation des équations dynamiques	113
5.4.3	Observations des écoulements fluides	115
5.4.4	Initialisation	117
5.4.5	Système d'optimalité	117
5.4.6	Résultats	118
5.5	Conclusion	121
6	Suivi couplé de courbes et de mouvement	127
6.1	Introduction	127
6.2	Images de mouvements fluides	128
6.3	Suivis successifs	128
6.3.1	Suivis couplés	130
6.4	Suivi d'objets naturels	133
6.4.1	Champ dense de mouvement	134
6.4.2	Modèle de vitesse affine	136
6.4.3	Résultats	137
6.5	Conclusion	139
	Conclusion	143
III	Suivi de champs de vecteurs : applications particulières	149
	Introduction	151
7	Suivi de mouvements atmosphériques par couches	153
7.1	Introduction	153
7.2	Décomposition en couches	154
7.3	Observations de cartes de différences de pression	154
7.4	Modèle shallow-water	156
7.4.1	Modèle direct	156
7.4.2	Modèle adjoint	157
7.4.3	Discrétisation des équations	158
7.5	Système d'optimalité	159
7.6	Résultats	160

7.6.1	Expériences synthétiques	160
7.6.2	Séquence d'image météorologique	161
7.7	Conclusion	162
8	Suivi de systèmes dynamiques d'ordre réduit	165
8.1	Introduction	165
8.2	Décomposition Orthogonale Propre	166
8.2.1	Base orthogonale propre	166
8.3	Formulation d'un système dynamique d'ordre réduit	168
8.4	Gestion des observations	169
8.4.1	Obtention des modes	169
8.4.2	Identification polynomiale des coefficients des systèmes dynamiques réduits	170
8.5	Assimilation des systèmes dynamiques réduits	171
8.5.1	Assimilation des trajectoires des modes temporels	171
8.5.2	Assimilation des coefficients de modèles dynamiques d'ordre réduit . . .	174
8.6	Résultats	176
8.6.1	Convergence et stabilité numérique	176
8.6.2	Analyse de robustesse	177
8.6.3	Analyse de portrait de phase	178
8.6.4	Analyse de la convergence	182
8.6.5	Écoulement derrière un cylindre en rotation	183
8.6.6	Écoulement DNS 3D	184
8.7	Conclusion	185
	Conclusion	187
	Conclusion générale et perspectives	189
	Annexes	195
A	Équivalence filtre de Kalman et assimilation de données	197
B	Opérateur d'observation adjoint des champs fluides	199
C	Estimation du mouvement de séquences vidéo	201
D	Estimation de la profondeur d'une scène	205
E	Modèle de mouvement de couches atmosphériques	209

Liste des notations	213
Liste des abréviations	215
Liste des algorithmes	216
Liste des figures	217
Liste des tableaux	224
Bibliographie	225
Liste des publications	237

Introduction générale

Contexte général

Avec l'arrivée des nouveaux médias, l'image est devenu un outil incontournable de la vie quotidienne. Que ce soit pour la diffusion sur des téléphones portables, la vidéo surveillance, la post production vidéo ou cinématographique, les applications sont multiples et essentielles. Dans le registre des sciences de l'environnement, les images satellitaires apportent de nouvelles données d'investigation et génèrent de nouvelles problématiques. Les applications de suivi dans les séquences d'images, ou plus généralement l'analyse de mouvement, constituent donc un domaine de recherche en pleine expansion.

Les techniques de traitement d'images s'ouvrent ainsi à de nouvelles applications qui nécessitent de faire appel à des outils théoriques différents des techniques standards actuellement développées. Une des principales limitations de l'analyse de mouvement dans le domaine de la vision par ordinateur concerne le manque de cohérence temporelle entre les estimations successives réalisées sur une séquence vidéo. Cette limitation vient principalement du fait qu'il est en général complexe de déterminer une dynamique *a priori* sur l'évolution de phénomènes 3D visualisés sur un plan image 2D. Il est parallèlement difficile de contraindre les solutions obtenues par analyse de séquences d'images à respecter des lois d'évolution physique.

Un des cas particuliers rencontré très fréquemment concerne l'analyse de séquences d'images d'écoulements fluides. Même si ces images sont informatives pour l'œil humain, elles posent néanmoins le problème de leur analyse automatique. Comment par exemple quantifier et utiliser l'évolution temporelle de phénomènes météorologiques visibles sur une séquence d'image et les coupler avec des modèles de dynamique physique afin d'opérer une prédiction ?

Dans le contexte d'images de mouvements fluides, il est en effet possible d'avoir une idée *a priori* de la dynamique du phénomène observé. L'étude des écoulements fluides est au centre de vastes domaines de recherche et la visualisation offre un moyen rapide d'analyser et de comprendre ces écoulements. Les domaines dans lesquels ces phénomènes interviennent sont d'une importance capitale :

- l'océanographie, où l'estimation de mouvement permet d'étudier l'évolution des courants marins et la dérive d'entités passives telles que les icebergs ou les nappes de polluants.
- l'imagerie médicale, où l'étude d'écoulements de bio-fluides est capitale pour détecter certaines pathologies telles que les thromboses, ou mettre au point de prothèses limitant les risques de gêne ou de complication.

- la biologie marine, où l’on cherche à analyser le comportement de certaines espèces en relation avec l’évolution de leur environnement.
- l’imagerie pour l’étude expérimentale d’écoulements fluides, où l’extraction d’attributs cinématiques (vitesse, vorticité ou divergence) est indispensable pour caractériser les propriétés de différents types d’écoulement (laminaires, turbulents). Ces études ont un impact industriel considérable dans tous les secteurs où l’on souhaite “contrôler” un écoulement fluide. Cela implique par exemple, le domaine du transport (aéronautique, automobile, ...), les applications militaires, ou encore le secteur agro-alimentaire.
- la météorologie, où la reconstruction des *champs de vent* à partir de données satellitaires permet de suivre et d’observer l’évolution de phénomènes météorologiques clés comme les centres dépressionnaires, les tornades ou certains groupes de nuages. Ces champs de vent permettent également d’initialiser des modèles atmosphériques numériques.
On peut aussi rappeler que les stations météo permettant la collecte de données sont organisées de manière très hétérogène sur le globe terrestre. Leurs emplacements géographique sont principalement liés au développement économique des pays. L’hémisphère sud, et plus particulièrement l’Afrique et l’Océan Pacifique, est ainsi pratiquement dépourvu de moyens permettant d’alimenter les modèles de prévision météorologiques locaux.
La haute résolution des images fournies par les nouveaux satellites devrait donc permettre d’apporter de nettes améliorations aux modèles prévisionnels dans ces zones du globe.

À travers tous ces exemples, on cerne tout l’intérêt que peut avoir l’analyse d’écoulements fluides dans notre vie quotidienne. Pour une analyse fine et robuste de ces données images, il paraît absolument nécessaire que les techniques utilisées puissent prendre en compte les équations descriptives de l’évolution du fluide étudié. Cette prise en compte de la cinématique de la dynamique est d’autant plus indispensable que les données images sont en général le reflet d’observations incomplètes, bruitées et souvent indirectes des variables d’état d’intérêt (vitesse, température, pression, densité, ...). D’autre part, les écoulements complexes, comme les fluides géophysiques, sont souvent régis par des modèles simplifiés en raison de conditions aux bords inconnues, de phénomènes couplés de cinétique chimique ou encore de phénomènes turbulents méconnus.

Les données images, de part leur nature spatio-temporelle quasi dense, devraient donc permettre d’améliorer grandement l’analyse de ces écoulements complexes.

Méthodologies

Les techniques de suivi utilisées en vision par ordinateur sont historiquement des méthodes séquentielles (ou récursives), où un modèle dynamique *a priori* guide l’évolution de l’objet d’intérêt et un filtrage permet de corriger l’estimation suivant des données images. Les modèles d’évolution utilisés sont en pratique définis à un bruit près. Ce bruit permet en effet de modéliser l’imprécision ou l’incertitude des modèles utilisés et des erreurs mises en jeux par la projection sur un plan image de phénomènes tridimensionnels. Notons aussi que le coût de calcul de l’étape de filtrage limite l’application de ces méthodes aux variables de dimension réduite.

En météorologie et en océanographie, d'autres techniques, par essence différentes, sont aussi utilisées. Le suivi de l'évolution d'un océan ou de l'atmosphère est en effet parfois réalisé avec des méthodes dites variationnelles sur un intervalle de temps donné. On parle alors d'assimilation variationnelle de données. Dans cette approche, des dynamiques physiques exactes guidant des variables de grandes dimensions sont considérées. Elles sont conditionnées par des observations diverses : stations au sol, ballons sonde, données bathymétriques ou aériennes...

La disponibilité de données satellitaires de plus en plus précises et nombreuses est une aubaine pour ce type de méthodes. Il existe cependant une limitation à l'utilisation de ces données : comment relier des images de luminance à des variables physiques ? Ceci est un obstacle très difficile à surmonter. Des premières approches considérant la valeur d'un pixel d'une image comme l'intégration verticale de quantité physiques (comme la densité) ont alors été développées. Les opérateurs associant la valeur d'un pixel à la quantité physique sous-jacente sont alors exacts, mais il est extrêmement complexe de leur associer un opérateur adjoint permettant d'aller de la valeur d'un pixel à la valeur de la quantité d'intérêt sur toute la colonne verticale représentée par ce seul pixel. De plus, les grilles de discrétisation des modèles physiques sont souvent encore très grossières (une centaine de kilomètres), tandis que la résolution des images satellitaires est d'une précision bien supérieure (3 kilomètres). Les images sont donc encore très peu utilisées directement par les systèmes d'assimilation de données. Ce phénomène peut même être quantifié : avec la mise en orbite de nouveaux satellites tous les ans, le nombre d'observations satellitaires évolue de manière quasi exponentielle tandis que le nombre de données réellement utilisées croît linéairement (voir figure 0.1).

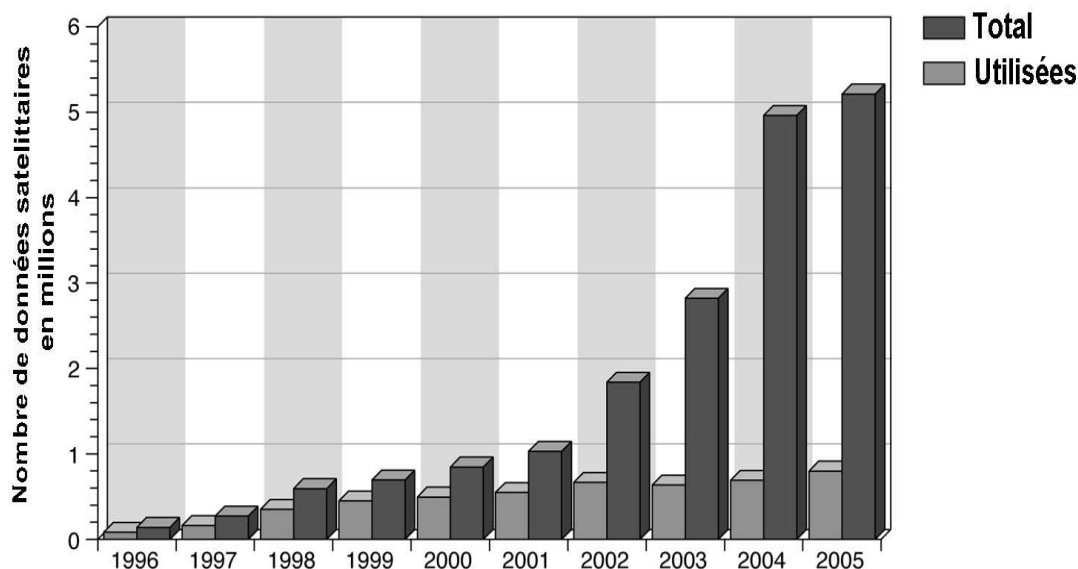


FIG. 0.1: Évolution du nombre de données satellitaires disponibles et des données réellement utilisées. Source : European Center for Medium range Weather forecasting.

Nous assistons finalement à une situation très simple : les techniques de vision par ordinateur permettent de manipuler les images, mais n'utilisent pas de dynamiques suffisamment précises pour assurer un suivi robuste (*i.e.* une mesure quantitative fiable de variables physiques), alors que les méthodes d'assimilation de données ont des modèles physiques exacts et des données images qui sont sous utilisées.

Dans cette thèse, nous tentons d'associer ces deux domaines afin de tirer parti des avantages de chacune des méthodes existantes et d'essayer de répondre à des problématiques encore très peu étudiées. Ainsi, dans le cas de la météorologie par exemple, les modèles dynamiques permettent d'obtenir des informations sur les grandes échelles de l'écoulement, tandis que les images apportent des détails correspondant à de plus petites échelles du mouvement.

En combinant les propriétés de l'assimilation de données et des images, on peut espérer estimer des champs de vent à la fois gouvernés par une dynamique cohérente et montrant un niveau de détail le plus fin possible.

Contributions

Comme cette thèse s'est déroulée dans le contexte du projet Européen FLUID¹, les travaux réalisés ont été effectués en collaboration avec des communautés scientifiques variées : vision par ordinateur, assimilation de données, mécanique des fluides ou encore météorologie. Si les applications développées sont par conséquent variées, la méthodologie employée repose cependant toujours sur des techniques d'assimilation de données. Cette technique s'appuie sur la combinaison d'une loi dynamique *a priori* de variables d'état et de mesures, souvent bruitées et incomplètes, de ces variables d'intérêt. Dans cette thèse, des observations images ont exclusivement été considérées. Ceci constitue la contribution majeure des travaux présentés, puisque les applications classiques d'assimilation de données n'incorporent que rarement directement ce type de données. Nous avons donc tenté de réaliser un premier pas vers **l'assimilation d'observations image**.

Ce travail a nécessité l'effort d'une recherche "transversale". En effet, le traitement direct ou indirect (cas des pseudo-observations) des données images fait appel à différentes techniques développées dans le cadre de la vision par ordinateur. De plus, l'étude de phénomènes fluides particuliers nécessite souvent la mise au point de modèles dynamiques spécifiques et des connaissances expertes des phénomènes visualisés (cas des séquences d'images météorologiques ou de mécanique des fluides expérimentale). Ces modèles, définis dans un espace physique 3D, doivent être redéfinis ou simplifiés, afin de pouvoir être utilisés efficacement dans le but d'extraire des quantités cohérentes à partir de séquences d'images. La mise en place de telles méthodes nécessite donc également un travail de modélisation des phénomènes tels qu'ils peuvent être perçus dans une séquence d'images 2D. Enfin, les modèles dynamiques résultant sont souvent non linéaires et requièrent une discrétisation attentionnée par l'emploi de méthodes numériques particulières.

Dans cette thèse, nous avons souhaité étudier la mise en place de méthodes générales permettant de suivre, dans des séquences d'images, des objets définis dans des espaces de grandes dimensions (tels que des courbes ou des champs de vecteurs). Dans la communauté de la vision par ordinateur, ce type de problématique n'est abordé que sous l'angle des méthodes séquentielles

¹<http://fluid.irisa.fr>

pour des objets de dimensions réduites, ou par le biais de techniques d'estimation ou de segmentations successives. De notre point de vue, cette dernière approche ne constitue en aucun cas un cadre fiable et efficace de suivi puisqu'aucune information sur la dynamique du phénomène observé ne peut être introduite.

L'utilisation du cadre de l'assimilation variationnelle et du contrôle optimal autorise la définition de telles méthodes de suivi pour des objets de grandes dimensions. C'est ce cadre méthodologique, totalement inconnu en vision par ordinateur, que nous avons souhaité étudier dans cette thèse, afin de réaliser une analyse temporelle plus fine des séquences d'images.

Les contributions scientifiques relatives aux travaux développés sont diverses. Elles concernent le suivi de contours [141, 142], le lissage de champ de mouvement fluide [140], l'estimation de mouvement fluide [139, 143], l'estimation de mouvement de couches atmosphérique [84, 144] ou le suivi de systèmes dynamiques d'ordre réduit. [58].

Description du document

Ce document est organisé en trois parties selon le plan suivant.

Partie I : Techniques séquentielles et variationnelles de suivi

La première partie dresse un panorama des techniques séquentielles et variationnelles de suivi. Elle est composée de trois chapitres. Après un bref rappel de la théorie de l'estimation, le premier chapitre traite des méthodes séquentielles de suivi, c'est à dire le filtre de Kalman et ses dérivées. Le traitement de variables de grandes dimensions dans le cadre du suivi séquentiel est ensuite abordé dans le second chapitre où une nouvelle extension du filtre de Kalman d'ensemble par la théorie du filtrage particulière est proposée. Enfin, le troisième chapitre est dédié à l'assimilation variationnelle de données. Différentes approches de cet outil sont détaillées et les conditions d'application de la technique sont présentées.

Partie II : Suivi de courbes et de champs de vecteurs

La seconde partie est consacrée à l'application de l'assimilation à divers problèmes de vision par ordinateur. Elle est composée de trois chapitres détaillant successivement :

- le suivi de courbe,
- le suivi de champs de mouvement fluide,
- le suivi de courbe et du champ de vecteur associé.

Partie III : Suivi de champs de vecteurs : applications particulières

La troisième et dernière partie est consacrée à l'application de l'assimilation de données images à deux problèmes de suivi de champs de vecteurs. Elle est composée de deux chapitres présentant :

- le suivi de mouvement atmosphérique par couche,
- le suivi de systèmes dynamiques d'ordre réduit.

Enfin, la conclusion générale présente une synthèse de ces études et quelques perspectives liées à ces travaux.

Première partie

**Techniques séquentielles et
variationnelles de suivi**

Introduction

Nous décrivons dans cette première partie les différents cadres méthodologiques permettant de définir un suivi de variables d'état d'un système au cours du temps. Le "suivi", tel que nous le définissons, vise à extraire la trajectoire d'une variable d'intérêt à partir d'un ensemble de mesures incomplètes et bruitées de cette variable.

A ce jour, deux approches permettent de réaliser une telle estimation : les techniques récursives de filtrage ou les méthodes d'assimilation variationnelle. Les deux familles sont décrites dans cette première partie. Même si cette thèse est principalement centrée sur l'utilisation des techniques variationnelles d'assimilation de données, nous avons souhaité passer en revue les différentes méthodes de filtrage utilisées, puisque ces deux cadres ne sont pas sans rapports et partagent des principes communs.

Le **chapitre 1** est ainsi consacré aux bases de la théorie de l'estimation. Les méthodes séquentielles de suivi, telles que le filtre de Kalman, le filtre particulaire et leurs extensions sont ensuite présentés.

Dans le **chapitre 2**, le filtre de Kalman d'ensemble pondéré est ensuite proposé. Nous verrons que cette méthode permet de combiner les avantages du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre particulaire.

Dans le **chapitre 3**, nous décrivons les principes du suivi par assimilation variationnelle de données. L'assimilation sous contraintes dynamiques fortes et faibles, respectivement liées à des modèles dynamiques parfaits et imparfaits, sont décrites plus particulièrement.

Chapitre 1

Théorie de l'estimation et méthodes séquentielles

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les bases de la théorie de l'estimation nécessaire à la compréhension du reste du manuscrit. Les techniques séquentielles de suivi sont ensuite détaillées. La description de ces méthodes, dédiées au suivi de variable de faibles dimensions, nous permettra également d'introduire les approches variationnelles principalement utilisées dans le cadre de cette thèse.

1.2 Approche déterministe de l'estimation

Le problème général de l'estimation concerne le recouvrement de l'état d'un système décrit par une ou plusieurs variables d'état à partir d'un ensemble de mesures erronées.

1.2.1 Problème des moindres carrés

On désigne par $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la variable d'état du système d'intérêt. On suppose que l'on observe cet état par une mesure $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ par la relation :

$$\mathbf{y} = \mathbb{H} \mathbf{x} + \epsilon. \quad (1.1)$$

Dans cet exemple, \mathbb{H} est une matrice connue et ϵ représente l'erreur de mesure. On suppose que $m > n$ et que \mathbb{H} est de rang n .

Un estimateur de \mathbf{x} est une fonction $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, où \mathbf{y} est une observation. Une estimation est la valeur produite par l'estimateur étant donné une valeur particulière de l'observation. L'estimateur des moindres carrés minimise ainsi la fonction de coût :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x}|^2, \quad (1.2)$$

pour la norme Euclidienne :

$$|\mathbf{v}|^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2 \quad \forall \mathbf{v} = \{v_1 \cdots v_m\}.$$

La solution du problème est alors obtenue en calculant le gradient de la fonction de coût :

$$\nabla J = -(\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x})^T \mathbb{H} = 0,$$

et en supposant que $\mathbb{H}^T \mathbb{H}$ est inversible, on a alors une solution unique :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbb{H}^T \mathbb{H})^{-1} \mathbb{H}^T \mathbf{y}. \quad (1.3)$$

1.2.2 Problème des moindres carrés généralisé

Afin de généraliser cette approche, la fonction de coût peut être modifiée en introduisant une pondération :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x})^T R^{-1} (\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x}), \quad (1.4)$$

où R est une matrice de poids, symétrique, définie positive et donc inversible, telle que $R^{-1} = CC^T$ et C inversible. Ainsi :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (C(\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x}))^T C(\mathbf{y} - \mathbb{H} \mathbf{x}).$$

Ce problème est ramené au cas précédent par un simple changement de variables ($y := Cy$), et on obtient comme unique solution :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbb{H}^T R^{-1} \mathbb{H})^{-1} \mathbb{H}^T R^{-1} \mathbf{y}. \quad (1.5)$$

1.2.3 Problème des moindres carrés non linéaires

On considère à présent un modèle non linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbb{H}(\mathbf{x}) + \epsilon. \quad (1.6)$$

L'estimé au sens des moindres carrés va donc chercher à minimiser la fonction de coût :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\mathbf{x}))^T (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\mathbf{x})). \quad (1.7)$$

En introduisant le gradient $\nabla \mathbb{H}(\mathbf{x})$ de $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ comme une matrice de taille $n \times m$, on peut obtenir le gradient de la fonction de coût :

$$\nabla J = -(\mathbf{y} - \mathbb{H}(\mathbf{x}))^T \nabla \mathbb{H}(\mathbf{x}) = 0.$$

On a alors un système d'équations non linéaires pour calculer $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\nabla \mathbb{H}(\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\hat{\mathbf{x}})) = 0,$$

qui ne peut être résolu que par approximation. Une approche naturelle est alors de linéariser autour d'un estimé $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

La théorie linéaire développée précédemment s'applique alors parfaitement, et on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \left((\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^{-1} \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})).$$

Cette formule suggère un processus de résolution itératif.

1.2.3.1 Méthodes itératives de résolution

En introduisant un paramètre de contrôle k , on peut obtenir la *méthode de Gauss* :

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + k \left((\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) \right)^{-1} (\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})).$$

Une autre idée est de réaliser une approximation de la fonction de coût $J(\mathbf{x})$ par une fonction quadratique, en réalisant un développement de Taylor d'ordre 2 autour d'un estimé $\bar{\mathbf{x}}$:

$$J(\mathbf{x}) \simeq J(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla^2 \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}),$$

où $\nabla^2 \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})$ est un opérateur linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . En calculant le gradient de cette fonction de coût, on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} - (\nabla^2 J(\bar{\mathbf{x}}))^{-1} \nabla J(\bar{\mathbf{x}})^T.$$

Cependant, on a aussi :

$$\nabla J(\bar{\mathbf{x}}) = -(\mathbf{y} - \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) = 0,$$

on peut donc calculer

$$\nabla^2 J(\bar{\mathbf{x}}) = -2 \left(\sum_{i=1}^m (\mathbf{y}_i - \mathbb{H}_i(\bar{\mathbf{x}})) \nabla^2 \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) \right) + 2(\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}).$$

En introduisant un paramètre de contrôle k , on arrive alors au schéma itératif suivant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + k \left[(\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T \nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^m (\mathbf{y}_i - \mathbb{H}_i(\bar{\mathbf{x}})) \nabla^2 \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}) \right] (\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T (\mathbf{y} - \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}})).$$

Cette technique est appelée *méthode de Newton-Raphson*. Elle se réduit à la méthode de Gauss, si l'on néglige les termes du second ordre. Enfin, on peut aussi mentionner la méthode classique de descente de gradient, qui consiste à faire progresser la solution dans le sens opposé au gradient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + k(\nabla \mathbb{H}(\bar{\mathbf{x}}))^T, k < 0.$$

En pratique, il est conseillé d'utiliser l'algorithme de descente de gradient quand la solution initiale est mauvaise, et de terminer par une méthode de Newton dans le voisinage du minimum de la fonction de coût.

1.3 Approche bayésienne de l'estimation

Dans ce nouveau contexte, nous considérons à présent le vecteur de mesures \mathbf{y} comme un vecteur aléatoire, dont la densité de probabilité est donnée par $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ qui dépend d'un vecteur de paramètres \mathbf{x} . Ces paramètres sont déterministes mais inconnus. L'approche bayésienne considère les paramètres comme aléatoires et part d'une *densité de probabilité a priori* $f(\mathbf{x})$ sur ces paramètres. La loi de Bayes définit alors la *densité de probabilité a posteriori* par la formule :

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{y})}, \quad (1.8)$$

$$f(\mathbf{y}) = \int f(\mathbf{y}|\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

où $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ est supposée connue. $f(\mathbf{y})$ est la densité de probabilité marginale de \mathbf{y} . La fonction $f(\mathbf{y}|)f(\mathbf{x})$ est la densité de probabilité jointe du couple (\mathbf{y}, \mathbf{x}) . Le problème consiste à estimer le vecteur de paramètres \mathbf{x} . Dans la section précédente, nous avons introduit le concept d'estimateur comme une fonction de l'observation. Nous avons montré que la méthode des moindres carrés fournit un estimateur purement déterministe. Dans le cas présent, le vecteur d'observation est un vecteur aléatoire avec une densité de probabilité dépendante des paramètres d'intérêt. On utilise plus communément la notion de statistique.

1.3.1 Statistique suffisante

L'idée des statistiques suffisantes est de résumer l'information contenue dans le vecteur d'observation \mathbf{y} dans une fonction $\Theta(\mathbf{y})$ de dimension M inférieure à m . La densité de probabilité *a posteriori* des paramètres dépend ainsi seulement de l'observation \mathbf{y} à travers la statistique suffisante :

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}|\Theta).$$

Le concept introduit initialement par Fisher en 1922 [75], explique que la statistique Θ est suffisante si la densité conditionnelle de l'observation \mathbf{y} selon Θ est indépendante de \mathbf{x} :

$$f(\mathbf{y}|\Theta, \mathbf{x}) = f(\mathbf{y}|\Theta).$$

Bons estimateurs En notant $\Theta(\mathbf{y})$ un estimateur, où l'observation \mathbf{y} est un vecteur aléatoire de densité de probabilité $f(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Le vecteur de paramètres a une densité de probabilité $f(\mathbf{x})$. L'erreur est définie par :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \Theta(\mathbf{y}).$$

La première propriété demandée à un bon estimateur est d'assurer qu'il soit *non biaisé* (i.e. que l'espérance \mathbb{E} de son erreur soit nulle) :

$$\mathbb{E}\tilde{\mathbf{x}} = 0.$$

La seconde propriété est relative au comportement de l'estimateur lorsque M croît. En notant $\Theta_M(\mathbf{y})$ l'estimateur, il est dit *consistant* si :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Theta_M(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \text{ en probabilité.}$$

La dernière propriété d'un bon estimateur concerne son *efficacité*. Un estimateur non biaisé est dit *efficace* si il a une matrice de covariance minimale. Ainsi $\hat{\Theta}(\mathbf{y})$ est efficace si :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T | \mathbf{x} \right] &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \hat{\Theta}(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \hat{\Theta}(\mathbf{y}))^T | \mathbf{x} \right], \\ &\leq \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \Theta(\mathbf{y}))(\mathbf{x} - \Theta(\mathbf{y}))^T | \mathbf{x} \right], \forall \text{ estimateur non biaisé } \Theta(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

1.3.2 Estimateur minimum au sens des moindres carrés

On considère \mathbf{y} et \mathbf{x} comme des vecteurs aléatoires de densité de probabilité jointe $f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. L'estimateur minimum au sens des moindres carrés est une statistique sur \mathbf{y} qui minimise :

$$\mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \Theta)^T (\mathbf{x} - \Theta) \right].$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *L'estimateur minimum au sens des moindres carrés est donné par l'espérance conditionnelle :*

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathbf{y}].$$

La démonstration de ce théorème ainsi que de plus amples détails concernant l'estimation bayésienne peuvent être trouvés dans [14].

1.3.3 Estimateur linéaire au sens des moindres carrés

Afin de faire le lien avec l'approche déterministe de l'estimation précédemment présentée, on considère l'équation de mesure :

$$\mathbf{y} = \mathbb{H}\mathbf{x} + \epsilon, \quad (1.9)$$

où le vecteur d'état \mathbf{x} de dimension n est observé par le vecteur de mesure \mathbf{y} de dimension m à travers une matrice d'observation \mathbb{H} , à un bruit ϵ près. On fait ici l'hypothèse que \mathbf{x} et ϵ sont des vecteurs indépendants dont les composantes sont des variables gaussiennes de moyennes nulles et de matrices de covariance respectives B et R supposées inversibles et définies telles que :

$$\begin{aligned} B &= \mathbb{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T], \\ R &= \mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les densités de probabilités des vecteurs \mathbf{x} et ϵ s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det B|} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T B^{-1}\mathbf{x}}, \\ f(\epsilon) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\det R|} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbb{H}\mathbf{x})^T R^{-1}(\mathbf{y}-\mathbb{H}\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où $\det \bullet$ désigne le déterminant de la matrice \bullet . Comme les deux variables sont indépendantes, la loi conditionnelle *a posteriori* $f(\mathbf{x}|\epsilon)$ est égale au produit des deux lois précédentes :

$$f(\mathbf{x}|\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+n}{2}} |\det R| \cdot |\det B|} e^{-\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^T B^{-1}\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbb{H}\mathbf{x})^T R^{-1}(\mathbf{y}-\mathbb{H}\mathbf{x})\right]}. \quad (1.12)$$

La maximisation de cette loi *a posteriori* revient alors à résoudre le problème de variance minimale :

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^T B^{-1}\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbb{H}\mathbf{x})^T R^{-1}(\mathbf{y} - \mathbb{H}\mathbf{x}) \right],$$

qui admet pour unique solution l'estimateur minimum au sens des moindres carrés [14] :

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = B\mathbb{H}^T \left(R + \mathbb{H}B\mathbb{H}^T \right)^{-1} \mathbf{y}.$$

Cet estimateur peut être formulé de manière équivalente par :

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}|\mathbf{y}] = \left(B^{-1} + \mathbb{H}^T R^{-1}\mathbb{H} \right)^{-1} \mathbb{H}^T R^{-1}\mathbf{y},$$

pour retrouver une relation analogue à l'expression (1.5) obtenue par l'approche déterministe de l'estimation.

On va à présent s'intéresser au cas où l'état \mathbf{x} suit une loi dynamique *a priori*. Les méthodes dites séquentielles, telles que le filtre de Kalman, permettent alors d'estimer récursivement au cours du temps les moments de la variable d'état.

1.4 Méthodes séquentielles

1.4.1 Filtre de Kalman linéaire

Le **filtre de Kalman** [100] et son extension au temps continu appelé **filtre de Kalman-Bucy** [99] permettent de résoudre de façon optimale le problème du filtrage linéaire, quand les bruits du système sont additifs et gaussiens. Depuis 1960, le filtre de Kalman a été intensivement utilisé dans des applications diverses, et a donné lieu à de nombreuses recherches. Dans cette section, le principe général du filtre de Kalman est expliqué. Le but du filtrage est de suivre un état $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, connaissant des observations de cet état $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^m$. On considère un système linéaire à bruits additifs gaussien \mathbf{w}_t :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{M}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \eta, \\ \mathbf{y}_t = \mathbb{H}_t \mathbf{x}_t + \epsilon_t, \end{cases} \quad (1.13)$$

où t est l'indice de temps, avec $t_0 \leq t \leq t_f$. Les hypothèses suivantes sont faites :

Hypothèses 1.4.1

- Le bruit d'initialisation η est un bruit blanc gaussien de covariance B_0 .
- Les matrices \mathbb{M}_t et \mathbb{H}_t sont déterministes, appelées respectivement matrices d'état et de mesure.
- Les bruits du modèle \mathbf{w}_t et des mesure ϵ_t sont des bruits blancs gaussiens de covariances respectives Q_t et R_t connues. Ils sont supposés mutuellement indépendants et indépendant de la condition initiale. R_t est inversible.

Le meilleur estimateur de \mathbf{x}_t connaissant toutes les données jusqu'à l'instant t est donné par l'espérance conditionnelle $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}]$ et sa covariance $B_t = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T]$. Ces deux premiers moments sont calculés récursivement par le filtre de Kalman. Comme $\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}$ suit une loi gaussienne, ces deux moments définissent entièrement la distribution de probabilité.

Théorème 1.4.2 *On suppose la validité des hypothèses (1.4.1) et l'existence du système (1.13) dont on connaît la condition initiale \mathbf{x}_0 de covariance B_0 . On pose alors*

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0,$$

et on obtient un modèle de propagation de l'état et de sa covariance d'erreur :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} &= \mathbb{M}_t \hat{\mathbf{x}}_t, \\ B_{t+1|t} &= Q_t + \mathbb{M}_t B_t \mathbb{M}_t^T, \end{aligned}$$

ainsi qu'une innovation de l'état et de sa covariance d'erreur :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_t &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t (\mathbf{y}_t - \mathbb{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}), \\ B_t &= B_{t|t-1} - K_t \mathbb{H}_t B_{t|t-1}, \end{aligned}$$

où $K_t = B_{t|t-1} \mathbb{H}_t^T (R_t + \mathbb{H}_t B_{t|t-1} \mathbb{H}_t^T)^{-1}$.

La matrice K_t est appelée le gain du filtre de Kalman. Durant la phase de correction, cette matrice est multipliée par l'innovation $\mathbf{y}_t - \mathbb{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ (qui correspond à la différence entre la mesure observée et la mesure prédite). Ce terme permet de corriger l'estimée prédite. Cette étape peut s'interpréter facilement : une grande confiance dans les précédentes estimations ($B_{t|t-1}$ "faible") et un doute dans les mesures (R_t "élevé") impliquent un gain faible. La prédiction est alors faiblement corrigée. Un doute sur les précédentes estimations et une confiance en la nouvelle mesure entraînent un gain fort. La mesure prend donc de l'importance dans la valeur finale de l'estimé. On note enfin qu'avec le signe $-$ présent dans l'équation d'innovation de la covariance, la matrice B_t est toujours inférieure à $B_{t|t-1}$, ceci implique que l'on diminue la variance de l'erreur de l'estimé à chaque nouvelle étape.

On peut remarquer que les matrices de covariance et le gain du filtre ne dépendent pas de la mesure courante. Pour une réduction du temps de calcul, ces matrices pourront être calculées au préalable dans le cas où les matrices du système \mathbb{M}_t , \mathbb{H}_t , R_t et Q_t sont indépendantes du temps.

Nous allons à présent nous intéresser à l'adaptation du filtre de Kalman dans le cas où les opérateurs \mathbb{M} et \mathbb{H} sont non linéaires.

1.4.2 Filtre de Kalman étendu

Lorsque le système à résoudre n'est pas linéaire, mais que les hypothèses sur les bruits sont conservées (bruits blancs additifs, gaussiens, indépendants entre eux et indépendants de la condition initiale), il s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{M}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \eta, \\ \mathbf{y}_t = \mathbb{H}_t(\mathbf{x}_t) + \epsilon_t, \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\mathbb{M}_t(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \mathbf{x}_t \mapsto \mathbf{x}_{t+1}$ et $\mathbb{H}_t(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \mathbf{x}_t \mapsto \mathbf{y}_t$ sont des opérateurs non linéaires, supposés dérivables. On note toujours Q_t la covariance du bruit d'état et R_t celle du bruit de mesure. Le système (1.14) peut être approché par un modèle linéaire gaussien par linéarisation des équations d'état et de mesure. L'extension la plus simple est obtenue par développement au premier ordre (autour de l'estimation précédente pour l'équation d'état et de la prédiction pour l'équation de mesure) :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_t(\mathbf{x}_t) &= \mathbb{M}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) + \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{M}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t), \\ \mathbb{H}_t(\mathbf{x}_t) &= \mathbb{H}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{H}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Le système linéaire déduit est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} &= \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{M}_t \mathbf{x}_t + \mathbb{M}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) - \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{M}_t \hat{\mathbf{x}}_t + w_t, \\ \mathbf{y}_t &= \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbb{H}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) - \partial_{\hat{\mathbf{x}}_t} \mathbb{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t + \epsilon_t. \end{cases} \quad (1.16)$$

L'utilisation du filtre de Kalman pour ce système fournit les équations du filtre de Kalman étendu au premier ordre. Dans le cas où les bruits ne sont plus additifs mais liés de façon non linéaire à l'état et à la mesure, on procède de la même manière. Les fonctions des bruits sont linéarisées autour de 0 afin d'obtenir un système qui peut être résolu par un filtre de Kalman. Des filtres équivalents peuvent être déduits de linéarisation à des ordres supérieurs, mais ils ne sont pas utilisés en pratique. Si les non-linéarités sont trop importantes, le filtre de Kalman étendu peut diverger. Ceci est d'autant plus vrai que les équations de ce filtre ne prennent pas en compte l'erreur de linéarisation. Pour remédier à ce problème, quelques propositions ont été faites. Il est possible, d'une part,

d'augmenter la variance des bruits Q_t et R_t afin de prendre en compte cette erreur. Une augmentation artificielle de la covariance B_t permet d'autre part de limiter la confiance dans les estimées passées. Ces méthodes nécessitent cependant un ajustement précis et difficile des paramètres.

1.4.3 Lissage de Kalman

Le lissage de Kalman consiste à chercher $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:N}]$, où $N > t$. On ne cherche donc plus une estimation *a priori* suivant les observations passées de l'état, mais une estimation *a posteriori*, en considérant l'ensemble des observations sur un intervalle de temps donné. Contrairement aux cas présentés précédemment, le filtrage ne peut plus être réalisé en ligne, mais s'applique à un traitement différé (ou hors ligne). Avec le filtrage de Kalman, on sait obtenir $\hat{\mathbf{x}}_t^1 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}]$, il ne reste donc qu'à déterminer $\hat{\mathbf{x}}_t^2 = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{t+1:N}]$ pour obtenir le lissage souhaité. L'idée est alors de réaliser un filtrage de Kalman rétrograde du temps N au temps t , en prenant les matrices de covariance de modèle et de mesure associées à ce nouveau problème. Une fois les deux filtrages réalisés, on obtient $\hat{\mathbf{x}}_t^1$ par filtrage "avant" et $\hat{\mathbf{x}}_t^2$ par filtrage "arrière". Il ne reste plus qu'à combiner ces deux estimations. Ceci est fait en utilisant un autre filtre de Kalman incorporant les lois des deux estimés $\hat{\mathbf{x}}_t^1$ et $\hat{\mathbf{x}}_t^2$. On utilise alors $\hat{\mathbf{x}}_t^2$ comme mesure lors d'un nouveau filtrage de Kalman "avant". En notant B_t^1 et B_t^2 , les matrices de covariance obtenues par les deux premiers filtrages, l'estimé *a posteriori* $\hat{\mathbf{x}}_t$ de matrice de covariance B_t est donné par :

$$\begin{aligned} B_t &= (B_t^1 + B_t^2)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= B_t(B_t^1 \hat{\mathbf{x}}_t^1 + B_t^2 \hat{\mathbf{x}}_t^2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

En pratique, le filtre de Kalman a souvent un temps de retard par rapport aux observations. Le lissage de Kalman permet alors de répondre à ce problème, comme le montre schématiquement la figure (1.4.3).

1.4.4 Filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman étendu peut être utilisé dans le cas où la dynamique est linéarisable ou faiblement non linéaire. Ces hypothèses sont cependant rarement satisfaites dans des contextes pratiques, comme l'imagerie fluide, l'océanographie ou la météorologie. En 1994, Evensen [65] (voir aussi [36, 66]) propose une méthode basée sur un échantillonnage de Monte Carlo. Un ensemble d'échantillons d'états possibles représente alors la distribution de probabilités empirique de l'état du système. Chaque membre de l'ensemble est propagé jusqu'à l'instant suivant à l'aide de la dynamique puis déplacé de nouveau en fonction de l'observation à ce nouvel instant. Ce dernier déplacement est obtenu en effectuant une approximation gaussienne de la distribution des états prédits et en appliquant les formules du filtre de Kalman classique. Cette formule n'est qu'une approximation, car en général la distribution des états prédits n'est pas gaussienne si la dynamique est non linéaire. Le filtre de Kalman d'ensemble a été largement utilisé pour des espaces d'état de grandes dimensions, lorsque les calculs de prédiction sont coûteux, car il permet d'avoir une approximation correcte de l'état recherché même pour un petit nombre de particules. On se place ainsi dans le cadre d'une dynamique non linéaire avec un modèle de mesure linéaire.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbb{M}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \eta, \\ \mathbf{y}_t = \mathbb{H}_t \mathbf{x}_t + \epsilon_t. \end{cases} \quad (1.18)$$

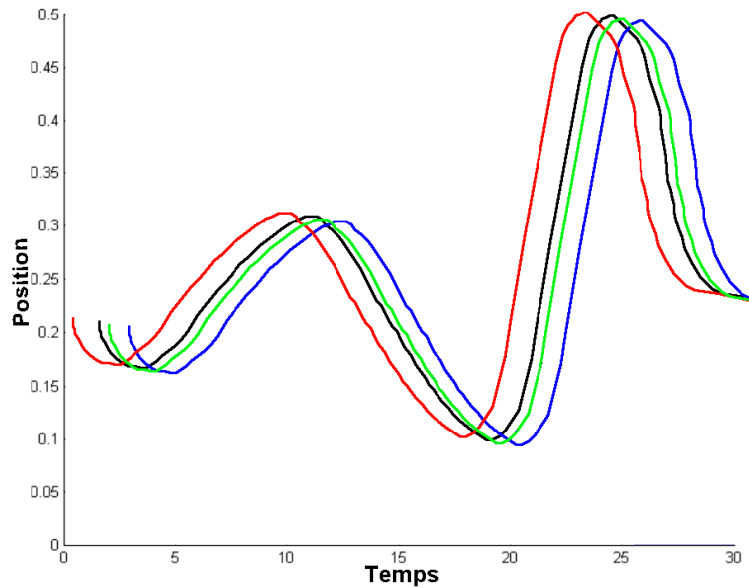


FIG. 1.1: **Principe du lissage de Kalman.** On cherche à suivre la position d'un objet au cours du temps. La courbe noire indique la vraie position de l'objet. La courbe en rouge représente le filtrage obtenu par un Kalman "avant", celle en bleu le filtrage "arrière". La courbe verte est le résultat du lissage de Kalman.

Le filtre de Kalman d'ensemble vise à utiliser les expressions fournies par le filtre de Kalman pour le cas linéaire, et nécessite une approximation gaussienne de la variance de la loi de prédiction. C'est une méthode de Monte Carlo dans le sens où les différentes distributions de probabilités sont décrites de façon empirique par des échantillons de cette loi. Ainsi, la loi initiale est échantillonnée par N membres (ou particules) $\hat{\mathbf{x}}_0^{(i)}, i = 1 \dots N$. L'étape de prédiction, dans le cadre d'une modélisation discrète, consiste à propager l'ensemble des particules $\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}$ suivant la dynamique (1.14) pour obtenir les particules prédites notées :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)} = \mathbb{M}_t(\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}) + w_t^{(i)}.$$

Le second terme de la somme correspond à la simulation d'une variable aléatoire gaussienne centrée w_t de variance Q_t . La répartition des particules prédites $\{\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)}, i = 1 \dots N\}$ ne suit une loi gaussienne que sous l'hypothèse où d'une part le nuage de particules de départ $\{\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}, i = 1 \dots N\}$ a lui-même une répartition gaussienne et si la dynamique est linéaire. On peut même considérer que plus les non linéarités sont fortes plus la répartition du nuage prédit s'éloigne de la gaussienne. Le filtre de Kalman d'ensemble s'appuie néanmoins sur une approximation gaussienne de ce nuage afin de pouvoir appliquer les formules de Kalman. Malgré cette approximation forte, la méthode semble conduire à de bonnes performances dans le cadre d'applications géophysiques. Pour réaliser cette approximation, on définit tout d'abord la particule moyenne par :

$$\overline{\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)}}{N}. \quad (1.19)$$

On en déduit la matrice de covariance d'ensemble $B_{t+1|t}^e$ à l'aide de l'expression suivante :

$$B_{t+1|t}^e = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)} - \overline{\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}} \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)} - \overline{\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}} \right)^T}{N-1}. \quad (1.20)$$

Cette expression est celle de l'estimateur *non biaisé* de la variance d'une série de données. On peut déduire de cette variance d'ensemble un gain de Kalman d'ensemble K_t^e à l'image du cas gaussien présenté dans la partie précédente. On a alors

$$K^e = B_{t+1|t}^e \mathbb{H}_{t+1}^T (\mathbb{H}_{t+1} B_{t+1|t}^e \mathbb{H}_{t+1}^T + R_{t+1})^{-1}. \quad (1.21)$$

Passons à présent à la phase de correction. Les membres d'ensemble obtenus après propagation suivant la dynamique considérée sont corrigés "en direction" de la mesure d'observation. Pour cela, on commence par perturber la mesure à l'aide de N tirages suivant la loi du bruit d'observation (Burgers *et al.* [36] montre que cette phase est nécessaire pour conserver une covariance d'ensemble cohérente vis à vis du cas gaussien du filtre de Kalman classique). On obtient ainsi un ensemble de perturbations d'observations $\{\epsilon^{(i)}, i = 1 \dots N\}$. Chaque particule $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}$ est ensuite associée à l'observation perturbée $\mathbf{y}_t + \epsilon^{(i)}$, et l'étape de correction du filtre de Kalman est appliquée de façon à obtenir l'ensemble de particules corrigées $\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)} + K^e (\mathbf{y}_{t+1} + \epsilon^{(i)} - \mathbb{H} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)}). \quad (1.22)$$

Pour des raisons de mise en œuvre, notamment dans le cas d'espaces d'état de très grandes dimensions, la covariance d'observation R est parfois remplacée par une covariance empirique R^e calculée à partir de l'échantillonnage de la loi du bruit d'observation (les $\epsilon^{(i)}$). Le gain K^e , de même que la covariance d'ensemble $B_{t+1|t}^e$, n'est alors pas calculé explicitement mais simplement représenté par l'ensemble (voir [66, 67]). Cela permet notamment de ne pas calculer (ni de stocker) de matrice de covariance dont la dimension est $n \times n$, ce qui peut être très grand si par exemple n est le nombre de pixels dans une image. Le jeu de particules ainsi obtenu est utilisé comme point de départ de l'estimation à l'instant suivant. Il existe de nombreuses autres variantes du filtre de Kalman. On citera notamment le *filtre de Kalman inodore* qui utilise une approche d'échantillonnage déterministe pour représenter une approximation gaussienne de la loi de filtrage. Pour une étude plus détaillée du filtrage de Kalman et de ses dérivées, nous renvoyons à la thèse d'Élise Arnaud [7].

1.4.5 Filtre particulaire

Le développement des filtres de Kalman d'ensemble a principalement été mené dans la communauté des océanographes. D'autres méthodes séquentielles de Monte Carlo comme le filtre particulaire ont été étudiées de façon intensive dans la communauté du traitement du signal [80, 81]. Ici, la loi de filtrage est échantillonnée également à l'aide de particules (équivalentes aux membres d'ensemble) qui sont déplacées lors de la phase de prédiction, et affectées d'un poids pendant la phase de correction. On se place dans le même contexte que dans le paragraphe précédent, *i.e.* dans le cas où le modèle d'observation est linéaire, et où la dynamique est non linéaire, l'un et l'autre avec bruits additifs gaussiens. Cependant, le filtre particulaire s'applique dans le cas général non linéaire, non additif, non gaussien.

Cas général Pour évaluer la loi de filtrage générale (qui s'applique ici aux trajectoires $\hat{\mathbf{x}}_{0:t}$ et non plus simplement à l'état à l'instant courant $\hat{\mathbf{x}}_t$), on établit une formule récursive issue de la loi de Bayes (1.8). Ainsi, on a :

$$p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t|\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{y}_{1:t-1})p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})} = \frac{p(\mathbf{y}_t|\hat{\mathbf{x}}_t)p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}, \quad (1.23)$$

on peut encore, grâce à la loi de Bayes, écrire cette loi de filtrage comme suit :

$$p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{y}_t|\hat{\mathbf{x}}_t)p(\hat{\mathbf{x}}_t|\hat{\mathbf{x}}_{t-1})}{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}. \quad (1.24)$$

On obtient ainsi une formule récursive pour la loi de filtrage des trajectoires obtenues. L'évaluation de cette loi de filtrage s'obtient suivant le principe de l'échantillonnage préférentiel : ne pouvant simuler des échantillons directement suivant la loi objectif, on tire des échantillons suivant une loi proche, appelée loi d'importance, et on affecte à chacun un poids valant le rapport des valeurs de la loi objectif sur la loi d'importance en l'échantillon. Ainsi, si l'on échantillonne suivant la loi $\pi(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t})$, la loi objectif sera représentée par les échantillons $\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}$ affectés des poids $\gamma_t^{(i)}$ valant

$$\gamma_t^{(i)} = \frac{p(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t})}{\pi(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t})}. \quad (1.25)$$

La condition à remplir quant au choix de la loi d'importance est que son support contienne le support de la loi objectif. En suivant Doucet *et al.* [63], afin d'obtenir une formulation séquentielle de l'échantillonnage, la loi d'importance est choisie avec la forme récursive suivante :

$$\pi(\hat{\mathbf{x}}_{0:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = \pi(\hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})\pi(\hat{\mathbf{x}}_t|\mathbf{y}_{1:t}, \hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}). \quad (1.26)$$

En combinant cette formulation avec l'expression récursive de la loi objectif donnée par (1.24), on obtient la formule générale des poids :

$$\gamma_t^{(i)} \propto \gamma_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_t|\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)})p(\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)})}{\pi(\hat{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})}, \quad (1.27)$$

la somme de ces poids valant 1. Ainsi, en propageant les particules à l'instant t à l'aide de la loi de distribution $\pi(\hat{\mathbf{x}}_t|\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})$, et en affectant aux trajectoires ainsi incrémentées le poids $\gamma_t^{(i)}$ défini ci-dessus, on a un échantillonnage de la loi de filtrage recherchée. Différents choix sont possibles pour la définition de la loi de propagation. Ils sont discutés dans les paragraphes suivants. Cette procédure est généralement agrémentée d'une étape de rééchantillonnage, où les trajectoires correspondant à des particules de poids faibles sont abandonnées au profit des particules de poids fort qui sont dupliquées. Concrètement, on effectue N tirages suivant la loi discrète définie par les poids des particules pour définir N nouvelles particules de poids $1/N$. Notons que la présence de poids non identiques implique une baisse de représentativité de l'échantillon : une particule dont le poids est proche de zéro contient moins d'information qu'une particule de poids significatif. Cette quantité d'information peut être représentée par la taille effective d'échantillon [63], ou bien par la notion d'entropie issue de la théorie de l'information [154] (voir aussi Kong *et al.* [104]). Ce problème est généralement compensé en introduisant le rééchantillonnage des particules évoqué ci-dessus, mais cette étape a pour conséquence d'introduire un biais dans la description de la loi de filtrage, d'autant plus important que le nombre de particules est petit.

Filtre Bootstrap Si la loi de diffusion est simplement la dynamique, *i.e.* :

$$\pi(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t}) = p(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}),$$

la formule des poids se simplifie en conséquence, en faisant seulement apparaître la vraisemblance aux données $p(\mathbf{y}_t | \hat{\mathbf{x}}_t^{(i)})$ en facteur du poids précédent. C'est la version du filtrage particulière la plus courante car la plus naturelle. Elle est aussi la plus simple à mettre en oeuvre, les différentes distributions impliquées étant généralement connues. C'est la version du filtre particulière qui est généralement utilisée en comparaison du filtre de Kalman d'ensemble [102, 154, 171]. Elle présente néanmoins l'inconvénient de propager des particules qui ne tiennent pas compte de la mesure à venir. Ainsi, en cas de forte innovation, *i.e.* quand la mesure est éloignée de l'état prédit à partir des mesures précédentes, une part importante des particules propagées sont peu significatives, ce qui conduit à des poids faibles. Cela revient à dire que la loi d'importance est éloignée de la loi de filtrage, et l'échantillonnage préférentiel est peu efficace, à moins d'augmenter le nombre de particules.

Filtre d'importance optimal Doucet *et al.* introduisent la notion de *filtre d'importance optimal*, en suivant un certain critère d'optimalité. Il s'agit de rendre la valeur du poids la moins dépendante possible du tirage aléatoire suivant la loi de propagation. On montre que le poids est indépendant du tirage suivant la loi de propagation si cette loi est de la même forme que le produit de distributions situé au numérateur de l'expression de mise à jour des poids (1.27), ce qui est le cas si

$$\pi(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t}) = p(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_t). \quad (1.28)$$

Si les formes sont identiques, il n'en va pas de même pour l'amplitude puisque la loi de propagation se normalise à 1 mais pas le produit des distributions du numérateur. Ce facteur vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{y}_t | \hat{\mathbf{x}}_t) p(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}) d\hat{\mathbf{x}}_t = p(\mathbf{y}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}),$$

le dernier terme étant appelé vraisemblance prédite. Cela permet de mettre à jour les poids suivant la formule suivante :

$$\gamma_t^{(i)} \propto \gamma_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}). \quad (1.29)$$

Doucet *et al.* indiquent que la variance du poids suivant la loi de proposition $\pi(\hat{\mathbf{x}}_t | \hat{\mathbf{x}}_{0:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})$ est nulle sous ces conditions, ce qui revient bien à la propriété d'indépendance vis à vis du tirage aléatoire évoquée ci-dessus. Néanmoins, cela ne signifie pas que les poids des différentes particules sont identiques, comme le montre l'équation (1.29), puisque ce poids dépend de la particule à l'instant $t - 1$.

Contrairement au filtre de Kalman d'ensemble présenté précédemment qui approche la loi de filtrage à partir d'hypothèses gaussiennes, le filtre particulière constitue une méthode d'échantillonnage exacte de la loi *a posteriori*.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les principes des estimations déterministes et bayésiennes. Les méthodes séquentielles liées au filtre de Kalman ont été décrites afin de donner un

aperçu des techniques couramment utilisées pour le suivi temporel de variables de faibles dimensions. Lorsque la dimension de l'espace d'état est très grande, il devient difficile de manipuler des matrices de covariance d'erreur, et encore plus de les propager. Les techniques d'échantillonnage reposant sur une représentation de l'état par des particules permettent alors de répondre à ce problème. Nous avons ainsi présenté le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire qui utilisent les ensembles de particules d'une manière distincte. Ces deux approches possèdent cependant chacune des limitations. Pour cette raison, une nouvelle extension du filtre de Kalman d'ensemble par la théorie du filtrage particulaire est proposée dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Filtre de Kalman d'ensemble pondéré

2.1 Introduction

Une large part du travail des météorologues et des océanographes consiste à prédire le comportement des fluides qu'ils observent, afin par exemple d'anticiper des catastrophes naturelles [124]. L'acuité de la prédiction de données futures repose sur la qualité du modèle physique décrivant l'évolution du système d'une part, et sur l'initialisation de ce modèle d'autre part. Cette initialisation est donnée par la distribution de probabilités de l'état du système à l'instant présent, lui-même estimé à partir de toutes les données passées.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, R.E. Kalman a donné une formulation analytique optimale de la loi de filtrage dans le cas où le modèle M est linéaire. Le filtre de Kalman étendu peut être utilisé dans le cas où le modèle est linéarisable et faiblement non linéaire. Cependant, ces hypothèses sont rarement satisfaites dans le contexte de l'imagerie fluide et de l'océanographie ou de la météorologie.

En considérant un échantillonnage de l'état par des particules, le filtre de Kalman d'ensemble [65] et le filtre particulaire [80, 81] introduits dans le chapitre précédent permettent de gérer des modèles non linéaires. Ces deux méthodes possèdent un certain nombre de similitudes : échantillonnage stochastique, présence d'une phase de prédiction et d'une phase de correction. La phase de prédiction commune consiste à déplacer chaque particule à l'aide la loi de propagation. La principale différence réside dans la phase de correction, qui se traduit par le calcul d'un poids pour chaque particule dans le filtre particulaire et par le redéploiement des particules pour le filtre de Kalman d'ensemble. Il en résulte que chacune de ces deux méthodes présente un avantage spécifique que l'autre n'a pas :

- Le filtre de Kalman d'ensemble repositionne, dans la phase de correction, les particules à des endroits où elles sont significatives, ce qui permet de réduire le nombre de particules nécessaires.
- Le filtre particulaire repose sur une formulation probabiliste exacte de la loi de filtrage séquentielle. Il donne donc un résultat exact aux erreurs d'échantillonnage près même dans le cas d'une dynamique non linéaire.

Le filtre de Kalman d'ensemble a été largement utilisé pour des espaces d'état de grandes

dimensions et pour des dynamiques fortement non linéaires. Il a été montré expérimentalement que ce filtre conduit à une approximation correcte de la loi de filtrage recherchée, même pour un petit nombre de particules. En comparaison, un filtre particulaire ne peut assurer une telle performance qu'à condition d'utiliser une loi de propagation qui soit suffisamment guidée par les observations futures (comme dans le filtre d'importance optimale évoqué dans [8, 63]). Cependant, les comparaisons entre filtre de Kalman d'ensemble et filtre particulaire ont la plupart du temps été menées en utilisant un filtre particulaire de type *Bootstrap*, où la loi de propagation se résume à la dynamique [102, 154, 171] et ne tient pas compte des observations. En cas de forte innovation (écart entre prédiction et observation), ce type de filtre ne peut être performant qu'au prix d'un accroissement du nombre de particules, ce qui est rédhibitoire pour les applications visées.

L'idée développée dans la section 2.2 (qui est plus ou moins suggérée dans [19]) consiste à utiliser la propagation de particules du filtre de Kalman d'ensemble en y adjoignant une pondération basée sur le principe du filtre particulaire avec échantillonnage d'importance, pour obtenir une formulation exacte de la solution de filtrage.

Des simulations pour des dynamiques linéaires et non linéaires sont présentées pour des variables d'états unidimensionnelles dans la section 2.3 afin de montrer l'intérêt de l'introduction de la pondération des particules. L'application de la méthode proposée aux variables de grandes dimensions est enfin étudiée dans la section 2.4. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec Nicolas Gengembre, dans le cadre du projet FLUID.

2.2 Extension au filtre de Kalman d'ensemble pondéré

Dans ce qui suit, nous étudions la manière de rendre le filtre de Kalman d'ensemble exact dans un cas discret à l'aide du formalisme du filtrage particulaire, et évaluons les performances des différentes approches existantes.

Le principe de l'échantillonnage d'importance décrit dans le paragraphe 1.4.5 indique qu'un grand nombre de lois de propagation peuvent être envisagées pour créer un filtre particulaire, même si tous les choix n'auront pas la même efficacité. Il suffit alors de remarquer que les N particules $x_t^{(i)}$ de dimension n du filtre de Kalman d'ensemble sont propagées suivant la loi donnée par l'équation (1.22) :

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)} + K^e(\mathbf{y}_{t+1} + \epsilon^{(i)} - \mathbb{H}\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{(i)}),$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = (1 - K^e H)\mathbb{M}(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) + K^e \mathbf{y}_t + K^e \epsilon_t^{(i)} + (1 - K^e H)w_t^{(i)}, \quad (2.1)$$

$$= \mu_t^{(i)} + \gamma_t^{(i)}, \quad (2.2)$$

où l'on a introduit l'espérance de $\mathbf{x}_t^{(i)}$: $\mu_t^{(i)} = (1 - K^e H)\mathbb{M}(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) + K^e \mathbf{y}_t$. Le terme $\gamma_t^{(i)}$ est une variable aléatoire réunissant les deux derniers termes de la première équation de l'expression 2.1. C'est la somme de deux variables gaussiennes centrées et pondérées, et cette variable aléatoire suit donc elle-même une loi normale :

$$\gamma_t^{(i)} \sim \mathcal{N}\left(0, (1 - K^e H)Q(1 - K^e H)^T + K^e R K^{eT}\right). \quad (2.3)$$

On notera

$$\Sigma_t^e = (1 - K^e H)Q(1 - K^e H)^T + K^e R K^{eT}, \quad (2.4)$$

la variance de cette loi. Pour rendre exacte, à l'échantillonnage près, l'estimation de la loi de filtrage, le principe du filtrage particulaire nous dit que chaque membre de l'ensemble doit être pondéré à chaque instant t avec un poids $\gamma_t^{(i)}$ défini itérativement par :

$$\gamma_t^{(i)} \propto \gamma_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{\mathcal{N}(x_t^{(i)} - \mu_t^{(i)}; 0, \Sigma_t^e)}, \text{ et } \sum_{i=1}^N \gamma_t^{(i)} = 1. \quad (2.5)$$

La loi de propagation dépend du gain de Kalman d'ensemble estimé à partir des moyenne et covariance des particules prédites $\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)}$. Bien sûr, comme les membres d'ensemble sont à présent pondérés, la phase de prédiction et d'estimation du gain doit être modifiée. Ainsi, l'estimation de la moyenne, précédemment fournie par (1.19) devient

$$\overline{\mathbf{x}_{t|t-1}} = \sum_{i=1}^N \gamma_{t-1}^{(i)} \mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)}. \quad (2.6)$$

La variance de cet estimateur est exprimée à partir de la variance des $\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)}$ par

$$\text{var}(\overline{\mathbf{x}_{t|t-1}}) = \text{var}(\mathbf{x}_{t|t-1}) \sum_{i=1}^N (\gamma_{t-1}^{(i)})^2. \quad (2.7)$$

Ceci nous permet d'écrire que l'estimateur non biaisé de la variance de cet échantillon s'exprimera par

$$P_{t|t-1}^e = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{t-1}^{(i)} \left(\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)} - \overline{\mathbf{x}_{t|t-1}} \right) \left(\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)} - \overline{\mathbf{x}_{t|t-1}} \right)^T}{1 - \sum_{i=1}^N (\gamma_{t-1}^{(i)})^2}. \quad (2.8)$$

On peut vérifier que l'espérance de cette grandeur est bien la variance des $\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)}$. À partir de ces nouvelles définitions, on peut calculer à chaque étape le gain de Kalman d'ensemble et la nouvelle loi de propagation des particules. Les formulations ci-dessus peuvent également s'appliquer aux nuages de particules obtenus après la phase de correction (avec les nouveaux poids), les moyennes et variances décrivant alors la loi de filtrage a posteriori.

Notons que si l'on n'évalue pas le gain de Kalman d'ensemble K^e sur les particules mais qu'on lui donne certaines valeurs particulières, on peut retrouver certains filtres connus :

- En forçant K^e à zéro, on retrouve le filtre Bootstrap évoqué dans le chapitre précédent.
- De façon similaire, on peut construire un filtre avec une loi de propagation centrée sur l'observation future en forçant K^e à 1. La mise à jour des poids fera alors intervenir la loi de la dynamique entre les positions d'une particule entre $t-1$ et t .
- Enfin, si l'on choisit un gain valant $K^e = QH^T(HQH^T + R)^{-1}$, on retrouve toutes les caractéristiques du filtre particulaire d'importance optimale [8, 63].

Cette procédure est testée dans différents cas de figures dans la section suivante. On en démontre les performances sur des problèmes scalaires.

2.3 Expérimentations unidimensionnelles

Le cadre des expérimentations menées ci-dessous est restreint à des configurations unidimensionnelles permettant de rester dans un domaine propice à l'utilisation des filtres de Kalman d'ensemble (on observe le comportement des algorithmes avec un petit nombre de particules). Toutefois, l'utilisation des filtres de Kalman d'ensemble est également motivée dans les cas où l'espace d'état est de grande dimension. Certains développements méthodologiques du filtrage de Kalman d'ensemble (voir référence [66]), sont inhérents aux problèmes liés à cette dimension : en particulier, la matrice de covariance d'ensemble n'est jamais calculée explicitement car sa dimension en n^2 est prohibitive. Nous laissons ce problème de côté temporairement, il sera abordé par la suite.

2.3.1 Cas linéaire

Nous définissons dans un premier temps des scénarios scalaires à dynamique linéaire, pour lesquels nous connaissons les lois de filtrage optimales puisqu'elles sont fournies par le filtre de Kalman classique. La variable d'état x_t évolue suivant la dynamique

$$x_t = x_{t-1} + w_t,$$

où w_t est un bruit blanc gaussien de variance Q . Le modèle de mesure est

$$y_t = x_t + \epsilon_t, \tag{2.9}$$

où ϵ_t est un bruit blanc gaussien de variance R . Les variances sont identiques pour tous les pas de temps. On définit également une loi de distribution de l'état initial (à $t = 0$) centrée en zéro et de variance B .

Des tirages aléatoires de dynamiques et de mesures ont été effectués à partir de différentes valeurs de Q , R et B pour former plusieurs scénarios (pour 30 pas de temps successifs).

Ces scénarios sont ensuite testés sur le filtre de Kalman d'ensemble (ENKF) et sur le filtre de Kalman d'ensemble pondéré (*i.e.* le filtre particulaire avec loi d'importance fournie par le filtre de Kalman d'ensemble, noté WENKF dans ce qui suit). Dans un premier temps, la pondération a été calculée à partir de l'équation (2.5), avec Σ_t^e donné par (2.4).

Du fait de l'importance que peut prendre la simulation des variables aléatoires en jeu (pour chaque particule, un premier tirage correspond à la loi de la dynamique, et un autre à l'observation), les deux algorithmes sont exécutés de manière conjointe en partageant les mêmes tirages. De plus, les tests sont effectués un grand nombre de fois (5000 fois dans nos expériences). Ils sont évalués par comparaison avec le résultat du filtre de Kalman : on calcule pour les deux algorithmes l'écart quadratique moyen entre l'espérance de la loi de distribution du filtre de Kalman et celle du filtre concerné. Ces premiers résultats sont résumés dans le tableau 2.1.

Pour le troisième scénario par exemple, le filtre de Kalman d'ensemble pondéré conduit à un meilleur résultat (*i.e.* plus proche du résultat optimal de Kalman) dans 63.82% des cas. L'écart quadratique moyen sur l'ensemble de la séquence entre le résultat de Kalman et celui de l'algorithme est donc plus faible dans 63.82% des cas. Cet écart quadratique moyen (ramené à un pas de temps) vaut 0.0932.

On peut conclure de ces premières expériences que, même dans ces cas de figure favorables au filtre de Kalman d'ensemble (puisque celui-ci fait l'hypothèse d'une distribution prédite gaussienne, qui est vraie si la dynamique est linéaire et si l'initialisation est gaussienne), la prise en compte d'une pondération des particules permet la plupart du temps d'améliorer les résultats.

Scénario			Résultats		
Q	R	B	WENKF meilleur (%)	écart quadratique WENKF	écart quadratique ENKF
0.5	1	0.5	51.4%	0.0863	0.0871
1	1	5	61.20%	0.0950	0.1043
1	1	1	63.82%	0.0932	0.1044
1	1	10	55.92%	0.1125	0.1184
1	0.5	1	76.08%	0.0576	0.0726
1	0.5	1	75.14%	0.0502	0.0613
0.5	1	0.5	49.66%	0.0865	0.0868
1	0.2	1	80.18%	0.0211	0.0264
0.2	1	0.2	38.24%	0.0794	0.0684
10	2	10	78.3%	0.2055	0.2481

TAB. 2.1: Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios linéaires, avec $N = 10$ particules utilisées.

L'utilisation d'une pondération des particules permet de prendre en compte le fait que le gain de Kalman estimé (le gain d'ensemble) n'est qu'une approximation du gain réel. En contrepartie, pour un petit nombre de particules, le fait d'appliquer un rééchantillonnage (par ailleurs nécessaire pour garder des particules significatives) introduit un biais qui nuit aux performances de l'algorithme. En effet, l'espérance et la variance d'un nuage de particules ne sont pas les mêmes avant et après rééchantillonnage. Cette contrepartie semble être plus dommageable quand Q est faible devant R , à l'image de l'avant dernier scénario, seul scénario où la pondération n'améliore pas le résultat.

En augmentant le nombre de particules, les sources d'erreur se trouvent réduites pour les deux algorithmes, et les résultats convergent vers le résultat analytique du filtre de Kalman (voir figure 2.1), ceci à peu près à la même vitesse. La proportion des exécutions pour lesquelles le filtre de Kalman d'ensemble pondéré conduit à un meilleur résultat varie peu ou lentement.

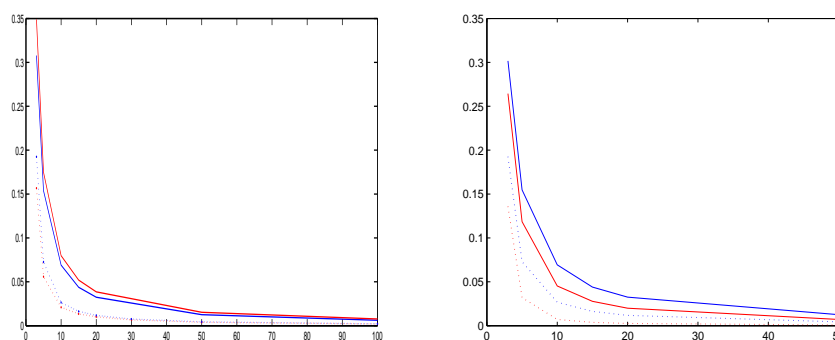


FIG. 2.1: Comparaison de l'ENKF (courbe bleue) et du WENKF (courbe rouge) en fonction du nombre de particules utilisé pour 8 scénarios linéaires. En abscisse, le nombre de particules, en ordonnée, l'écart quadratique moyen vis à vis de l'espérance de la distribution de filtrage optimale fournie par le filtre de Kalman.

Une amélioration significative des résultats dans un contexte linéaire pour le filtre de Kalman d'ensemble pondéré peut être obtenue en calculant une loi gaussienne réévaluée à partir des simulations réelles des $\gamma_t^{(i)}$ de l'expression (2.1) à la place de la loi de propagation théorique. Ainsi, en calculant la moyenne empirique $\bar{\gamma}_t$ et la variance empirique $\bar{\Sigma}_t^e$ avec les formules

$$\bar{\gamma}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_t^{(i)},$$

et

$$\bar{\Sigma}_t^e = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\gamma_t^{(i)} - \bar{\gamma}_t \right) \left(\gamma_t^{(i)} - \bar{\gamma}_t \right)^T,$$

et en mettant les poids à jour suivant la formule suivante

$$\gamma_t^{(i)} \propto \gamma_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{\mathcal{N}\left(x_t^{(i)} - \mu_t^{(i)}; \bar{\gamma}_t, \bar{\Sigma}_t^e\right)}, \quad (2.10)$$

on décrit de manière plus correcte la loi de propagation réellement utilisée, et le tirage aléatoire est mieux compensé¹.

Le tableau 2.2 donne les résultats obtenus sur les mêmes scénarios mais en utilisant la loi de propagation empirique. Cette fois les résultats sont systématiquement meilleurs pour le WENKF, et ceci de manière significative (proportion de tests favorables supérieurs à 90% dans la plupart des configurations). Précisons que ces résultats sont obtenus à temps de calcul comparables puisque le nombre de particules est le même pour les deux algorithmes (dans les applications réelles, chaque particule induit un calcul de prédiction qui est supposé coûteux comparativement à tout le reste). Le seul calcul supplémentaire réside dans l'évaluation du poids. Le calcul de ce poids pourra poser problème car il nécessite un calcul de covariance empirique, matrice de taille n^2 . Nous étudierons donc la manière de calculer les poids sans nécessiter d'une taille mémoire rédhibitoire.

2.3.2 Cas non linéaire

On étudie maintenant le WENKF dans le cas de dynamiques non linéaire, domaine d'application pour lequel le filtre de Kalman d'ensemble a été développé. La dynamique choisie est de la forme suivante :

$$x_t = \sin(3x_{t-1}) + w_t,$$

tandis que le modèle de mesure 2.9 reste inchangé. De même, on conserve les expressions des variances d'initialisation, de bruit de mesure et de bruit de dynamique.

Cinq scénarios ont été créés avec une telle dynamique. Comme précédemment, on simule un grand nombre de tests (5000) et on regarde quel algorithme donne les meilleures performances. Cependant, nous ne disposons plus du résultat analytique pour le filtrage optimal que le filtre de Kalman fournissait précédemment, puisqu'il ne s'applique que dans le cas linéaire. Pour évaluer

¹Pham [154] propose de contrôler les tirages aléatoires en s'assurant que ceux-ci ont bien l'espérance et la variance voulues, suivant une méthode d'échantillonnage "exacte au second ordre". L'utilisation des poids et de la loi de propagation empirique dans le WENKF permet de la même manière de compenser les effets des erreurs de simulation. On verra dans le paragraphe suivant que le WENKF compense également l'erreur d'approximation dans le cas non linéaire, ce que l'algorithme d'échantillonnage exact au second ordre ne peut pas faire.

Scénario			Résultats		
Q	R	B	WENKF meilleur (%)	écart quadratique WENKF	écart quadratique ENKF
0.5	1	0.5	92.8%	0.0427	0.0871
1	1	5	97.8%	0.0422	0.1043
1	1	1	98.06%	0.0407	0.1044
1	1	10	92.44%	0.0589	0.1184
1	0.5	1	98.94%	0.0267	0.0726
1	0.5	1	99.5%	0.0201	0.0613
0.5	1	0.5	92.06%	0.0422	0.0868
1	0.2	1	99.68%	0.0071	0.0264
0.2	1	0.2	77.16%	0.0459	0.0684
10	2	10	99.88%	0.0638	0.2481

TAB. 2.2: **Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios linéaires**, avec $N = 10$ particules utilisées et loi de propagation empirique.

les estimations fournies par les deux algorithmes, il est essentiel de prendre en compte l'aspect non gaussien des lois de filtrage obtenues. On évalue donc une Erreur Quadratique Moyenne (EQM) entre l'état réel x_t^{true} (vérité terrain) et les réalisations de la loi de filtrage que sont les particules, affectées de leur poids le cas échéant, soit :

$$EQM = \sum_{i=1}^N \gamma_t^{(i)} \left(x_t^{true} - x_t^{(i)} \right)^2. \quad (2.11)$$

La même grandeur est utilisée pour le filtre de Kalman d'ensemble, en prenant tous les poids identiques et valant $1/N$.

Scénario			Résultats		
Q	R	B	WENKF meilleur (%)	EQM WENKF	EQM ENKF
0.2	0.2	0.2	61.2%	0.2387	0.2670
0.2	0.2	1	59.6%	0.2296	0.2573
0.1	0.2	1	58.9%	0.2704	0.2793
0.1	0.2	1	60.66%	0.2247	0.2446
0.4	0.2	1	57.8%	0.2628	0.2874

TAB. 2.3: **Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios non linéaires**, avec $N = 10$ particules utilisées.

Le tableau 2.3 résume les résultats sur les cinq scénarios non linéaires pour 10 particules. On constate que la loi de filtrage obtenue avec le WENKF est meilleure dans 60% des cas environ car elle s'écarte moins de la vérité terrain (ces résultats ne sont pas directement comparables aux cas linéaires puisque les critères d'évaluation diffèrent). En faisant croître le nombre de particules (voir figure 2.2), on constate de surcroît que les deux méthodes ne convergent pas vers la même loi de filtrage. Les approximations intrinsèques de l'ENKF sont en effet corrigées par la pondération du

WENKF. La distance quadratique représentant l'écart de la distribution de filtrage à la loi vraie est plus faible pour le filtre WENKF, mettant ainsi en valeur son caractère exact à l'échantillonnage près. Notons que dans certains cas, la distance à l'état vrai du WENKF peut augmenter à partir d'un certain nombre de particules pour se restabiliser par la suite. Ceci indique que les particules supplémentaires constituent la queue de la distribution dont l'état vrai est éloigné. Avec peu de particules, seules les plus pertinentes sont choisies ce qui réduit la distance à l'état vrai.

Il arrive, de façon marginale, que la limite de l'écart à l'état vrai du résultat du WENKF soit au niveau de l'ENKF, voire légèrement supérieur. Cela ne remet cependant pas en cause le bon comportement général du WENKF vis à vis du filtre de Kalman d'ensemble.

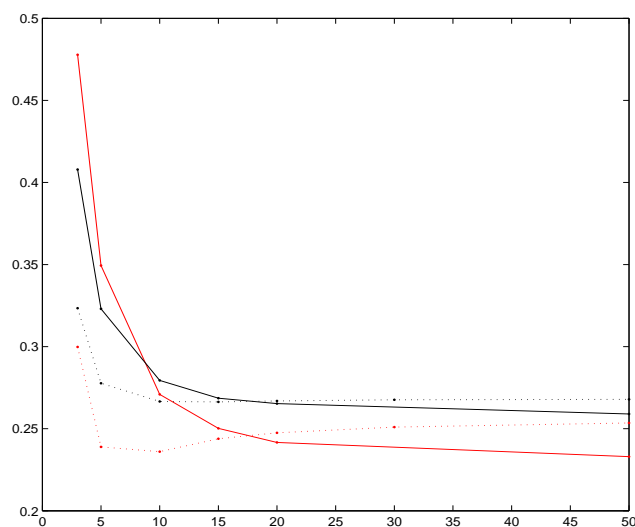


FIG. 2.2: Comparaison de l'ENKF (courbe noire) et du WENKF (courbe rouge) dans le cas non linéaire en fonction du nombre de particules utilisé pour le premier (en pointillé) et le troisième scénario (en trait plein). Nombre de particules en abscisse, distance quadratique entre la vérité terrain et la distribution de filtrage en ordonnée.

2.4 Application à des variables de grandes dimensions

Nous avons présenté ci-dessus le filtre de Kalman d'ensemble pondéré comme une amélioration du filtre de Kalman d'ensemble classique respectant un échantillonnage rigoureux de la loi de filtrage et permettant, lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, de représenter la distribution exacte de l'état recherché.

Pour des applications réalistes mettant en jeu des variables d'états de grandes dimension (ex : suivi de champs de vitesse d'un écoulement), il faut à présent vérifier que le filtre de Kalman d'ensemble pondéré n'induit pas un coût de calcul prohibitif. Le filtre de Kalman d'ensemble classique a d'ailleurs été développé en prenant en compte cette dimension pratique.

Ajoutons que le filtre de Kalman d'ensemble pondéré n'est rien d'autre qu'un filtre particulaire

avec une loi d'importance particulière. La question du coût de calcul évoquée ci-après constitue l'intérêt majeur du travail présenté.

2.4.1 Calcul des poids des particules à partir des lois échantillonnées

L'équation (2.10) doit être évaluée pour affecter des poids aux membres de l'ensemble après propagation. On s'intéresse donc aux trois probabilités que cette expression fait intervenir. Celles-ci mettent en jeu des lois gaussiennes avec des covariances représentées par des matrices de taille $n \times n$. Focalisons nous tout d'abord sur la loi $p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$ qui fait intervenir le modèle de dynamique choisi (modèle gaussien en l'occurrence). La valeur obtenue pour une particule sera dépendante de l'écart entre la prédiction $\mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)} = \mathbb{M}(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$ et la position finale $\mathbf{x}_t^{(i)}$ de la particule. Cet écart, noté $\mathbf{e}_t^{(i)}$, vaut

$$\mathbf{e}_t^{(i)} = \mathbf{x}_t^{(i)} - \mathbf{x}_{t|t-1}^{(i)}. \quad (2.12)$$

La loi du bruit associé à la dynamique est gaussienne et définie par la covariance Q , la densité de probabilité pour la particule i donnée s'écrit, à une constante de normalisation près :

$$p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_t^{(i)T} Q^{-1} \mathbf{e}_t^{(i)}\right), \quad (2.13)$$

où l'on voit apparaître l'inversion de la matrice de covariance de taille $n \times n$ et de rang *a priori* plein. Une telle opération ne peut être effectuée raisonnablement pour des problèmes de grandes dimensions. Il s'agit néanmoins d'un problème pratique récurrent dans la littérature relative au filtre de Kalman d'ensemble [66], qui a été résolu en tirant parti du fait que les matrices de covariance sont représentées par un ensemble de particules qui sous-échantillonne l'espace de grande dimension (on réduit ainsi la dimension, à l'image d'une analyse en composantes principales). La procédure qui suit illustre ce principe.

Pour le cas évoqué plus haut, la matrice Q est représentée par l'ensemble des perturbations simulées à partir de cette loi, soit les $\mathbf{w}_t^{(i)}$, $i = 1 \dots N$, introduits plus haut². On note V la matrice $n \times N$ dont les colonnes sont les $\mathbf{w}_t^{(i)}$. La matrice Q peut être approchée par son estimation empirique, soit :

$$Q \sim Q_e = \frac{VV^T}{N-1}. \quad (2.14)$$

La matrice Q_e étant de rang inférieur ou égal à N . Elle n'est donc pas inversible. On peut cependant utiliser la théorie de la décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition ou SVD) et le calcul de matrices pseudo-inverses. Ainsi, si l'on exprime V par sa décomposition en valeurs singulières, soit $V = USW^T$, avec U et W deux matrices orthogonales de taille $n \times N$ et $N \times N$ respectivement, et S une matrice diagonale de taille $N \times N$ (on utilise une version réduite de la SVD). Par définition de l'orthogonalité, l'inverse des matrices U et W est égale à leur transposée. La matrice S , quant à elle, contient en sa diagonale les N valeurs singulières de la matrice initiale V , dont certaines peuvent être nulles. On définit alors la pseudo-inverse S^+ de cette matrice par une matrice diagonale dont les termes sont les inverses des termes de S si ceux-ci

²Il est important de noter que la simulation des échantillons ne fait pas intervenir la matrice de covariance non plus. La procédure adoptée pour cette simulation est calquée sur la proposition de Evensen de génération de champs pseudo-aléatoires (voir [66]). En pratique, cette procédure est reprise directement du code Fortran de Evensen.

sont significativement non nuls, et 0 sinon. On peut donc définir la matrice pseudo-inverse Q_e^+ de Q_e et exprimer la quantité recherchée par

$$p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}_t^{(i)T} Q_e^+ \mathbf{e}_t^{(i)}\right) = \exp\left(-\frac{N-1}{2} \mathbf{e}_t^{(i)T} U S^+ S^+ U^T \mathbf{e}_t^{(i)}\right). \quad (2.15)$$

Le calcul de cette probabilité est ainsi effectué à l'aide des étapes suivantes :

1. Décomposition SVD d'une matrice V
2. Calcul de S^+ .
3. Calcul de $\mathbf{e}_1^{(i)} = U^T \mathbf{e}_t^{(i)}$ pour tous les i (vecteur de taille $N \times 1$).
4. Calcul de $\mathbf{e}_2^{(i)} = S^+ \mathbf{e}_1^{(i)}$ (vecteur de taille $N \times 1$).
5. Calcul du scalaire $e_3^{(i)} = \mathbf{e}_2^{(i)T} \mathbf{e}_2^{(i)}$
6. La quantité recherchée est $\exp\left(-\frac{N-1}{2} e_3^{(i)}\right)$.

Dans ce calcul, aucune étape n'est de complexité supérieure à nN , et aucune matrice de taille supérieure à $n \times N$ n'est stockée en mémoire. L'échantillonnage par un nombre d'échantillons très inférieur à la taille de l'espace d'état permet donc de rendre numériquement faisable un calcul dont la complexité initiale était prohibitive. La démarche est rigoureusement identique pour le calcul de la seconde probabilité du numérateur de l'expression des poids (2.10). Il n'en va par contre pas de même pour le dénominateur.

2.4.2 Le cas particulier de la loi de propagation

Le dénominateur de l'expression (2.10) contient la loi de propagation elle-même. Cette grandeur recherchée peut être écrite, à une constante de normalisation près, à partir des paramètres définissant la loi de propagation introduits au paragraphe 2.2, soit :

$$\pi(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_t) = \mathcal{N}(\gamma_t^{(i)}; 0, \Sigma_t^e) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma_t^{(i)T} (\Sigma_t^e)^{-1} \gamma_t^{(i)}\right). \quad (2.16)$$

Si l'on définit une matrice Γ , de taille $n \times N$, dont les colonnes sont les échantillons de la loi de propagation $\gamma_t^{(i)}$ (on omet la dépendance en temps pour simplifier les notations), la matrice de covariance peut être approchée par son extension empirique suivant la méthode décrite plus haut :

$$\Sigma_t^e \simeq \frac{\Gamma \Gamma^T}{N-1}. \quad (2.17)$$

Pour continuer à garder des notations simples, on écrit la décomposition en valeurs singulières de Γ avec les mêmes notations que celles utilisées précédemment pour V . On a $\Gamma = U S W^T$ et l'expression précédente devient :

$$\Sigma_t^e \simeq \frac{U S S^T U^T}{N-1}. \quad (2.18)$$

Nous allons également noter Ω , la matrice de composantes Ω_{ij} , définie par

$$\Omega = \frac{1}{2} \Gamma^T (\Sigma_t^e)^{-1} \Gamma, \quad (2.19)$$

de sorte que la contribution au poids de chaque particule i définie par l'équation (2.16) est proportionnelle à $\exp(-\Omega_{ii})$.

En remplaçant la matrice Σ^e par son approximation (2.18), il faut réaliser non plus une inversion mais une pseudo-inversion :

$$\Omega = \frac{1}{2} \Gamma^T \left(\frac{U S S^T U^T}{N-1} \right)^+ \Gamma, \quad (2.20)$$

$$= \frac{N-1}{2} \Gamma^T U (S S^T)^+ U^T \Gamma, \quad (2.21)$$

$$= \frac{N-1}{2} W S S^+ S^+ S W^T. \quad (2.22)$$

La matrice Γ étant de taille $n \times N$, avec $N < n$, le rang de cette matrice, et donc le nombre de valeurs singulières non nulles, est au plus N . Comme les colonnes de Γ sont issues de la simulation d'une loi normale centrée, leur sera proche de 0 et le rang réel sera ainsi au plus égal à $N-1$. Nous le supposons égal à cette valeur car l'ensemble des échantillons est sensé représenter un espace de dimension bien plus grande que N et tout alignement de particules constituerait une perte d'efficacité.

De ce fait, on a $S S^+ = \mathbf{1}_N^{N-1}$, où $\mathbf{1}_n^m$ définit une matrice de taille $n \times n$ dont les m premiers termes diagonaux valent 1 et tous les autres 0. Ainsi, on a

$$\Omega = \frac{N-1}{2} W \mathbf{1}_N^{N-1} W^T, \quad (2.23)$$

d'où l'on déduit que

$$\Omega_{ii} = \frac{N-1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} W_{ik}^2. \quad (2.24)$$

Comme les colonnes de W sont des vecteurs normés, cette expression devient :

$$\Omega_{ii} = \frac{N-1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} [1 - W_{iN}^2]. \quad (2.25)$$

Cette grandeur ne dépend alors plus que des composantes du dernier vecteur de la matrice orthogonale W , *i.e.* celle correspondant à la N -ième valeur singulière égale à zéro. Autrement dit, ce vecteur appartient au noyau de la matrice Γ . Ce noyau est dirigé suivant le vecteur $(1, 1, \dots, 1)^T$, puisque l'ensemble des échantillons est à moyenne nulle (ce qui s'écrit $\Gamma(1, 1, \dots, 1)^T = 0$ conformément à la définition du noyau)

Comme par ailleurs les vecteurs colonnes de W sont normés, $W_{iN}^2 = 1/N$, on en conclut que $W_{ii} = W_{jj}, \forall (i, j) \in [1, N]^2$ et donc que $\Omega_{ii} = \Omega_{jj}, \forall (i, j) \in [1, N]^2$. Ainsi, le dénominateur de la formule de mise à jour des poids (2.10) est indépendant du numéro de la particule (quand le nombre de particules est inférieur à la taille de l'espace d'état) et peut être ignoré, ce qui dispense d'un calcul.

2.4.3 Expérimentations

Les expérimentations sont effectuées sur des scénarios représentant des mouvements fluides. On cherche à suivre la vorticité $\xi = v_x - u_y$ d'un champ dense de mouvement turbulent 2D

$\mathbf{v} = [u, v]^T$. Le modèle dynamique utilisé est une discrétisation de la formulation incompressible 2D des équations de Navier-Stokes :

$$\xi_t = \xi_{t-1} - \nabla \xi_{t-1} \cdot \mathbf{v}_{t-1} + \frac{1}{Re} \Delta \xi_{t-1} + w_t \quad (2.26)$$

où w_t est un bruit blanc gaussien de variance Q et Re est le nombre de Reynolds caractérisant la turbulence de l'écoulement. En introduisant l'intégrale de Biot-Savart, le champ dense peut être retrouvé à partir de sa vorticit   :

$$\mathbf{v}_t = \nabla G * \xi_t, \quad (2.27)$$

où $G(\bullet) = \frac{\ln(|\bullet|)}{2\pi}$ est le noyau de Green associ      l'op  rateur Laplacien bidimensionnel. La mise en   uvre d'une tel syst  me dynamique est hors de propos dans ce chapitre. Elle sera n  anmoins détaillé plus pr  cis  ment dans le chapitre 5 sur l'estimation de mouvements fluides. Le mod  le de mesure lin  aire (2.9) est toujours consid  r  .

L'incertitude sur la dynamique (appelé aussi bruit de mod  le) et celle sur l'observation sont calculés    partir de champs pseudo-al  atoires simul  s suivant la m  thode d'Evensen, développé en annexe de l'article [65]. Pour ces sc  narios synth  tiques, on poss  de donc des observations ainsi que la v  rit   terrain permettant de tester les performances des diff  rents algorithmes. Les erreurs sont alors calculés par une extension de l'expression (2.11) au cas vectoriel :

$$EQM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \gamma_t^{(i)} (\mathbf{x}_t^{true} - \mathbf{x}_t^{(i)})^T (\mathbf{x}_t^{true} - \mathbf{x}_t^{(i)}) \quad (2.28)$$

Il faut souligner que l'am  lioration apporté par le WENKF (rendu exact pour un nombre infini de particules) souffre d'une contre partie : le nombre de particules effectivement utilis   pour   valuer un gain de Kalman d'ensemble est plus faible encore que pour l'ENKF classique et cela peut nuire au bon positionnement des particules en sortie d'analyse. On a vu sur certains sc  narios scalaires non lin  aires que l'ENKF   tait plus performant pour N faible et moins performant lorsque N augmente. Ceci peut s'expliquer par une mauvaise estimation des covariance due au petit nombre de particules effectives dans le WENKF : les particules de poids faible comptent peu dans cette estimation et sont   ventuellement rejetés    l'issue de la phase de r   chantillonnage³.

Une mani  re d'  valuer quantitativement ce qui vient d'  tre dit est de calculer la taille effective d'  chantillon N_{ess} , exploité par Doucet *et al.* [63], et d  finie par :

$$N_{ess} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\gamma_t^{(i)})^2}. \quad (2.29)$$

   l'issue de l'  tape de r   chantillonnage, le nombre de particules distinctes sera proche de la valeur de N_{ess} . Dans les exp  rimentations effectués, les r  sultats en termes d' EQM sont sensiblement les m  mes (de l'ordre de 10% moins bons pour le WENKF) alors que la taille effective d'  chantillons est plus de 10 fois inf  rieure. Cela suffit    confirmer le bon comportement du WENKF. Les r  sultats pour les diff  rentes exp  rimentations sont présentés dans le tableau 2.4.

³Dans toutes nos exp  rimentations et dans la mise en   uvre, la phase de r   chantillonnage est effectué syst  matiquement    chaque pas de temps. L'exp  rience montre que cela permet d'  tre le plus performant. Du reste, cela simplifie l'exploitation du code d'Evensen pour le d  veloppement du WENKF.

Scénario			Résultats		
Q	R	B	Méthode	EQM	Temps (s)
0.1	0.1	0.1	ENKF 10	0.0415	119
			WENKF 10	0.0417	68
			WENKF 30	0.0296	96
0.1	0.3	0.3	ENKF 10	0.1002	190
			WENKF 10	0.1055	92
			WENKF 30	0.0919	150
0.1	1	1	ENKF 10	0.6125	614
			WENKF 10	0.7074	265
			WENKF 30	0.4734	423
0.3	0.1	0.1	ENKF 10	0.2801	278
			WENKF 10	0.2695	198
			WENKF 30	0.2059	238
0.3	0.3	0.3	ENKF 10	0.4031	306
			WENKF 10	0.4190	182
			WENKF 30	0.3168	232
0.3	1	1	ENKF 10	0.8965	600
			WENKF 10	0.9031	296
			WENKF 30	0.8264	504
1	0.1	0.1	ENKF 10	2.6089	560
			WENKF 10	2.3391	283
			WENKF 30	2.0391	493
1	0.3	0.3	ENKF 10	2.9362	649
			WENKF 10	2.9667	313
			WENKF 30	2.2728	542
1	1	1	ENKF 10	3.7851	716
			WENKF 10	3.7932	371
			WENKF 30	2.8274	522

TAB. 2.4: **Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios non linéaires 2D** avec 100 réalisations de chaque scénario. Le ENKF avec $N = 10$ particules est comparé avec deux WENKF composés respectivement de $N = 10$ et $N = 30$ particules.

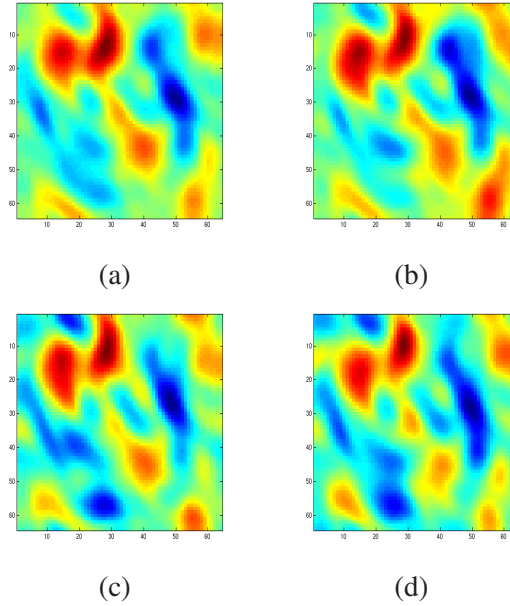


FIG. 2.3: **Comparaison EnKF/ WENKF : cartes de vorticité.** (a) Carte de vorticité réelle. (b) Carte de vorticité observée. (c) Carte de vorticité reconstruite par ENKF. (d) Carte de vorticité reconstruite par WENKF.

De plus, dans les applications fluides (océanographie, prévision météorologique, ...), la propagation de chaque membre de l'ensemble est une phase coûteuse de l'algorithme. La phase de rééchantillonnage permet alors de réduire le nombre de particules à propager de N à un nombre proche de N_{ess} sans diminuer les performances (les particules dupliquées redeviennent distinctes dans la phase suivante, lorsqu'elles sont perturbées par le bruit de modèle). Les premiers cas testés mettent ainsi en évidence un gain de temps de calcul de l'ordre d'un facteur 10 pour des performances proches.

En comparant les performances des deux algorithmes à temps de calcul équivalent et non à N identiques, on obtient alors une réduction conséquente de l' EQM , comme le montre le tableau 2.4. Un exemple des cartes de vorticité reconstruites avec les deux méthodes est présenté dans la figure 2.3. En comparant visuellement les deux résultats avec la carte de vorticité réelle présentée dans cette même figure, il apparaît que la quasi totalité des vortex est mieux reconstruit avec le WENKF.

Comme dernière expérimentation, nous considérons une séquence d'images synthétique (voir figure 2.4) créée par Simulation Numérique Directe DNS) de l'équation de vorticité-vitesse [37], avec un nombre de Reynolds $Re = 4000$ et un terme de forçage inconnu sur la vorticité correspondant au bruit du modèle w_t de covariance empiriquement estimée à $Q = 0.005$.

Les images I_t sont définies sur le domaine Ω de taille 256×256 pixels. Il s'agit donc d'un cas de très grande dimension, puisque $n = 65536$. Les observations de vorticité sont calculées par un estimateur de flot optique dédié à l'estimation de mouvement fluide [48] (voir le chapitre 5 pour de plus ample détails). Le champ de mouvement $\mathbf{v}_t = [u, v]^T$ ainsi estimé $\forall s \in \Omega$ permet de calculer des observations de la vorticité.

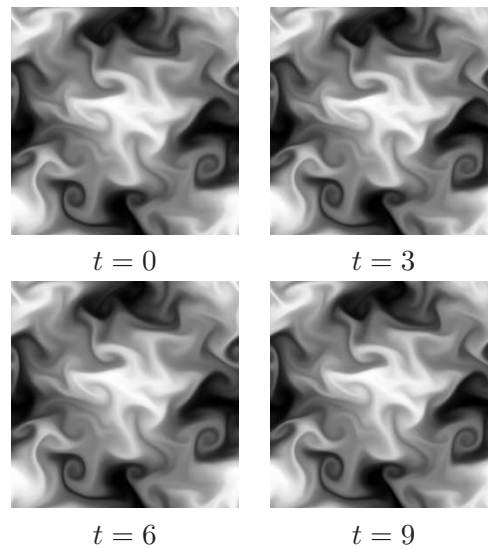


FIG. 2.4: Séquence d'images créées par simulation numérique de la l'équation de vorticité-vitesse.

Dans cette application réelle, le bruit des observations obtenues par l'algorithme de flot optique n'est pas nécessairement gaussien. La vorticité réelle est connue, puisqu'il s'agit d'une expérience synthétique, donc l'erreur exacte peut être calculée.

Les méthodes ENKF et WENKF sont alors appliquées respectivement avec $N = 10$ et $N = 20$ particules. Comme l'écart quadratique moyen (EQM) des observations est de 0.007, les matrices de covariance B et R ont été fixées avec cette valeur. Nous avons considéré différents intervalles temporels entre les observations. Une représentation des vorticités réelle, estimée par l'algorithme de flot optique et reconstruite est présenté dans la figure 2.5.

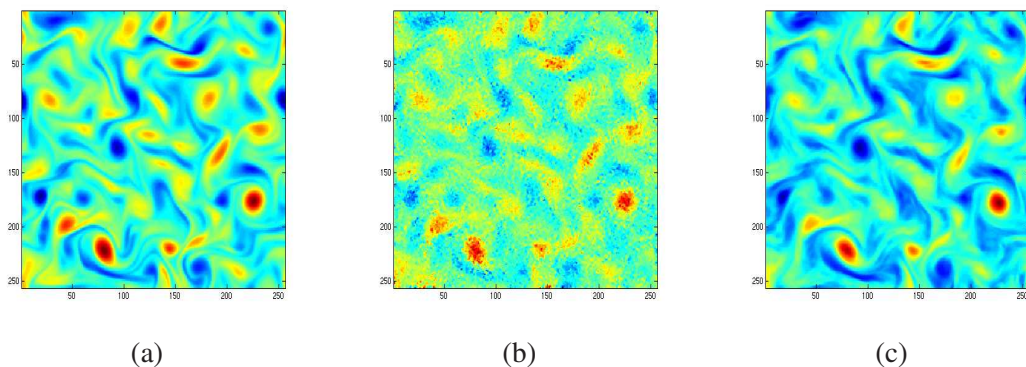


FIG. 2.5: Cartes de vorticité. (a) Vorticité réelle, (b) Vorticité estimée par l'algorithme de flot optique, (c) Vorticité reconstruite par le WENKF ($N = 20$ particules).

Les effets dus aux non linéarités sont ainsi renforcés avec des intervalles longs entre deux observations successives. Les résultats de ces expériences sont présentés dans le tableau 2.5.

Intervalle entre observations	Méthode	EQM	Temps (secondes)
1 Image	ENKF 10	0.0024	1035
	WENKF 20	0.0023	628
2 Images	ENKF 10	0.0029	1304
	ENKF 20	0.0024	2287
	WENKF 20	0.0024	1427
3 Images	ENKF 10	0.0042	1554
	ENKF 20	0.0036	3035
	WENKF 20	0.0035	1648

TAB. 2.5: **Comparaison ENKF/ WENKF pour un scénario non linéaire de DNS 2D.** Différents intervalles entre deux observations successives sont comparés.

Lorsque l'intervalle de temps entre deux observations est court (1 image), les deux méthodes donnent de très bons résultats, mais le coût de calcul du WENKF reste toujours inférieur. Lorsque l'on considère des intervalles plus longs entre deux observations successives (2 ou 3 images), l'ENKF est moins précis avec $N = 10$ particules, alors que le WENKF avec $N = 20$ particules donne toujours de bons résultats numériques. La même précision peut cependant être obtenue avec un ENKF en considérant $N = 20$ particules. Le coût de calcul mis en jeu est cependant exorbitant.

Cette dernière expérimentation montre que le WENKF est adapté aux variables d'état de grandes dimension et aux dynamiques non linéaires, puisqu'il permet d'éviter de propager les particules non significatives.

2.5 Conclusion

Le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire ont des atouts respectifs différents. Le filtre de Kalman d'ensemble permet de limiter le nombre d'échantillons utilisés grâce à un déplacement des particules dans la phase de correction. En comparaison, la phase de correction du filtre particulaire consiste à pondérer les échantillons existants sans les replacer vers des positions plus probables en regard des observations. Le filtre de Kalman d'ensemble est en contrepartie une méthode approchée qui ne fournit pas une distribution de filtrage exacte, contrairement au filtre particulaire.

On a cherché à tirer le meilleur parti de ces deux filtres en les couplant, de façon à avoir un algorithme qui soit efficace avec un petit nombre de particules mais qui ne repose pas sur des approximations autres que les erreurs d'échantillonnage. En remarquant que l'on peut formuler simplement une loi de propagation des particules du filtre de Kalman d'ensemble, une pondération de ses membres d'ensemble exprimée à partir de la théorie du filtre particulaire permet de rendre l'algorithme exact.

Notre extension a été testée sur des scénarios à dynamique linéaire et non linéaire. On a ainsi montré que le nouvel algorithme conduisait à de meilleurs résultats, conformément à la théorie. On a également expérimenté l'algorithme proposé sur des scénarios de type fluide, de grandes dimensions. Le calcul du poids des particules est étudié dans ce cas et certaines procédures

permettant de réduire leur complexité ont été présentées, de sorte que la pondération introduite dans l'ENKF n'induit pas de temps de calcul additionnel. Mieux encore, on constate que la phase de rééchantillonnage introduite dans le nouvel algorithme permet de réduire le nombre de prédictions effectuées, qui est une phase coûteuse dans un certain nombre de cas d'application de l'ENKF. Ainsi, on a montré sur des scénarios représentatifs, qu'à temps de calcul comparables, le WENKF permet d'améliorer significativement la précision de l'estimation.

Nous avons aussi réalisé des expériences sur des séquences d'images, en observant des champs de vitesse calculés préalablement par des techniques de flot optique. Ces mesures indirectes des images constituent des pseudo-observations. En perspective de ces travaux, des observations images pourraient directement être considérées. Il faudra pour cela définir une équation de mesure appropriée liant la variable d'état aux déformations spatio-temporelles des images. Notons que cette approche a déjà été développée pour une représentation réduite de la vorticité [55].

Les techniques d'échantillonnage sont néanmoins toujours limitées par la mise à jour des matrices de covariance et des poids qui sont des étapes d'autant plus coûteuses que la dimension de l'espace est grande. La dimension d'un système géophysique pouvant être considérable, une alternative aux méthodes séquentielles consiste à utiliser des méthodes variationnelles afin d'estimer des paramètres et des variables d'état d'un système sur un intervalle temporel. Nous allons à présent détailler ces techniques plus connues sous le nom d'assimilation variationnelle de données.

Chapitre 3

Assimilation variationnelle de données

3.1 Introduction

Initialement introduite par F-X. Le Dimet dans [62], l'assimilation variationnelle de données est une technique permettant de réaliser l'estimation des paramètres et des variables d'état d'un système au cours du temps. Cette méthode réalise un lissage de mesures bruitées du système selon un modèle dynamique et une condition initiale [13,28,109,165,169], dans le cadre méthodologique du contrôle optimal défini par Lions [115,116]. Dans le même esprit que les méthodes bayésiennes telles que le lissage de Kalman, l'estimation se fait sur un intervalle de temps fixe en considérant l'ensemble des observations disponibles sur toute la période. Cette approche est largement utilisée dans les sciences de l'environnement pour l'analyse de fluides géophysiques [13, 25, 50]. Nous allons présenter deux formulations équivalentes du problème à partir d'outils mathématiques différents, avant de préciser les conditions d'application et de mise en œuvre de la technique. On différenciera notamment les cas des modèles dynamiques parfaits et imparfaits relatifs à l'assimilation de données soumise à des contraintes dynamiques respectivement fortes et faibles. En effet, les modèles imparfaits ne sont que peu utilisés dans les applications existantes d'assimilation de données. Une méthodologie incrémentale permettant de contrôler les erreurs modèles est présentée dans ce cadre.

3.2 Formulation par contrôle optimal

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre théorique du contrôle optimal introduit par J-L Lions [116].

3.2.1 Assimilation de données sous contrainte dynamique forte

Dans cette première partie, on fera l'hypothèse d'un modèle dynamique dit parfait, n'incluant aucune variable d'incertitude. On parle alors d'*assimilation de données sous contrainte dynamique forte*.

3.2.1.1 Modèle direct

Soit \mathcal{V} un espace de Hilbert identifié à son espace dual. Notons $X \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$ la variable d'état, où

$$\mathcal{W}(t_0, t_f) = \{f \mid f \in L^2(t_0, t_f; \mathcal{V}), \partial_t f \in L^2(t_0, t_f; \mathcal{V})\}.$$

En supposant que l'évolution dans le temps de la variable est conduite par un modèle différentiel (non linéaire) $\mathbb{M} : \mathcal{V} \times \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$, on obtient le problème direct suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \text{ donné, trouver } X \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t), u) = 0, \\ X(t_0) = X_0 + \eta. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Ce système est contrôlé par une variable dite de contrôle (u, η) . Dans la plupart des cas, le contrôle modélise le bruit de la condition initiale $\eta \in \mathcal{V}$. Le contrôle peut aussi concerner des paramètres du modèle $u \in \mathcal{U}$, où \mathcal{U} est l'espace des paramètres lui aussi identifié à son dual.

Des observations $Y \in \mathcal{O}$ sont d'autre part supposées disponibles. Ces mesures peuvent appartenir à un espace différent de celui de la variable d'état. Nous supposons donc également l'existence d'un opérateur d'observation (non linéaire) dépendant du temps, noté $\mathbb{H} : \mathcal{V} \times]t_0, t_f[\mapsto \mathcal{V}$, allant de l'espace d'état dans celui des observations. Le problème direct (3.1) est supposé bien posé :

Hypothèses 3.2.1 *Étant donnés $(u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $t_f > t_0$, on suppose qu'il existe une unique fonction $X \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$ solution du problème (3.1) et que cette solution dépend continûment de (u, η) , i.e. : $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} : (u, \eta) \mapsto X(u, \eta; t)$ est continue $\forall t \in]t_0, t_f[$.*

Hypothèses 3.2.2 *On suppose que l'application $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} : (u, \eta) \mapsto X(u, \eta; t)$ est différentiable $\forall t \in]t_0, t_f[$.*

3.2.1.2 Fonction de coût

Une fonction de coût $J : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurant la différence entre la solution associée à un contrôle donné et les observations est alors introduite :

$$J(u, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|Y - \mathbb{H}(X(u, \eta, t), t)\|_{R^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_{B^{-1}}^2. \quad (3.2)$$

On cherche donc la variable de contrôle $(u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ qui minimisera la fonction de coût J . Les normes $\|\cdot\|_{R^{-1}}$ et $\|\cdot\|_{B^{-1}}$ sont respectivement associées aux produits scalaires $\langle R^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}}$ et $\langle B^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$, où R et B désignent des endomorphismes symétriques définis positifs de \mathcal{O} et \mathcal{V} respectivement. Dans les applications, R est appelée matrice de covariance d'observation et B matrice de covariance d'initialisation.

3.2.1.3 Modèle différentié

Afin de calculer les dérivées partielles de la fonction de coût par rapport aux variables de contrôle, on différentie le système (3.1) par rapport à (u, η) dans la direction $(\delta u, \delta \eta)$. On obtient

alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \text{ donné, } X(t) \text{ solution de (3.1) et une perturbation } (\delta u, \delta \eta) \in (\mathcal{U} \times \mathcal{V}), \\ \text{trouver } dX = \frac{\partial X}{\partial u} \delta u + \frac{\partial X}{\partial \eta} \delta \eta \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t dX(t) + \partial_X \mathbb{M}(X(t), u) dX(t) + \partial_u \mathbb{M}(X(t), u) \delta u = 0, \\ dX(t_0) = \delta \eta, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où sont introduits les opérateurs tangent linéaires $\partial_X \mathbb{M}(X(t), u)$ et $\partial_u \mathbb{M}(X(t), u)$ définis comme les dérivées de Gâteaux de l'opérateur \mathbb{M} :

$$(\partial_X \mathbb{M}(X(t), u)) dX(t) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{M}(X(t) + \beta dX(t), u) - \mathbb{M}(X(t), u)}{\beta}. \quad (3.4)$$

De la même manière, on différencie la fonction de coût (3.2) par rapport à (u, η) dans la direction $(\delta u, \delta \eta)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{\mathcal{U}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle Y - \mathbb{H}(X), (\partial_X \mathbb{H}) \frac{\partial X}{\partial u} \delta u \right\rangle_{R^{-1}} dt, \\ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, \delta \eta \right\rangle_{\mathcal{V}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle Y - \mathbb{H}(X), (\partial_X \mathbb{H}) \frac{\partial X}{\partial \eta} \delta \eta \right\rangle_{R^{-1}} dt + \langle X(t_0) - X_0, \delta \eta \rangle_{B^{-1}}, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{\mathcal{U}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)), \frac{\partial X}{\partial u} \delta u \right\rangle_{\mathcal{V}} dt, \\ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, \delta \eta \right\rangle_{\mathcal{V}} &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)), \frac{\partial X}{\partial \eta} \delta \eta \right\rangle_{\mathcal{V}} dt + \langle B^{-1} (X(t_0) - X_0), \delta \eta \rangle_{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $(\partial_X \mathbb{H})^*$ est l'opérateur adjoint de $(\partial_X \mathbb{H})$ défini par le produit scalaire :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{O} \quad \langle \partial_X \mathbb{H} x, y \rangle_{\mathcal{O}} = \langle x, (\partial_X \mathbb{H})^* y \rangle_{\mathcal{V}}. \quad (3.6)$$

3.2.1.4 Modèle adjoint

Pour estimer les gradients de la fonction de coût J , une première idée naïve consiste à approcher le gradient par l'expression aux différences finies suivante :

$$\nabla J \simeq \frac{J((\eta, u) + \epsilon e_k) - J(\eta, u)}{\epsilon},$$

où $\epsilon \in \mathbb{R}$ est une perturbation infinitésimale et $\{e_k, k = 1, \dots, p\}$ représente la base vectorielle orthonormée de l'espace de contrôle. On voit immédiatement qu'un tel calcul est impraticable pour des espaces de grandes dimensions, puisqu'il nécessite p intégrations du modèle dynamique pour chaque valeur du gradient de la fonctionnelle.

L'introduction d'un *modèle adjoint* [62, 109, 116] permet de calculer le gradient en une seule intégration. Pour obtenir l'**équation d'état adjointe**, on multiplie la première équation du système (3.3) par une variable dite adjointe $\lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$, puis on intègre sur $[t_0, t_f]$:

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_t dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_X \mathbb{M} dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_u \mathbb{M} \delta u, \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt = 0,$$

Après intégration par parties du premier terme on obtient finalement :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_f} \langle -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t), dX(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt &= \langle \lambda(t_f), dX(t_f) \rangle_{\mathcal{V}} - \langle \lambda(t_0), \delta \eta \rangle_{\mathcal{V}} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t), \delta u \rangle_{\mathcal{U}} dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

en rappelant la définition des opérateurs adjoints :

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{V} \quad \langle (\partial_X \mathbb{M})x, y \rangle_{\mathcal{V}} = \langle x, (\partial_X \mathbb{M})^* y \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (3.8)$$

et

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{U} \quad \langle (\partial_u \mathbb{M})x, y \rangle_{\mathcal{V}} = \langle x, (\partial_u \mathbb{M})^* y \rangle_{\mathcal{U}}. \quad (3.9)$$

De façon à obtenir une expression simple du gradient (3.5), on définit la variable adjointe λ comme solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \text{ donné, } t_f > t_0, X(t) \text{ solution de (3.1),} \\ \text{trouver } \lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(Y(t) - \mathbb{H}(X(t))) \\ \lambda(t_f) = 0. \end{array} \right. \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Hypothèses 3.2.3 *Étant donnés $(u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $t_f > t_0$ et $X \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$ solution du problème (3.1), on suppose qu'il existe une unique fonction $\lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$ solution du problème (3.10) et que cette solution dépend continûment de (u, η) , i.e. : $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} : (u, \eta) \mapsto \lambda(u, \eta; t)$ est continue $\forall t \in]t_0, t_f[$.*

En combinant les équations (3.5), (3.7) et (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} + \left\langle \frac{\partial J}{\partial \eta}, \delta \eta \right\rangle_I &= - \langle \lambda(t_0), \delta \eta \rangle_{\mathcal{V}} + \langle B^{-1}(X(t_0) - X_0), \delta \eta \rangle_{\mathcal{V}} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t), \delta u \rangle_{\mathcal{U}} dt. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de la fonction de coût peuvent ainsi être caractérisées par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u} &= \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t) dt, \\ \frac{\partial J}{\partial \eta} &= -\lambda(t_0) + B^{-1}(X(t_0) - X_0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

La valeur de la variable adjointe au temps initial définit le gradient de la fonctionnelle J . Pour obtenir cette variable adjointe, il est tout d'abord nécessaire d'intégrer le système direct (3.1) afin

de calculer l'état $X(t)$. La variable adjointe (et donc le gradient de la fonctionnelle (3.2)) est alors obtenue par une intégration rétrograde du modèle adjoint (3.10). La complexité de résolution du problème adjoint étant la même que celle du problème direct, l'utilisation de cette technique se justifie dès que la dimension de la variable de contrôle devient trop importante.

Cette expression permet alors de définir une méthode de mise à jour des paramètres. En annulant les gradients définis par (3.11), on prend u tel que :

$$\int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^T \lambda(t) dt = 0, \quad (3.12)$$

et on met à jour la valeur initiale de la variable d'état par descente de gradient avec :

$$X(t_0) = X_0 + B\lambda(t_0) \quad (3.13)$$

où l'on a introduit B , la matrice pseudo-inverse de B^{-1} .

Le principe de l'assimilation est illustré par l'algorithme 1. Le procédé complet peut être résumé par le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t), u) = 0, \\ X(t_0) = X_0 + \eta, \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)), \\ \partial_u J = \int_{t_0}^{t_f} (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t) dt, \\ \partial_\eta J = -\lambda(t_0) + B^{-1}(X(t_0) - X_0). \end{cases} \quad (3.14)$$

Ce système peut être aisément ajusté si l'on dispose d'observations multiples ou si les paramètres du modèle dépendent du temps.

Algorithme 1 Assimilation sous contrainte dynamique forte. Le modèle dynamique est supposé parfait.

Soit $X(t_0) = X_0$, et $u \in \mathcal{U}$.

- (i) A partir de $(u, X(t_0))$, calculer $X(t)$, $\forall t \in]t_0, t_f[$ par une intégration temporelle (3.1).
 - (ii) Avec $X(t)$, intégrer de manière rétrograde la variable adjointe avec le système (3.10).
 - (iii) Mise à jour des contrôles avec les équations (3.12) et (3.13).
 - (iv) Retourner en (i) et recommencer jusqu'à convergence.
-

3.2.1.5 Observations multiples

Considérons à présent un ensemble d'observations $Y_i \in \mathcal{O}_i$, $i \in [1 \cdots N]$. On suppose que l'on dispose des opérateurs d'observations associés $\mathbb{H}_i : V \mapsto \mathcal{O}_i$. Le terme d'observation de la fonction de coût (3.2) devient :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|Y_i - \mathbb{H}_i(X, u, \eta, t)\|_{R_i^{-1}}^2 \quad (3.15)$$

où les norme $\|\cdot\|_{R_i^{-1}}$ sont associées au produits scalaire $\langle R_i^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}_i}$. Ces nouveaux termes d'observations impliquent à leur tour une modification du problème adjoint :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \text{ donné, } t_f > t_0 \text{ et } X(t) \text{ solution de (3.1),} \\ \text{trouver } \lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = \sum_{i=1}^N (\partial_X \mathbb{H}_i)^* R_i^{-1} (Y_i - \mathbb{H}_i(X)) \\ \lambda(t_f) = 0. \end{array} \right. \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

3.2.1.6 Paramètres dépendant du temps

On suppose désormais que le jeu de paramètres u peut varier au cours du temps. Ceci permet de compenser le fait que le modèle est supposé parfait. L'espace des paramètres devient donc $\mathcal{U}_T = L^2(t_0, t_f; \mathcal{U})$. Ainsi $\forall t \in]t_0, t_f[$, on a $u(t) \in \mathcal{U}$. Le problème direct est réécrit comme :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}_T, \mathcal{V}) \text{ donné, trouver } X \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t), u(t)) = 0, \\ X(t_0) = X_0 + \eta. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

La fonction de coût est à présent définie comme : $J : \mathcal{U}_T \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ et le problème adjoint devient :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (u, \eta) \in (\mathcal{U}_T, \mathcal{V}) \text{ donné, } t_f > t_0, X(t) \text{ solution de (3.17),} \\ \text{trouver } \lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)) \\ \lambda(t_f) = 0. \end{array} \right. \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

La dérivé de Gâteaux de la fonction de coût par rapport à u dans une direction δu s'écrit alors :

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{\mathcal{U}_T} = \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \frac{\partial J}{\partial u}(t), \delta u(t) \right\rangle_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} dt = \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t), \delta u(t) \rangle_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} dt = \langle (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda, \delta u \rangle_{\mathcal{U}_T}.$$

On obtient ainsi la dérivé partielle de J par rapport à u :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda. \quad (3.19)$$

L'annulation de ce gradient implique une nouvelle mise à jour des paramètres, on prend u tel que :

$$(\partial_{u(t)} \mathbb{M})^* \lambda(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (3.20)$$

3.2.1.7 Discussions

Dans cette première partie, nous avons décrit l'assimilation de données dans le cas d'une contrainte forte sur le modèle dynamique. Cette première approche correspond à un problème de contrôle sur la condition initiale et des paramètres du modèle. Néanmoins, devant la complexité des phénomènes mis en jeu (courant d'un fleuve [94], d'un océan [73], de l'atmosphère [108]), les modèles dynamiques utilisés constituent des modélisations simplifiées de la réalité. D'autre part, dans le cas d'un modèle trop rigide, il n'est pas toujours évident de respecter fidèlement l'ensemble des observations dont on dispose à une échelle donnée.

Dans le cadre des travaux liés au traitement d'image, les lois dynamiques originelles doivent être adaptées dans la mesure où l'on observe toujours des projections bidimensionnelles de phénomènes tridimensionnels complexes. Il nous semble donc justifié de nous intéresser aux modèles imparfaits mettant en jeu une forme d'incertitude sur le modèle dynamique. On parle alors d'*assimilation de données sous contrainte dynamique faible* [172].

3.2.2 Assimilation de données sous contrainte dynamique faible

3.2.2.1 Modèle direct

Le modèle n'est maintenant plus contrôlé par un jeu de paramètre, mais par une fonction de contrôle $w \in \mathcal{W}(t_0, t_f, V)$, avec $w(t) \in \mathcal{V}$. Nous considérons désormais le problème direct suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{V}) \text{ donné, trouver } X \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) = w(t) \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \\ X(t_0) = X_0 + \eta. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

La fonction de coût est définie par $J : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$J(w, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|Y - \mathbb{H}(X(w(t), \eta, t))\|_{R^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_{Q^{-1}}^2 dt. \quad (3.22)$$

La norme $\|\cdot\|_{Q^{-1}}$ est associée au produit scalaire $\langle Q^{-1} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$. La matrice Q , plus communément appelée matrice de covariance du modèle, est un endomorphisme symétrique de \mathcal{V} défini positif.

3.2.2.2 Modèle différentié

Afin de calculer la dérivée partielle de la fonction de coût par rapport à la variable de contrôle, on commence par différentier le système (3.21) par rapport à (w, η) dans la direction $(\delta w, \delta \eta)$. En notant $dX = \frac{\partial X}{\partial w} \delta w + \frac{\partial X}{\partial \eta} \delta \eta \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$, on obtient le système suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{V}) \text{ donné, } X(t) \text{ solution de (3.21) et une perturbation } (\delta w, \delta \eta) \in (\mathcal{W} \times \mathcal{V}), \\ \text{trouver } dX = \frac{\partial X}{\partial w} \delta w + \frac{\partial X}{\partial \eta} \delta \eta \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t dX(t) + \partial_X \mathbb{M}(X(t)) dX(t) = \delta w(t) \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \\ dX(t_0) = \delta \eta. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

La différentielle de la fonction de coût (3.22) par rapport à w dans la direction δw donne :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial w}, \delta w \right\rangle_{\mathcal{W}} &= \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)), \delta w(t) \rangle_{Q^{-1}} dt - \int_{t_0}^{t_f} \langle Y - \mathbb{H}(X), \partial_X \mathbb{H} \delta w(t) \rangle_{R^{-1}} dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \langle Q^{-1} (\partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t))), \delta w(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt - \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)), \delta w(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt. \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.2.3 Modèle adjoint

Pour obtenir l'équation d'état adjointe, on applique la même démarche que précédemment en multipliant la première équation du système (3.23) par la variable adjointe $\lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f)$, puis en intégrant le résultat sur l'intervalle temporel $[t_0, t_f]$. La différentielle de la fonction de coût (3.22) par rapport à w dans la direction δw donne :

$$\int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_t dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle \partial_X \mathbb{M}(X(t)) dX(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt = \int_{t_0}^{t_f} \langle \delta w(t), \lambda(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt.$$

Après intégration par parties du premier terme on obtient finalement :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_f} \langle -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t), dX(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt &= \langle \lambda(t_f), dX(t_f) \rangle_{\mathcal{V}} - \langle \lambda(t_0), \delta u \rangle_{\mathcal{V}} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \langle \lambda(t), \delta w(t) \rangle_{\mathcal{V}} dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La variable adjointe λ est alors définie comme solution du problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } (w, \eta) \in (\mathcal{W}, \mathcal{V}) \text{ donné, } t_f > t_0, \mathbf{X}(t) \text{ solution de (3.21),} \\ \text{trouver } \lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)) \quad \forall t \in]t_0, t_f[\\ \lambda(t_f) = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En combinant les équations (3.24), (3.25) et (3.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial w}, \delta w \right\rangle_{\mathcal{W}} &= \int_{t_0}^{t_f} \langle Q^{-1}(\partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) - \lambda(t), \delta w(t)) \rangle_{\mathcal{V}} dt \\ &= \langle Q^{-1}(\partial_t X + \mathbb{M}(X) - \lambda, \delta w) \rangle_{\mathcal{W}}. \end{aligned}$$

La dérivée partielle de la fonction de coût par rapport à w est par conséquent :

$$\frac{\partial J}{\partial w} = Q^{-1}(\partial_t X + \mathbb{M}(X)) - \lambda. \quad (3.27)$$

En annulant ce gradient et en introduisant Q la matrice pseudo-inverse de Q^{-1} , on obtient :

$$\partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) = Q\lambda(t). \quad (3.28)$$

3.2.2.4 Fonction incrémentale

La fonction de contrôle additive w d'énergie minimale permet ainsi de contrôler les erreurs du modèle sur tout l'intervalle de temps $[t_0; t_f]$ considéré. Ce contrôle est lié à toute la trajectoire de la variable adjointe λ . Cette variable λ étant initialement inconnue, il est possible d'en avoir une estimation en introduisant une décomposition incrémentale de la fonction d'état. En supposant connu une composante \tilde{X} , on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \tilde{X}(t) + dX(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f], \\ \tilde{X}(t_0) = X_0, \end{array} \right. \quad (3.29)$$

et en linéarisant \mathbb{M} autour du point \tilde{X} , la relation (3.28) peut être réécrite :

$$\partial_t \tilde{X}(t) + \mathbb{M}(\tilde{X}(t)) = 0 \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \quad (3.30)$$

$$\partial_t dX(t) + \partial_{\tilde{X}} \mathbb{M}(\tilde{X}(t)) dX(t) = Q\lambda(t) \quad \forall t \in]t_0, t_f[. \quad (3.31)$$

Ceci permet de contrôler la mise à jour de la variable d'état X par un incrément dX suivant toute la trajectoire de la variable adjointe λ . La valeur initiale de cet incrément est donnée par (3.29) et (3.13) :

$$dX(t_0) = B\lambda(t_0). \quad (3.32)$$

Le principe de l'assimilation est illustré dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 Assimilation sous contrainte dynamique faible. Le modèle dynamique est supposé imparfait.

Soit $X(t_0) = X_0$.

- (i) A partir de $X(t_0)$, calculer $X(t)$, $\forall t \in]t_0, t_f[$ par une intégration temporelle (3.30).
 - (ii) Avec $X(t)$, intégrer de manière rétrograde la variable adjointe avec le système (3.26).
 - (iii) Calculer l'incrément initial avec (3.32).
 - (iv) A partir de $dX(t_0)$, calculer $dX(t)$, $\forall t \in]t_0, t_f[$ par une intégration temporelle avec (3.31).
 - (v) Mettre à jour $X = X + dX$.
 - (vi) Retourner à (ii) et recommencer jusqu'à convergence.
-

L'algorithme peut également être résumé par le système d'optimalité suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) = w(t), \\ X(t_0) = X_0 + \eta, \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)), \\ \partial_w J = \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) - Q\lambda(t), \\ \partial_\eta J = -\lambda(t_0) + B^{-1} (X(t_0) - X_0). \end{array} \right. \quad (3.33)$$

3.2.2.5 Introduction d'une condition finale

Si la connaissance d'une condition finale est par ailleurs disponible, ce système peut être enrichi. En considérant une équation supplémentaire sur la condition finale de la variable d'état, on a le système suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (w, \eta, \nu) \in (\mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{V}) \text{ donné, trouver } X \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) = w(t), \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \\ X(t_0) = X_0 + \eta, \\ X(t_f) = X_f + \nu, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

avec $\nu \in \mathcal{V}$. Il suffit alors de rajouter un terme dans la fonction de coût :

$$J(w, \eta, \nu) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|Y - \mathbb{H}(X(w(t), \eta, \nu, t))\|_{R^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_{Q^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\nu\|_{F^{-1}}^2 \quad (3.35)$$

où la norme $\|\cdot\|_{F^{-1}}$ est associée au produit scalaire $\langle F^{-1}\cdot, \cdot \rangle_I$. La dérivée de la fonction de coût par rapport à ν dans la direction $\delta\nu$ est :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial \nu}, \delta\nu \right\rangle_I &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle Y - \mathbb{H}(X), \partial_X \mathbb{H} \left(\frac{\partial X}{\partial \nu} \delta\nu \right) \right\rangle_{R^{-1}} dt + \langle X(t_f) - X_f, \delta\nu \rangle_F, \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)), \frac{\partial X}{\partial \nu} \delta\nu \right\rangle_{\mathcal{V}} dt + \langle F^{-1}(X(t_f) - X_f), \delta\nu \rangle_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Cette nouvelle condition finale se traduit par une modification du problème adjoint en t_f :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour } (w, \eta, \nu) \in (\mathcal{W}, \mathcal{V}, \mathcal{V}) \text{ donné, } t_f > t_0, X(t) \text{ solution de (3.34),} \\ \text{trouver } \lambda \in \mathcal{W}(t_0, t_f) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (Y - \mathbb{H}(X)) \quad \forall t \in]t_0, t_f[, \\ \lambda(t_f) = F^{-1}(X_f - X(t_f)). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

La présentation que nous avons donné du problème d'assimilation variationnelle de données a été effectuée dans le cadre d'une formulation de type contrôle optimal. Il est possible de dériver les mêmes équations directement à partir des équations d'Euler-Lagrange associées à la fonction de coût. C'est cette présentation que nous effectuons dans la partie suivante.

3.3 Formulation par les équations d'Euler-Lagrange

Le problème est à présent reformulé en réunissant les trois équations fondamentales de l'assimilation de données [90] : l'équation du modèle dynamique de l'état X , celle d'initialisation et enfin celle d'observation.

$$\begin{cases} \partial_t X(t) + \mathbb{M}(X(t)) = w(\mathbf{x}, t), \\ X(\mathbf{x}, t_0) = X_0(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x}), \\ Y(\mathbf{x}, t) = \mathbb{H}(X(\mathbf{x}, t), t) + \epsilon(\mathbf{x}, t). \end{cases} \quad (3.38)$$

La trajectoire de la variable d'état $X \in \mathcal{V}$, définie sur un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$ et sur l'intervalle temporel $[t_0; t_f]$, est toujours guidée par un opérateur différentiel non linéaire $\mathbb{M} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$. La seconde équation donne la condition initiale de la valeur de la variable d'état. Enfin, la dernière équation lie la fonction d'observation $Y \in \mathcal{O}$ à la variable d'état à travers un opérateur différentiel $\mathbb{H} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{O}$. Dans ces trois équations, w , η et ϵ sont trois fonctions d'incertitude d'énergie moyenne nulle. Elles sont respectivement associées aux matrices de covariance $Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$, $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ et $R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$. Les fonctions d'incertitude représentent toutes les corrélations spatio-temporelles des différents composants du système (*i.e.* erreurs de modèle, erreurs d'initialisation et erreurs de mesure).

3.3.1 Fonction de coût

Le système (3.38) peut aussi être expliqué en considérant trois vecteurs de densités de probabilités conditionnelles gaussiennes $p(X|X(t_0))$, $p(X(t_0)|X_0)$ et $p(Y|X)$ associées à des variables d'incertitudes gaussiennes. Elles sont respectivement liées à la trajectoire de la variable d'état par rapport à sa valeur initiale $X(t_0)$, la valeur initiale de l'état $X(t_0)$ par rapport à la condition initiale

X_0 et la valeur des observations Y par rapport à la trajectoire X . Comme dans tout problème de filtrage stochastique, on cherche alors à estimer la valeur conditionnelle de la trajectoire de l'état connaissant un ensemble d'observations.

Les densités de probabilité étant toutes gaussiennes, ceci revient à estimer la distribution *a posteriori* $p(X|Y, X_0)$. Une telle estimation du *maximum a posteriori* mène à la minimisation d'une fonction de coût quadratique définie comme suit :

$$\begin{aligned} J(X) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (X(\mathbf{x}, t_0) - X_0(\mathbf{x}))^T B^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (X(\mathbf{x}', t_0) - X_0(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \mathbb{M}(X) \right)^T (\mathbf{x}, t) Q^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \mathbb{M}(X) \right) (\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t} (Y - \mathbb{H}(X))^T (\mathbf{x}, t) R^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') (Y - \mathbb{H}(X)) (\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

où

$$\int_{\Omega, t} \bullet dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_f} \bullet dt d\mathbf{x}.$$

L'état X est le minimum de la fonctionnelle J si et seulement si il est aussi le minimum de la fonction de coût $J(X + \beta\theta(\mathbf{x}, t))$, où $\theta(\mathbf{x}, t)$ appartient à l'espace des fonctions admissibles et β est un paramètre positif. En d'autres termes, X doit annuler la dérivée directionnelle :

$$\delta J_X(\theta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{dJ(X + \beta\theta(\mathbf{x}, t))}{d\beta} = 0,$$

et $J(X + \beta\theta(\mathbf{x}, t))$ peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} J(X + \beta\theta(\mathbf{x}, t)) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (X + \beta\theta - X_0)^T B^{-1}(X + \beta\theta - X_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega, t} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbb{M}(X + \beta\theta) \right)^T \int_{\Omega, t} Q^{-1} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbb{M}(X + \beta\theta) \right) dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t} (Y - \mathbb{H}(X + \beta\theta))^T R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X + \beta\theta)) dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Comme dans le cas de l'assimilation sous contrainte dynamique faible présentée précédemment par la formulation du contrôle optimal, le contrôle porte ici directement sur l'état X et non sur des paramètres du modèle.

3.3.2 Variable adjointe

Afin de réaliser des intégrations par parties, permettant de factoriser l'expression précédente par $\theta(\mathbf{x}, t)$, nous introduisons la "variable adjointe" λ définie par :

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega, t} Q^{-1} \left(\frac{\partial X}{\partial t} + \mathbb{M}(X) \right) dt' d\mathbf{x}', \quad (3.41)$$

ainsi que les *opérateurs tangents linéaires* $\partial_X \mathbb{M}$ et $\partial_X \mathbb{H}$ correspondant aux dérivées de Gâteaux de \mathbb{M} et \mathbb{H} définies par la relation (3.4). La définition de la variable adjointe est assez intuitive si

on se réfère à la présentation par le contrôle optimal de l'assimilation sous contrainte dynamique faible (3.27). En regardant la limite de la dérivée de l'expression (3.40) quand $\beta \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{dJ}{d\beta} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \theta^T(\mathbf{x}, t_0) B^{-1}(X(\mathbf{x}', t_0) - X_0(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega, t} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \partial_X \mathbb{M} \theta \right)^T (\mathbf{x}, t) \lambda(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t'} (\partial_X \mathbb{H} \theta)^T (\mathbf{x}', t') R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En considérant les trois intégrations par parties suivantes, nous pouvons supprimer les dérivées partielles de la fonction admissible θ présentes dans l'expression (3.42), *i.e.* :

$$\int_{\Omega, t} \frac{\partial \theta}{\partial t} \lambda(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \theta^T(\mathbf{x}, t_f) \lambda(\mathbf{x}, t_f) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \theta^T(\mathbf{x}, t_0) \lambda(\mathbf{x}, t_0) d\mathbf{x} - \int_{\Omega, t} \theta^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \lambda}{\partial t} dt d\mathbf{x}, \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega, t} (\partial_X \mathbb{M} \theta)^T \lambda(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega, t} \theta^T \partial_X \mathbb{M}^* \lambda(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x}, \quad (3.44)$$

$$\int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t'} (\partial_X \mathbb{H} \theta)^T R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x} = \int_{\Omega, t} \int_{\Omega, t'} \theta^T (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}' dt d\mathbf{x}. \quad (3.45)$$

Dans les deux dernières équations, nous avons introduit les *opérateurs adjoints* $(\partial_X \mathbb{M})^*$ et $(\partial_X \mathbb{H})^*$, définis par (3.6). En rassemblant tous ces éléments, l'équation (3.42) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{dJ}{d\beta} &= \int_{\Omega} \theta^T(\mathbf{x}, t_f) \lambda(\mathbf{x}, t_f) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \theta^T(\mathbf{x}, t_0) \left[\int_{\Omega} (B^{-1}(X(\mathbf{x}', t_0) - X_0(\mathbf{x}')) - \lambda(\mathbf{x}, t_0)) d\mathbf{x}' \right] d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega, t} \theta^T \left[\left(-\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda \right) - \int_{\Omega, t'} (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}' \right] dt d\mathbf{x} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.3.3 Équations d'Euler-Lagrange

Comme la dérivée de la fonctionnelle doit être nulle pour toute fonction admissible θ , les autres termes présents dans les trois intégrales de l'équation (3.46) doivent être identiquement nuls. Nous obtenons finalement un système couplé d'Équations aux Dérivées Partielles :

$$\lambda(\mathbf{x}, t_f) = 0, \quad (3.47)$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda = \int_{\Omega, t'} (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')(Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}', \quad (3.48)$$

$$\lambda(\mathbf{x}, t_0) = \int_{\Omega} (B^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')(X(\mathbf{x}', t_0) - X_0(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}', \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial X(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(X(\mathbf{x}, t)) = \int_{\Omega, t'} Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \lambda(\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}'. \quad (3.50)$$

L'équation (3.50) correspond à la définition de la variable adjointe (3.41), et a été obtenue en introduisant Q , le pseudo-inverse de Q^{-1} , défini par [13] :

$$\int_{\Omega, t} Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') Q^{-1}(\mathbf{x}', t', \mathbf{x}'', t'') dt' d\mathbf{x}' = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(t - t'').$$

Remarquons ici que dans le cas d'un modèle parfait, on aurait $Q = 0$, et on retrouverait exactement les équations associées à une contrainte dynamique forte. Sinon, l'équation (3.47) constitue une condition finale explicite pour l'intégration rétrograde du modèle adjoint (3.48). Cette intégration rétrograde ne peut être réalisée que si l'on a une première trajectoire de la variable d'état, nécessaire au calcul de la différence $Y - \mathbb{H}(X)$. La valeur de la variable adjointe au temps initial permet alors de mettre à jour la valeur initiale de l'état (3.49), puis d'intégrer de nouveau l'état suivant (3.50).

3.3.4 Fonction incrémentale

De la même façon que précédemment, le système peut être légèrement modifié afin de produire une première trajectoire adéquate de X . En considérant la fonction incrémentale de l'état liant la fonction d'état et une fonction de condition initiale, $X = \tilde{X} + dX$. En linéarisant \mathbb{M} autour du point \tilde{X} , lié à la condition initiale ($\tilde{X}(t_0) = X_0$), on obtient :

$$\mathbb{M}(X) = \mathbb{M}(\tilde{X}) + (\partial_{\tilde{X}} \mathbb{M}) dX.$$

Il est alors possible de séparer l'équation (3.50) en deux équations aux dérivées partielles avec une condition initiale explicite :

$$\tilde{X}(\mathbf{x}, t_0) = X_0(\mathbf{x}), \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\tilde{X}) = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial dX}{\partial t} + (\partial_{\tilde{X}} \mathbb{M}) dX = \int_{\Omega, t} Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \lambda(\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}'. \quad (3.53)$$

En rassemblant les équations (3.47-3.49) et (3.51-3.53), on obtient le même algorithme de suivi que précédemment (voir algorithme 2). La méthode consiste à intégrer la condition initiale X_0 suivant le modèle parfait (3.52). La trajectoire X obtenue est alors corrigée en réalisant une intégration rétrograde (3.47, 3.48) de la variable adjointe. L'évolution de λ est guidée par la différence entre les observations et l'estimation : $Y - \mathbb{H}(X)$. La valeur initiale de l'incrément est alors obtenue par (3.49), et l'incrément est intégré suivant le modèle (3.53). Le processus est réitéré jusqu'à convergence. Une illustration de l'algorithme est donnée dans la figure 3.1.

Nous allons à présent discuter des liens existants entre le filtre de Kalman et l'assimilation variationnelle de données.

3.4 Relations avec le filtre de Kalman

Le système d'assimilation (3.47-3.49) et (3.51-3.53) peut être légèrement modifié afin de produire une estimation de la variable d'état au temps suivant. Ce type de mécanisme s'apparente à celui du filtre de Kalman. En effet, comme nous l'avons vu, ce dernier réalise une estimation

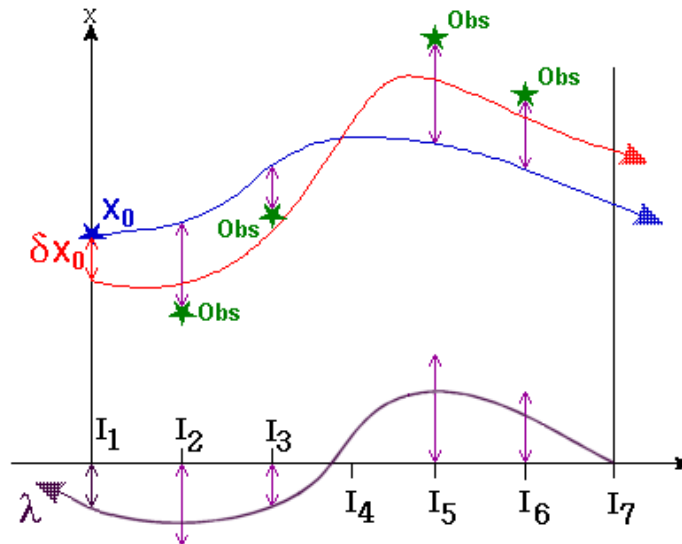


FIG. 3.1: **Algorithme d'assimilation sous contrainte dynamique faible.** Cette figure donne un aperçu du principe de la méthode. Après une intégration de la condition initiale X_0 (trajectoire bleue), une intégration rétrograde de la variable adjointe est réalisée suivant les différences de mesure entre observation et estimation (trajectoire violette). Un incrément peut alors être intégré dans le temps pour donner une trajectoire corrigée (trajectoire rouge). Et ainsi de suite ...

récurrente par pas de temps en s'appuyant sur l'ensemble des observations passées. Il n'y a donc aucune assurance de continuité temporelle de la solution à chaque nouvelle observation. Au contraire, l'assimilation de données traite toutes les observations d'un intervalle de temps donné pour construire une solution continue dans le temps. Si les opérateurs \mathbb{H} et \mathbb{M} sont linéaires et que le modèle est supposé parfait, il est possible de montrer que ces deux approches mènent à une même solution [28, 114]. Cette équivalence est reproduite en annexe A.

La principale différence entre les deux techniques concerne leurs objectifs respectifs. Le filtre de Kalman calcule récursivement en temps les deux premiers moments de la loi conditionnelle de la variable d'état suivant toutes les observations disponibles [6] – soit la séquence des observations passées dans le cas du filtrage et la séquence complète dans le cas du lissage – tandis que l'assimilation variationnelle cherche à estimer une trajectoire de coût minimale sur un intervalle de temps connu. Dans le cas linéaire gaussien, comme vu précédemment, le premier moment obtenu avec un filtrage de Kalman et la solution donnée par assimilation seront identiques. Ceci n'est cependant pas le cas lorsque l'on considère des systèmes non linéaires. Notons par ailleurs que, contrairement aux techniques de filtrage, l'assimilation ne fournit pas d'estimation de la covariance d'erreur. D'un point de vue pratique, il existe des différences entre les coûts de calculs relatifs à chacune des deux approches. Le filtre de Kalman nécessite d'inverser à chaque itération la matrice de covariance d'erreur afin de calculer la matrice de gain de Kalman. La dimension de cette matrice correspond au carré de la dimension du vecteur d'état, ce qui rend le filtrage de Kalman inadapté aux variables d'état de grandes dimensions. L'approche récursive des filtres de Kalman est donc bien adaptée aux applications de suivi en temps réel, mais efficace seulement

pour les variables de faibles dimensions.

À l'opposé, l'assimilation variationnelle ne nécessite pas d'inversion de matrices de taille rédhibitoire. L'estimation est réalisée itérativement par des intégrations "avant/arrière" et non directement par un procédé récursif comme pour le filtrage de Kalman. Même en considérant des fenêtres temporelles glissantes, les techniques d'assimilation ne peuvent pas réaliser un vrai suivi en temps réel. Néanmoins, la possibilité de gérer de grandes dimensions et des opérateurs dynamiques fortement non linéaires rend l'assimilation de données très attractive pour un suivi hors ligne. Une telle analyse est en effet intéressante des lors que l'on souhaite extraire une séquence de primitives cohérentes en temps vis-à-vis d'une dynamique donnée et à partir d'une séquence de données bruitées et incomplètes.

Comme nous le verrons dans les deux autres parties de cette thèse, ceci est particulièrement intéressant pour l'analyse d'écoulements à partir de séquences d'images. Une telle approche devrait aussi avoir un certain intérêt pour l'analyse d'images médicales (études de déformations), ou encore le domaine de la post-production vidéo pour des applications de remplissage (inpainting), de recolorisation, de morphing ou de restauration de vieux films.

Les conditions d'application de l'algorithme d'assimilation vont maintenant être détaillées, en regardant la convergence de la solution, la validité des équations adjointes ou encore le rôle des matrices de covariance.

3.5 Application de l'assimilation de données

3.5.1 Convergence et stabilité des solutions

Les algorithmes de résolution par méthode adjointe présentés précédemment permettent de calculer simplement le gradient de fonctionnelles dépendant d'états de grandes dimensions. Pour chaque application, un test peut être réalisé afin de vérifier la validité de la mise en œuvre du modèle adjoint [50, 73]. En considérant un développement de Taylor de la fonction de coût J autour de X , on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J(X + \alpha\theta) = J(X) + \alpha \nabla J \cdot \theta. \quad (3.54)$$

L'intégration rétrograde de l'équation (3.48) permet elle aussi d'obtenir une valeur du gradient de la fonction de coût au point X . En utilisant ces deux relations, le système doit donc vérifier :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(X + \alpha\theta) - J(X)}{\alpha \nabla J \cdot \theta} = 1. \quad (3.55)$$

Le numérateur est alors calculé par différences finies, tandis que le dénominateur est obtenu par la méthode adjointe. Pour une discrétisation correcte, ce rapport doit être proche de 1. Un profil typique de ce rapport consiste à voir le ratio tendre vers 1 quand $\alpha \rightarrow 0$. Cependant, quand α devient trop petit, le rapport se met à diverger à cause de l'accumulation des erreurs de troncatures numériques. En effectuant ce test, on peut ainsi déterminer la valeur de α minimale vérifiant la propriété (3.55). Cette valeur sert alors de borne pour la convergence de la méthode. Par exemple, dans le cas de l'assimilation sous contrainte dynamique faible, on itérera les intégrations directes et adjointes tant que $|dX(t_0)| > \alpha$.

La convergence vers un minimum de la fonction de coût est ainsi assurée. Comme alternative à la descente de gradient utilisée, différents algorithmes peuvent être mis en œuvre pour optimiser

la convergence (Gradient conjugué, calcul du Hessien...). Cependant, si les opérateurs \mathbb{H} et \mathbb{M} sont linéaires, la fonction de coût ne sera pas nécessairement quadratique, et la convergence vers un minimum global ne sera pas assurée. Dans le cas non linéaire, le rôle de la valeur initiale X_0 de l'état (et des paramètres initiaux u du modèle) est ainsi primordial. En effet, si les conditions initiales sont trop éloignées de la solution optimale, on convergera toujours vers un minimum local.

3.5.2 Mise en œuvre du modèle adjoint

L'opérateur adjoint doit être l'exact adjoint numérique de l'opérateur direct pour pouvoir respecter la condition (3.55) [168]. Dans la plupart des applications industrielles déjà existantes, les codes sources correspondant au modèle direct sont très complexes, et des outils de différentiation automatique sont utilisés pour la mise en œuvre *a posteriori* du modèle adjoint. Citons TAPE-NADE [170], TAF [167], ADIFOR [2] ou ADOL-C [3] comme logiciels de différentiation automatique les plus couramment utilisés. La mise en œuvre du modèle adjoint peut cependant être expliqué schématiquement de manière simple. Si l'on considère le passage de la variable d'état du temps t_i au temps t_{i+1} par une suite de n transformations :

$$X(t_{i+1}) = T_n \circ T_{n-1} \circ \dots \circ T_1(X(t_i)),$$

soit :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= X(t_i) \\ \tilde{X}_1 &= T_1(\tilde{X}_0) \\ \tilde{X}_2 &= T_2(\tilde{X}_1) \\ &\dots \\ \tilde{X}_{n-1} &= T_{n-1}(\tilde{X}_{n-2}) \\ X(t_{i+1}) &= T_n(\tilde{X}_{n-1}), \end{aligned}$$

alors le modèle adjoint réalisera :

$$\lambda(t_i) = \left(\frac{\partial T_1}{\partial \tilde{X}_0} \right)^* \circ \dots \circ \left(\frac{\partial T_{n-1}}{\partial \tilde{X}_{n-2}} \right)^* \circ \left(\frac{\partial T_n}{\partial \tilde{X}_{n-1}} \right)^* \lambda(t_{i+1}).$$

Il apparaît que toute la trajectoire de la variable d'état ($\tilde{X}_0 \dots \tilde{X}_{n-1}$) doit être conservée pour pouvoir calculer le modèle adjoint exact. Il existe deux stratégies répondant à ce problème :

- Le "*Store-All*", qui conserve en mémoire la trajectoire entière de la variable d'état calculée par le modèle direct [2, 170].
- le "*Recompute-All*", qui consiste à recalculer le modèle direct depuis le temps initial à chaque fois qu'une valeur de la variable d'état est nécessitée [167].

En pratique les deux approches sont combinées en ne sauvegardant la valeur de la variable d'état qu'à certains temps et en recalculant les valeurs intermédiaires de la variable d'état depuis ces temps de sauvegardes. Des logiciels dédiés à la mise en œuvre complète du processus de à l'assimilation de données, comme PALM [138], sont aussi utilisés. Dans nos travaux, nous n'utiliserons pas ces logiciels. En effet, nos dynamiques sont plus simples et moins coûteuses que les modèles employés par les météorologues et les océanographes. De plus, lorsque c'est possible, il est plus pratique et plus efficace de développer le code adjoint parallèlement au code direct.

3.5.3 Matrices de covariance

Les matrices de covariance B , R et Q permettent de pondérer l'influence de l'initialisation, des observations et du modèle. Pour les méthodes de Kalman, ces matrices de covariance peuvent parfois être estimées empiriquement. Ce n'est ici pas le cas puisque les systèmes étudiés sont de très grandes dimensions. En pratique, des matrices diagonales ou bande diagonales sont généralement utilisées. Par exemple, si l'on dispose d'observations discrètes en espace, il est très important de redistribuer ces informations spatialement en prenant des matrices B et R diagonales par bande. Dans le cadre d'application de nos travaux, l'espace d'observation et celui d'état seront souvent de même dimension, puisque l'on observe des images et que l'on cherche à estimer un état sur ces mêmes images. Nous utiliserons donc principalement des matrices de covariance diagonales.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes généraux de l'assimilation variationnelle de données, en détaillant plusieurs cas particuliers comme le contrôle de paramètres du modèle et les modèles imparfaits. Nous avons d'autre part donné deux éclairages différents de ces techniques.

L'assimilation avec modèle imparfait telle que nous l'avons décrite n'est que très peu utilisée par la communauté d'assimilation de données. En effet, dans les applications, on dispose souvent de modèle physiques suffisamment précis pour l'échelle d'analyse visée et de mesures directes des variables d'état mises en jeu. Ce n'est pas le cas pour les applications du domaine de la vision par ordinateur, puisque nous n'avons que des mesures indirectes associées à des dynamique imprécise. Le formalisme incrémental décrit dans ce chapitre va nous permettre d'adapter les méthodes d'assimilations aux problèmes de la vision par ordinateur.

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons tout d'abord présenté dans le chapitre 1 les méthodes séquentielles de suivi telles que le filtre de Kalman. Dans le chapitre 2, une extension du filtre de Kalman d'ensemble à l'aide de la théorie du filtre particulaire a ensuite été proposée pour former le filtre de Kalman d'ensemble pondéré. Tout comme le filtre de Kalman d'ensemble, ce nouveau filtre est adapté aux variables de grandes dimensions. Il est de plus exact aux erreurs d'échantillonnage près.

Enfin, dans le chapitre 3, le cadre des méthodes d'assimilation variationnelle de données a été présentée et les modèles imparfaits ont été plus particulièrement étudiés.

Contrairement aux méthodes séquentielles de suivi détaillées dans le chapitre 1, le formalisme de l'assimilation de données n'a pour l'instant jamais été appliqué dans la communauté de la vision par ordinateur. Il apparaît que l'assimilation de données images peut apporter une solution intéressante à de nombreux problèmes dans les applications de suivi, comme la gestion du bruit d'acquisition de la caméra, les problèmes de projection 2D de phénomènes 3D ou encore les occultations de données. Il reste malgré tout très difficile de connaître parfaitement le modèle dynamique régissant le phénomène visualisé sur une séquence d'images.

En effet, quel modèle utiliser pour décrire l'évolution de la projection sur le plan image du mouvement d'un sportif, d'une voiture ou d'une main ? Une solution envisageable serait de se reposer sur des modèles dynamiques préalablement appris (et très paramétrisés) spécifiques à l'évolution de chaque objet d'intérêt. La mise en œuvre de méthodes d'assimilation à modèle parfait paraît de ce fait délicate pour des applications générales de vision par ordinateur. Pour des applications concernant la visualisation d'écoulements fluides, des lois dynamiques relatives aux lois de conservation de la mécanique des fluides peuvent être plus aisément utilisées. Suivant les observations dont on dispose et les applications mises en jeu, des modèles dynamiques parfait ou imparfait pourront donc être exhibés.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous allons ainsi aborder différentes applications de l'assimilation de données en vision par ordinateur. Ces applications concerneront principalement le suivi de courbes et de champs de vecteurs dans des séquences d'images.

Deuxième partie

**Suivi de courbes et de champs de
vecteurs**

Introduction

Dans cette seconde partie, nous présentons des applications de l'assimilation de données à des problèmes de la vision par ordinateur. Le cas de l'observation directe des images ainsi que celui de l'observation indirecte des variables d'état à partir de mesures calculées sur des images (pseudo-observations) sont étudiés pour différents problèmes de suivi.

Le **chapitre 4** est ainsi consacré au suivi de courbes délimitant des objets d'intérêt dans des séquences d'images. L'utilisation de pseudo-observations et l'observation directe des images sont tour à tour considérées pour guider notre système d'assimilation de courbes.

Une technique d'estimation de champs denses d'écoulements fluides à partir des principes de l'assimilation de données est ensuite proposée dans le **chapitre 5**. Une nouvelle fois, l'observation indirecte et directe des images sont successivement étudiées pour ce problème d'estimation.

Enfin, dans le **chapitre 6**, les méthodes précédemment explorées dans les chapitres 4 et 5 sont réunies pour réaliser un suivi couplé de courbe et de mouvement.

Nous montrerons comment l'assimilation de données permet de gérer des occultations totales de données pendant le suivi d'objets d'intérêt sur une séquence d'images.

Chapitre 4

Suivi de courbes fermées

4.1 Introduction

Le suivi d'une courbe délimitant un objet d'intérêt est un problème important et difficile dans le traitement de séquences d'images. En effet, les objets déformables ou même rigides changent souvent d'apparence lorsqu'ils sont visualisés dans une séquence d'images. Ces variations sont dues à des effets de perspective tridimensionnelle, à des mouvements complexes, à une modélisation de la prise de vue, à des occultations ou parfois même à des changements de topologie dans le cas d'objets déformables ou fluides.

La nature continue de ces objets et la dimension de l'espace d'état auxquels ils sont associés rendent compliquée la conception d'un filtre bayésien non linéaire efficace. Une réduction de la dimension de cet espace par l'utilisation de courbes paramétriques explicites est limitée au suivi visuel d'objets aux contours bien définis, ne présentant pas de changement de topologie [23, 53, 153]. Ce type de représentation est notamment difficilement envisageable lorsque l'on souhaite suivre des courbes de niveau de température dans des images atmosphériques satellitaires, des objets déformables ou des corps articulés.

Dans ce contexte, des approches s'appuyant sur une représentation implicite par ensemble de lignes de niveau ont été proposées [137, 161]. Toutes ces solutions consistent en fait à estimer une succession de cartes de segmentation instantanées [51, 120, 150, 183]. Ces techniques ne peuvent être considérées comme de réelles méthodes de suivi pour plusieurs raisons. Elles sont tout d'abord très sensibles aux bruits [122] et, à moins d'introduire des connaissances statistiques sur la forme de l'objet [53, 147], elles ne peuvent combler les occultations partielles de la cible. De plus, comme ces méthodes n'incluent aucune loi d'évolution temporelle de la forme, elles ne permettent pas de gérer l'absence persistante d'information sur les images (par exemple une perte complète de données sur l'image, un flou important du mouvement ou une haute saturation causée par un phénomène de surexposition). Aucune évaluation de l'erreur d'estimation n'est par ailleurs possible. De ce point de vue, seules les approches formulées dans le cadre d'un filtrage stochastique (propagation par une loi d'évolution temporelle et correction de la prédiction par une mesure), permettent de réaliser un suivi robuste [20, 153].

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de suivi visuel d'objets, formulée suivant les

principes de l'assimilation de données. L'introduction d'une dynamique sur l'objet devrait ainsi améliorer la robustesse au suivi et permettre par la même occasion de gérer des occultations partielles ou totales de la cible. Ce chapitre est organisée comme suit. Dans un premier temps, les différentes représentations utilisées pour décrire un contour sont rappelées dans la section 4.2. Un état de l'art des méthodes de suivi basées sur ces représentations est ensuite donné dans la section 4.3. Enfin, la technique développée est décrite dans la section 4.4.

4.2 Représentation des contours

Dans cette section, nous distinguons les deux principaux types de représentations utilisées pour la modélisation de contours : les contours actifs et les ensembles de lignes de niveau.

4.2.1 Contours actifs

Les contours actifs ou snakes ont été introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos dans [101]. Un objet y est défini par une courbe paramétrique fermée ou non \mathcal{C} . Le principe repose sur la minimisation d'une énergie composée de deux termes : un potentiel interne $E_{int}(\mathcal{C})$ associée aux propriétés physique du contour :

$$E_{int}(\mathcal{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\mathcal{C}''(q)|^2 dq, \quad (4.1)$$

et un potentiel externe $E_{ext}(\mathcal{C})$ liée aux données images I (intensité, gradient) :

$$E_{ext}(\mathcal{C}) = -\lambda \int_0^1 |\nabla I(\mathcal{C}(q))| dq. \quad (4.2)$$

Notons que α , β et λ sont des paramètres de pondération des différents termes. La force interne est en général liée à la continuité, à la courbure et à une force d'expansion ou de contraction dite de ballon [47].

Le principe général est simple, une courbe est placée dans l'image et évolue, tout en minimisant son énergie totale, vers les frontières de l'objet à détecter. La limitation de cette approche concerne principalement la gestion des changements de topologie de l'objet lorsque l'on souhaite suivre une cible dans le temps. Il faut en effet dans ce cas être en mesure de gérer explicitement la fusion ou la scission de la courbe et de ses points de contrôle.

De nombreux travaux ont été développés autour de cette représentation, voir [23] pour plus de détails.

Les contours actifs géodésiques, introduits par V. Caselles [38], permet de gérer les changements de topologie. Cette nouvelle approche étant plus attractive dans notre cadre d'étude, nous allons la détailler. Le terme pondéré par β de l'énergie interne (4.1) correspond plus précisément à l'élasticité du contour actif. Si le contour actif n'a pas d'élasticité, on obtient :

$$E_1(\mathcal{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(\mathcal{C}(q))| dq, \quad (4.3)$$

Nous pouvons étendre cette formule en remplaçant $-\|\nabla I(\mathcal{C})\|$ par $g(\|\nabla I(\mathcal{C})\|)$ qui est une fonction strictement décroissante telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0.$$

Le rôle de la fonction g est d'arrêter l'évolution des contours quand ceux ci sont arrivés à la limite d'un objet. Pour représenter g , on utilisera donc des fonctions de type :

$$g(\|\nabla I(\mathcal{C})\|) = \frac{1}{1 + \|\nabla \hat{I}(\mathcal{C})\|^p}.$$

où \hat{I} est une version filtrée de l'image et p prend pour valeurs 0 ou 1. On montre que le problème revient à minimiser l'énergie suivante [39] :

$$E_2(\mathcal{C}) = \int_0^1 g(\|\nabla I(\mathcal{C}(q))\|) |\mathcal{C}'(q)| dq, \quad (4.4)$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$E_2(\mathcal{C}) = \int_0^{L(\mathcal{C})} g(\|\nabla I(\mathcal{C})\|) ds. \quad (4.5)$$

Pour minimiser l'équation précédente, on cherche dans la direction du gradient quel est le chemin qui minimise la longueur euclidienne L de la courbe \mathcal{C} . La courbe est initialisée avec $\mathcal{C}(0) = C_0$, et son évolution est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{C}(\tau)}{\partial \tau} = g(I) \kappa \mathbf{n} - (\nabla g \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (4.6)$$

où \mathbf{n} est la normale à la courbe, et κ la courbure. La variable τ exprime ici un temps algorithmique et représente les itérations d'une méthode de type descente de gradient. La résolution de (4.5) et (4.6) permet de gérer plusieurs objets car il est possible de faire évoluer la topologie du contour. C'est ce qui fait l'intérêt de la méthode proposée dans [38] par rapport aux contours actifs classiques. Ce changement de topologie est rendu possible par l'utilisation des courbes de niveau que nous allons à présent détailler.

4.2.2 Ensemble de lignes de niveau

Les ensembles de lignes de niveau ou surfaces implicites ou "level set functions" modélisent des courbes fermées comme le niveau zéro d'une hypersurface implicite. Cette méthode, proposée par S. Osher et J.A. Sethian [137, 161], permet de gérer implicitement les changements de topologie des courbes suivies et a été utilisée pour un très grand nombre d'applications en vision par ordinateur [41, 119, 136, 149], pour des surfaces en imagerie médicale [111, 136, 180] ou pour des applications météorologiques [31, 45, 146, 177]. L'approche consiste à représenter au temps τ la famille de contours fermés $\Gamma = \{\mathcal{C}^i(\tau), i = 1, \dots, N\}$, décrivant les N objets d'intérêt, par le niveau zéro d'une fonction scalaire Φ ; c'est à dire $\Gamma = \{\mathbf{x} \mid \Phi(\mathbf{x}, \tau) = 0\}$. En supposant que les courbes sont régies par une évolution du type :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} = -F \mathbf{n},$$

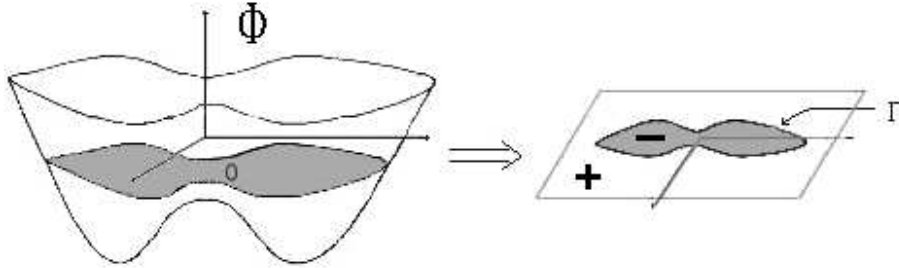


FIG. 4.1: **Représentation d'un ensemble de lignes de niveau Φ déterminé par Γ , sa ligne de niveau 0.**

où F est une quantité intrinsèque (ne dépendant pas d'une paramétrisation particulière) et où $\mathbf{n} = \frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$ désigne la normale aux courbes de niveau de Φ . Cette surface est habituellement définie à l'itération initiale τ_0 comme la distance signée minimale d , entre un point $\mathbf{x} = (x, y)$ et les contours $\mathcal{C}^i(\tau_0)$. On a ainsi $\Phi(\mathbf{x}, \tau_0) = \pm d$ (le signe négatif est affecté par convention aux points situés à l'extérieur des contours $\mathcal{C}^i(\tau_0)$), voir figure 4.1. L'évolution de la fonction $\Phi(\mathbf{x}, \tau)$ est définie de façon à ce que toutes ses courbes de niveau suivent la courbe de niveau zéro :

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \nabla\Phi \frac{\partial\Gamma}{\partial\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = -F\|\nabla\Phi\| + \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = 0. \quad (4.7)$$

Dans la pratique, la force F dépend de la normale à la courbe \mathbf{n} et de la courbure κ , comme dans le cas des contours actifs géodésiques. Cette équation donne une description Eulérienne¹ de l'évolution des courbes – qui permet à la méthode de gérer implicitement d'éventuels changements de topologie. Leurs positions sont données à chaque instant par la courbe de niveau zéro de la surface implicite. La fonction de propagation inclut un facteur d'arrêt qui dépend en général des données extraites de l'image, comme la fonction g définie précédemment pour les contours actifs géodésiques. Ce terme devant être défini pour toutes les courbes de niveau Φ (soit sur l'ensemble de la grille de l'image), il est construit par prolongement d'un critère d'arrêt défini sur la courbe de niveau zéro.

Le principe peut être étendu à la segmentation de plusieurs zones [181]. Deux méthodes intéressantes de segmentations basées sur la représentation en ensemble de lignes de niveau peuvent être citées :

Chan et Vese [41, 42] : Cette méthode variationnelle réalise la segmentation d'une région de l'image suivant un modèle considérant les intensités moyennes d'un objet m_o et du fond m_b . Il s'agit d'une simplification au cadre des ensembles de niveaux de la fonctionnelle proposée par Mumford et Shah [128] pour la segmentation d'image en région. La méthode consiste à minimiser une fonctionnelle comparant un modèle d'image avec la vraie image et pénalisant la longueur totale du contour :

$$J(m_o, m_f, \Phi) = \int_{\Omega} [(m_o - I(\mathbf{x}))^2 \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}) < 0} + (m_b - I(\mathbf{x}))^2 \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}) \geq 0}] d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} |\nabla\Phi(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

¹L'évolution du système (et de ses paramètres associés) est observée en chaque point d'un domaine fixe Ω .

où $I(\mathbf{x})$ est l'image définie sur le domaine spatial Ω . La fonction $\mathbf{1}$ est la fonction de Heaviside :

$$\mathbf{1}_{condition} = \begin{cases} 1 & \text{si la condition est respectée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.8)$$

et le contour Γ représente la ligne de niveau 0 de la surface implicite Φ . Il suffit alors de résoudre les équations d'Euler-Lagrange associées à cette fonctionnelle. La segmentation et les moyennes d'intensité solutions du problème sont atteints par un procédé itératif suivant un temps algorithmique τ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \left[\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) + (m_b - I(\mathbf{x}))^2 - (m_o - I(\mathbf{x}))^2 \right] \delta(\Phi),$$

où δ est la fonction de Dirac, dérivée de la fonction de Heaviside $\mathbf{1}$. Les objets définis par de tout petits gradients ne peuvent cependant pas être détectés.

Freedman et Zhang [77] : Dans l'esprit très proche de Chan et Vese, l'évolution des ensemble de niveau est ici guidée par les densités de probabilités liées à l'intensité lumineuse de l'objet et du fond. Des densités de probabilités sont calculées à l'intérieur et à l'extérieur de la ligne de niveau 0. Ces densités sont alors comparées avec les deux densités de référence ρ_o et ρ_b par une distance appropriée. La résolution du problème au moyen d'une descente de gradient donne une force F qui guide l'ensemble des lignes de niveau vers la segmentation minimisant la distance entre : densité intérieure à la surface/densité de référence de l'objet et densité extérieure à la surface/densité de référence du fond :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = F(\rho_o, \rho_b, \Phi) \|\nabla \Phi\|.$$

Toutes les techniques précédemment décrites sont uniquement destinées à la segmentation d'objet. De nombreux travaux sur le suivi temporel de courbes basés sur les représentations par contours actifs ou ensembles de lignes de niveau ont été réalisés. Nous en donnons à présent un bref aperçu.

4.3 État de l'art du suivi de courbes

Pour réaliser le suivi de proche en proche d'un objet dans une séquence vidéo, l'utilisation de représentations telles que les contours actifs ou les ensembles de lignes de niveau sont couramment utilisées dans la littérature. Nous allons présenter un échantillon de ces techniques dans deux parties distinctes, suivant qu'elles fassent intervenir ou non une dynamique de la vitesse des contours.

4.3.1 Suivi sans dynamique de vitesse

Un principe de base général des techniques de suivi sans contrainte dynamique consiste à segmenter l'objet à un temps donné, puis à utiliser ce résultat propagé de façon adéquate comme initialisation au temps d'après. Le contour peut ainsi être propagé grâce à une information de mouvement. Les méthodes diffèrent selon leur capacité ou non à gérer des occultations, une consistance temporelle dynamique ou à imposer une "forme" *a priori* à la courbe.

Paragios et Deriche [147, 148, 150] : La détection et le suivi sont réalisés par propagation d'ensembles de lignes de niveau. Une fonction de coût liée à la texture de l'objet est minimisée, une estimation du mouvement est ensuite utilisée pour initialiser le contour à l'image suivante. L'estimation du mouvement des contours est réalisée sur certains points de la courbe en faisant l'hypothèse d'une représentation spatiale affine du mouvement. Les occultations ne sont cependant pas gérées, puisque la méthode s'appuie exclusivement sur la texture de l'objet suivi et une prédiction affine du contour au temps suivant. Pour ajouter de la robustesse au suivi, les auteurs ont par la suite introduit un *a priori* sur la forme couplé à l'utilisation d'estimateurs robustes pour le flot optique [147].

Leventon, Grimson et Faugeras [111] : Cette méthode incorpore des informations sur la forme de l'objet d'intérêt dans le processus d'évolution. Un modèle de forme statistique est appris à partir d'un ensemble de courbes données. Des ensembles de lignes de niveaux évoluent avec le gradient de l'image et leurs courbures pour réaliser une maximisation a posteriori de l'estimation de la forme et de sa position.

Bertalmío, Sapiro and Randall [17] : La méthode ici proposée consiste à déformer des courbes contenues dans une image vers une position désirée dans l'image suivante. Les courbes sont représentées par des contours actifs géodésiques. Le principe est de déformer la première image vers la seconde par une équation aux dérivées partielles (EDP) tout en suivant les déformations de courbes d'intérêt avec une seconde EDP couplée à la première. Le suivi est alors réalisé en projetant les vitesses de la première équation sur la seconde. Cette méthode ne permet pas de gérer des occultations persistantes, mais propose un cadre méthodologique intéressant.

Goldenberg, Kimmel, Rivlin et Rudzski [79] : Il s'agit d'un travail portant principalement sur l'étude d'une mise en œuvre numérique stable et consistante sur les ensembles de lignes de niveau. Aucun champ de mouvement n'est calculé et les occultations ne sont pas gérées. Deux approches ont été étudiées à partir de ces travaux. La première, en temps réel, initialise l'ensemble de lignes de niveau de l'image I_{n+1} avec le résultat obtenu à l'image I_n . Un ratio temps/taille de l'image/intensité doit cependant être déterminé selon l'application. Dans la seconde approche, réalisée hors ligne, les contours actifs deviennent une surface active et un lissage spatio-temporel est réalisé.

Mansouri [120] : Dans cette méthode où les contours de l'objet suivi sont représentés par des ensembles de lignes de niveau, le mouvement n'est pas calculé préalablement et l'intensité de la forme aux frontières de l'objet n'est pas utilisée. Des hypothèses probabilistes sont cependant faites sur la conservation de la luminance sur une région donnée. Une extension de cette approche au domaine spatio-temporel a aussi été proposée [121]. Ces techniques ne permettent pas de gérer les occultations, car l'ensemble de lignes de niveau tend vers le contour le plus proche de l'image.

Mitiche et Feghali [74, 127] : Il s'agit d'une technique d'estimation simultanée des contours et de leur vitesse. Les équations d'Euler-Lagrange associées à une fonction de coût sont résolues par une représentation en ensemble de lignes de niveau sur un temps algorithmique. La méthode nécessite le calcul du flot optique. Il n'y a pas besoin d'information *a priori* sur le fond et les mouvements de caméra sont gérés. Ces segmentations successives sont obtenues instantanément

sans garantie de cohérence temporelle. La méthode ne gère pas les occultations et est limitée aux petits déplacements.

Cremers et Schnörr [53] : L'image est ici segmentée par des courbes fermées paramétriques (splines) en régions de mouvements homogènes par morceaux. Un *a priori* statistique sur la forme attendue des frontières du mouvement est déterminé par une phase d'apprentissage préalable. Le mouvement est estimé en faisant l'hypothèse d'un mouvement affine sur chacune des régions. La méthode ne gère pas les changements de topologie ni les occultations, sauf s'il y a une connaissance *a priori* sur l'objet.

Cremers et Soatto [52] : Par rapport à la méthode décrite précédemment, la représentation se fait désormais par un ensemble de lignes de niveaux (changement de topologie, suivi de plusieurs zones avec fusion/séparation). Contrairement aux splines, il ne faut plus réestimer la position des points de contrôles (il peut y avoir des problèmes de superposition de ces points). Le mouvement est supposé paramétrique par morceaux (6 paramètres pour chaque région). La méthode repose sur une formulation bayésienne de l'estimation du mouvement basée sur :

- une probabilité conditionnelle du gradient spatial de l'image selon un modèle de vitesse particulier.
- un *a priori* géométrique sur le mouvement paramétrique par morceaux estimé, favorisant les frontières du mouvement de longueur minimale.

Une fonctionnelle dépendant d'un modèle paramétrique de vitesse pour un ensemble de régions et des frontières les séparant est minimisée. Les solutions ne dépendent pas du choix de la paramétrisation. Cependant, comme la représentation du mouvement est paramétrique, la méthode est restreinte à des mouvements simples.

Bartasaghi et Sapiro [12] : L'objet est représenté par un ensemble de lignes de niveau. La méthode gère les occultations par interpolation temporelle sur les images où l'objet est absent. La technique ne tient cependant compte d'aucune dynamique de la vitesse de l'objet suivi, et interpole simplement des ensembles de lignes de niveau disponibles avant et après l'occultation.

Sundaramoorthi, Yezzi et Mennucci [166] : Cette méthode est basée sur la minimisation d'une énergie de contour actif. La principale idée développée est l'utilisation d'une métrique de Sobolev pour calculer le gradient de la fonctionnelle. Cette technique permet d'éviter d'atteindre un minimum local lors de l'étape de descente de gradient. Les contours obtenus sont ainsi lisses. De plus, en introduisant un *a priori* simple sur la dynamique (accélération constante), l'approche permet de gérer des occultations totales de l'objet.

Il ressort de cet aperçu qu'aucune des techniques proposées ne permet de garantir une certaine cohérence temporelle des trajectoires extraites. En effet, à moins d'introduire de forts *a priori* sur la forme de l'objet suivi, ces méthodes n'utilisent pas de modèle dynamique pour assurer une gestion au long terme des occultations.

En dépit de l'aspect prohibitif des matrices à inverser, les techniques séquentielles de filtrage pour le suivi de contours actifs et d'ensembles de lignes de niveau ont aussi été étudiées.

4.3.2 Suivi avec dynamique de vitesse

Nous nous intéressons donc à présent aux méthodes de suivi de courbes faisant intervenir une dynamique de la vitesse des contours. Ce type d'études est beaucoup plus rare dans la littérature, on peut néanmoins recenser les travaux suivants.

Peterfreund [153] : L'objet est ici représenté par un contour actif (et ses points de contrôle). Un filtrage de Kalman (prédiction/correction) utilisant les gradients de l'image et le flot optique est appliqué. Lorsque l'on applique la méthode hors ligne, les résultats sont bons et les occultations totales gérées. Cependant, le processus est lent. Avec le calcul du flot optique, la technique se déroule en ligne mais ne gère pas les occultations. Les résultats sont plus ou moins bons en fonction de la texture du fond. Les changements de topologie de l'objet ne sont néanmoins pas gérés.

Jackson, Yezzi et Soatto [97] : Il s'agit d'une méthode de filtrage basée sur un modèle dynamique de contours évolutifs. Les contours sont représentés par un ensemble de lignes de niveau. La courbe évolue vers une observation que l'on suppose donnée.

Un modèle dynamique sur la vitesse (accélération ou vitesse faible) est considéré pour gérer des occultations de données très fortes. De plus, la technique fonctionne en temps réel. Il y a cependant de nombreux paramètres sur le gain très influents, pour pondérer l'influence du modèle de vitesse par rapport à la segmentation.

Niethammer et Tannenbaum [131] : L'objet est représenté par un contour dynamique géodésique avec des informations sur son état (localisation, vitesse normale...). Une énergie est minimisée afin d'estimer simultanément la position et la vitesse de la courbe entre deux images. Les processus de propagation et de segmentation ne sont ainsi plus découplés et la méthode est robuste aux occultations partielles de l'objet suivi. La méthode peut fonctionner en ligne, mais les occultations persistantes ne sont par contre pas gérées. Ces travaux ont depuis été étendus avec un modèle dynamique géré par un filtre de Kalman [20], un filtre particulière [156] et un filtre de Kalman inodore [59].

Ces travaux apportent une meilleure cohérence temporelle des estimations successives des courbes. En s'appuyant sur les principes de l'assimilation de données, nous allons à présent voir comment des occultations, même totales, d'objets déformables ou rigides peuvent être simplement et naturellement gérées.

4.4 Assimilation de courbes

Dans cette section, nous appliquons le principe de l'assimilation de données au suivi de courbes fermées au cours d'une séquence d'images. Le modèle dynamique de cette courbe est ici lié à un champ de mouvement calculé par flot optique qui est considéré comme une entrée du système. Ce système est complété par différents types de mesures correspondant aux observations.

4.4.1 Représentation par surfaces implicites

Dans ces travaux, on se consacre exclusivement au suivi de courbes fermées non paramétriques pouvant changer de topologie au cours de la séquence d'image analysée. La représentation des courbes par une surface implicite est la mieux adaptée dans ce cadre d'études [137, 161].

Dans la suite, on considère une courbe d'intérêt $\Gamma(t)$ au temps $t \in [t_0, t_f]$ de la séquence d'image. Dans cette représentation, la courbe $\Gamma(t)$ entourant la cible à suivre est implicitement décrite par le niveau zéro de la fonction : $\Phi(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \Phi(\mathbf{x}, t) = 0\},$$

où Ω représente le domaine spatial de l'image. Cette technique permet d'obtenir une représentation Eulérienne de l'évolution des contours. On évite ainsi les problèmes de rééchantillonnage des points de contrôle associés à toute représentation paramétrique de type spline.

4.4.2 Modèle dynamique

Le problème que nous souhaitons résoudre consiste alors à estimer l'état d'une courbe inconnue, et donc de sa surface implicite associée Φ , sur toute la durée d'une séquence d'images. Pour cela, nous commençons par définir une loi d'évolution dynamique *a priori* de la surface inconnue. Nous supposons que la courbe est transportée entre chaque paire d'images par un champ dense de vitesses $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = [u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t)]^T$ et qu'elle est aussi diffusée par mouvement de courbure moyenne. En termes de surfaces implicites, le modèle d'évolution s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \epsilon \kappa \|\nabla \Phi\| - \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{v}(t), \quad (4.9)$$

où κ représente la courbure. En introduisant \mathbf{n} , la normale à la surface, l'équation (4.9) peut être réécrite :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \epsilon \kappa) \|\nabla \Phi\|, \quad (4.10)$$

où la normale \mathbf{n} et la courbure κ sont directement obtenues à partir des gradients de la surface Φ ,

$$\text{avec } \kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|} \right) \text{ et } \mathbf{n} = \frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|}.$$

Comme indiqué précédemment, le champ de vitesse transportant la courbe est fourni par un estimateur extérieur. En pratique, on utilise une version robuste de l'estimateur de flot optique de Horn et Schunck [125]. Afin de représenter l'imperfection du modèle, une fonction de contrôle $w(t)$ est finalement ajoutée au modèle dynamique :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \epsilon \kappa) \|\nabla \Phi\| = w(t). \quad (4.11)$$

Nous nous plaçons donc ici dans le cadre d'assimilation sous contrainte dynamique faible défini dans la section 3.2.2 du chapitre 3. La matrice de covariance $Q(t)$ de $w(t)$ est fixée comme une matrice diagonale constante, puisqu'il est ici difficile d'avoir une idée précise sur les erreurs de modèle.

4.4.3 L'opérateur tangent linéaire

Pour appliquer le principe de l'assimilation de données, nous devons définir l'expression de l'opérateur tangent linéaire $(\partial_{\Phi}\mathbb{M})$ de l'opérateur du modèle d'évolution \mathbb{M} au point Φ pour une petite perturbation Φ' :

$$\mathbb{M}(\phi + \Phi') \simeq \mathbb{M}(\Phi) + (\partial_{\Phi}\mathbb{M})\Phi'.$$

En reprenant l'expression (4.11), l'opérateur du modèle d'évolution s'écrit :

$$\mathbb{M}(\Phi) = \nabla\Phi \cdot \mathbf{v} - \varepsilon \|\nabla\Phi\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} \right).$$

Cet opérateur peut être réécrit d'une façon plus adéquate afin de calculer son opérateur tangent linéaire :

$$\mathbb{M}(\Phi) = \nabla\Phi^T \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta\Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla \Phi}{\|\nabla\Phi\|^2} \right). \quad (4.12)$$

où ∇^2 désigne la matrice Hessienne et Δ l'opérateur Laplacien. Après quelques calculs, l'opérateur tangent linéaire de \mathbb{M} au point Φ est donné par :

$$\partial_{\Phi}\mathbb{M}\delta\Phi = \nabla\delta\Phi^T \mathbf{v} - \varepsilon \left[\Delta\delta\Phi - \frac{\nabla\Phi^T \nabla^2 \delta\Phi \nabla \Phi}{\|\nabla\Phi\|^2} + 2 \frac{\nabla\Phi^T \nabla^2 \Phi}{\|\nabla\Phi\|^2} \left(\frac{\nabla\Phi \nabla\Phi^T}{\|\nabla\Phi\|^2} - Id \right) \nabla\delta\Phi \right]. \quad (4.13)$$

4.4.4 Discrétisation des opérateurs

Nous décrivons à présent les différentes discrétisations considérées pour les lois d'évolution. Elles concernent l'opérateur d'évolution \mathbb{M} , son tangent linéaire et l'adjoint de ce dernier. Notons $\Phi_{i,j}^t$ la valeur de Φ au pixel (i, j) et au temps $t \in [t_0; t_f]$. En partant de (4.9) et en utilisant un schéma de discrétisation semi-implicite, on obtient le modèle d'évolution discret suivant :

$$\frac{\Phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \Phi_{i,j}^t}{\Delta t} + \mathbb{M}_{\Phi_{i,j}^t} \Phi_{i,j}^{t+\Delta t} = 0. \quad (4.14)$$

Considérons à présent Φ_x et Φ_y , les matrices de gradients spatiaux horizontaux et verticaux de Φ , l'opérateur discret \mathbb{M} est défini par :

$$\mathbb{M}_{\Phi_{i,j}^t} \Phi_{i,j}^{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} (\Phi_x^{t+\Delta t})_{i,j} \\ (\Phi_y^{t+\Delta t})_{i,j} \end{pmatrix}^T \mathbf{v} - \frac{\varepsilon}{\|\nabla\Phi_{i,j}^t\|^2} \begin{pmatrix} -(\Phi_y^t)_{i,j} \\ (\Phi_x^t)_{i,j} \end{pmatrix}^T \nabla^2 \Phi_{i,j}^{t+\Delta t} \begin{pmatrix} -(\Phi_y^t)_{i,j} \\ (\Phi_x^t)_{i,j} \end{pmatrix},$$

où nous avons utilisé un schéma de différences finies pour la matrice Hessienne $\nabla^2\Phi$ et un schéma amont [161] pour le terme advectif $\nabla\Phi^T \mathbf{v}$. Ce dernier schéma permet de tenir compte du sens du champ de vitesse \mathbf{v} , les gradients sont ainsi calculés dans la direction appropriée :

$$\nabla\Phi_{i,j}^T \mathbf{v}_{i,j} = \max(u_{i,j}, 0)(\Phi_{i,j})_x^- + \min(u_{i,j}, 0)(\Phi_{i,j})_x^+ + \max(v_{i,j}, 0)(\Phi_{i,j})_y^- + \min(v_{i,j}, 0)(\Phi_{i,j})_y^+,$$

où $(\Phi)_x^-$ et $(\Phi)_y^-$ représentent les semi-différences finies à gauche, et $(\Phi)_x^+$ et $(\Phi)_y^+$ celles à droite. La discrétisation de l'opérateur tangent linéaire (4.13) est définie de manière similaire :

$$\partial_{\Phi_{i,j}^t} \mathbb{M}\delta\Phi_{i,j}^{t+\Delta t} = \mathbb{M}_{\Phi_{i,j}^t} \delta\Phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \frac{2\varepsilon}{\|\nabla\Phi\|^4} \begin{pmatrix} A & B \\ (\delta\Phi_x^{t+\Delta t})_{i,j} \\ (\delta\Phi_y^{t+\Delta t})_{i,j} \end{pmatrix},$$

avec A et B donnés par :

$$\begin{aligned} A &= \Phi_x^t \Phi_y^t (\Phi_{xy}^t \Phi_x^t - \Phi_{xx}^t \Phi_y^t) + (\Phi_y^t)^2 (\Phi_{yy}^t \Phi_x^t - \Phi_{xy}^t \Phi_y^t), \\ B &= \Phi_x^t \Phi_y^t (\Phi_{xy}^t \Phi_y^t - \Phi_{yy}^t \Phi_x^t) + (\Phi_x^t)^2 (\Phi_{xx}^t \Phi_y^t - \Phi_{xy}^t \Phi_x^t). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la discrétisation de l'adjoint $(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \Phi_{i,j}^t})^*$ est donnée par la matrice transposée correspondante à la discrétisation de l'opérateur tangent linéaire $(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \Phi_{i,j}^t})$.

La résolution du système linéaire mis en jeu dans notre discrétisation semi-implicite (4.14) est réalisée au moyen d'une méthode de gradients conjugués.

4.4.5 Condition initiale

Afin de définir une condition initiale, on suppose qu'un contour de l'objet cible $\Gamma(t_0)$ est disponible sur la première image de la séquence. Ce contour peut être obtenu par une technique de seuillage ou par une sélection manuelle de l'utilisateur. La fonction implicite g associée à ce contour est alors calculée comme condition initiale au problème de suivi. Plus précisément, la valeur de $g(\mathbf{x})$ est la distance au point le plus proche de la courbe initiale $\Gamma(t_0)$, avec la convention que la valeur est négative à l'intérieur du contour et positive à l'extérieur. On suppose alors cette condition initiale vraie à une fonction de contrôle η près, afin de considérer l'incertitude de la courbe initiale :

$$\Phi(\mathbf{x}, t_0) = g(\mathbf{x}, \Gamma(t_0)) + \eta(\mathbf{x}).$$

La matrice de covariance B représente l'incertitude de la condition initiale, et est définie comme une matrice diagonale :

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Id - e^{-|g(\mathbf{x}, t_0)|}.$$

Cette covariance fixe une incertitude faible sur la valeur initiale dans le voisinage de la courbe donnée $\Gamma(t_0)$. L'incertitude augmente dès que l'on s'éloigne de cette courbe.

4.4.6 Équations de mesure

Nous devons à présent définir l'équation de mesure liant la variable d'état à des observations de cet état. On suppose que l'on dispose d'une fonction d'observation $Y(t)$ qui constitue une mesure bruitée de la cible. Cette fonction est supposée liée à la variable Φ au travers d'un opérateur différentiel \mathbb{H} à un bruit gaussien $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ près :

$$Y(\mathbf{x}, t) = \mathbb{H}(\Phi(\mathbf{x}, t)) + \epsilon(\mathbf{x}, t). \quad (4.15)$$

Dans notre cas, nous ferons l'hypothèse que la fonction d'observation continue en temps $Y(t)$ est obtenue à partir du produit de convolution entre des images à temps discrets I_n et une famille de fonctions de localisation. Ces fonctions peuvent être définies par des fonctions de Dirac au temps et au lieu des observations, ou par des fonctions de moyennage spatio-temporel plus complexes. Dans ce travail, nous utiliserons trois formes différentes de cette équation de mesure.

4.4.6.1 Observation de courbes bruitées

Le modèle de mesure le plus simple consiste à définir la fonction d'observation $Y(t)$ dans le même espace que la variable d'état Φ . L'opérateur d'observation est alors l'identité ($\mathbb{H} = Id$).

En partant de ce principe, on définit la fonction d'observation comme la carte de distance signée à des courbes fermées observées $g(\mathbf{x}, \Gamma(t))$. Ces courbes, tout comme la courbe de la condition initiale, sont supposées fournies par une technique de seuillage ou une méthode de détection d'objet en mouvement. Soulignons que ces observations sont en général de mauvaise qualité. En effet, le seuillage fournit des courbes très bruitées, et les techniques de détection de mouvement sont souvent restreintes par les mauvaises détections lorsque la vitesse de la cible est trop lente. Des techniques de détection plus avancées [35] pourraient cependant être utilisées, afin de fournir des observations plus précises. Pour ce modèle d'observation, les matrices de covariance d'observations $R(t)$ sont définies diagonales :

$$R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) = R_{min} + (R_{max} - R_{min})(Id - e^{-|Y(\mathbf{x}, t)|}).$$

Cette fonction de la covariance de l'erreur de mesure a des valeurs faibles dans le voisinage des courbes observées ($R_{min} = 10$) et fortes lorsque l'on s'éloigne de ces observations ($R_{max} = 50$). Lorsqu'aucune mesure n'est disponible à un instant donné, les valeurs correspondantes de la fonction de la covariance d'observation sont mises à l'infini. La fonctionnelle à minimiser sera alors :

$$J_1(w, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|Y(t) - \Phi(t)\|_R^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_Q^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_B^2.$$

Dans ce premier modèle de mesure, on considère des observations indirectes des images, on parle alors de *pseudo-observations*.

4.4.6.2 Observations image, modèle d'intensités moyennes

Dans ce second modèle, on considère que les mesures liées à l'emplacement de la courbe sont directement données par les images $Y(\mathbf{x}, t) = I(\mathbf{x}, t)$. Les images sont ici comparées à un modèle d'image idéal composé par deux régions d'intensité lumineuse constante. La première région d'intensité constante, m_o , représente la valeur moyenne de l'objet suivi, tandis que la seconde correspond à la valeur moyenne de l'intensité lumineuse du fond, m_b . Ces deux niveaux d'intensité sont déterminés par la courbe initiale disponible. Ce modèle d'image est similaire à celui proposé par Chan et Vese [41], pour une approche de segmentation par ensemble de lignes de niveau. En supposant ce modèle exact à un bruit gaussien près, on obtient l'équation de mesure suivante :

$$I(\mathbf{x}, t) = \underbrace{m_o \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}, t) < 0} + m_b \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}, t) \geq 0}}_{\triangleq \mathbb{H}(\Phi)} + \epsilon(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

où $\mathbf{1}$ représente la fonction caractéristique définie par (4.8). L'opérateur d'observation \mathbb{H} fabrique dans ce cas une image synthétique. La covariance du bruit associé à ces mesures est dans ce cas déterminée par la covariance de l'intensité locale en chaque position spatio-temporelle. Ceci fournit une manière facile de vérifier si la fonction d'intensité lumineuse peut être bien approchée localement par le modèle proposé. Il est important de souligner que dans un tel modèle, la différence observée entre l'intensité locale de l'image et le modèle moyen par morceaux, pondérée par la matrice de covariance, guide la propagation de la courbe. Les matrices de covariance d'observations sont définies diagonales et correspondent aux covariances photométriques locales empiriques minimales par rapport aux deux moyennes :

$$R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) = \mathbb{E}[\text{Min}((I(\mathbf{x}) - m_o(\mathbf{x}))^2, (I(\mathbf{x}) - m_b(\mathbf{x}))^2)].$$

Notons qu'une telle équation de mesure mène à un terme de données dans la fonctionnelle globale (3.39) (en remplaçant Y et \mathbb{H} par les définitions précédentes) dont la modélisation de l'erreur de l'image est plus fine que celle de la fonctionnelle de Chan et Vese. Pour ce modèle, l'opérateur tangent linéaire associé à l'opérateur d'observation \mathbb{H} s'écrit :

$$\partial_{\Phi}\mathbb{H} = (m_o - m_b)\delta(\Phi). \quad (4.17)$$

4.4.6.3 Observations image, modèle de densités de probabilités locales

Nous désirons maintenant coupler l'approche précédente avec les travaux de Freedman et Zhang [77], où l'évolution de la courbe est guidée par ρ_o et ρ_b , les densités de probabilités liées à l'intensité lumineuse de l'objet et du fond. Une densité de probabilité est alors calculée sur chaque pixel du voisinage de la ligne de niveau 0 de Φ . Ces densités sont alors comparées aux deux densités de référence selon une distance de Kullback Leibler ou de Bhattacharia. Dans le cas d'une image unique, le système mène à une équation d'évolution de la courbe suivant un temps algorithmique τ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = F(\rho_o, \rho_b, \rho_{\Phi})\|\nabla\Phi\|,$$

où F varie selon les deux densités de référence (ρ_o et ρ_b) et ρ_{Φ} , la densité de probabilité de l'intensité lumineuse à l'intérieur de la courbe définie par le niveau 0 de la surface implicite. Cette approche ne permet cependant pas de définir simplement une image modèle comme dans (4.16). De plus, comme la densité de probabilité ρ_{Φ} varie suivant la position de la courbe, la forme analytique de l'opérateur tangent linéaire associé est trop complexe. La méthode permet néanmoins de segmenter des objets avec précision, comme l'illustre la figure 4.5. Pour répondre au problème de la détermination analytique de l'opérateur tangent linéaire, l'idée proposée est d'étendre le modèle des intensités moyennes en considérant des densités de probabilités de l'intensité lumineuse à la place de moyennes. Ce nouveau modèle compare alors des histogrammes d'intensité lumineuse locaux à deux fonctions de densité de probabilité connues ρ_o et ρ_b , représentant respectivement les distributions lumineuses de l'objet et du fond. Ces deux distributions de référence sont estimées grâce à la condition initiale de l'objet suivi. L'équation de mesure proposée s'écrit alors :

$$F(\Phi, I)(\mathbf{x}, t) = [1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_o)]^2 \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}, t) < 0} + [1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_b)]^2 \mathbf{1}_{\Phi(\mathbf{x}, t) \geq 0} = \epsilon(\mathbf{x}, t), \quad (4.18)$$

où d_B est la distance de Bhattacharya et $\rho_{V_{\mathbf{x}}}$ est la densité de probabilité de l'intensité lumineuse dans le voisinage du pixel \mathbf{x} . La distance de Bhattacharya est définie par :

$$d_B(\rho_1, \rho_2) = \int_0^{255} \sqrt{\rho_1(z)\rho_2(z)} dz.$$

Lorsque deux densités sont égales, leur distance vaut 1. On peut noter qu'ici, la distance entre les mesures et la variable d'état n'apparaît pas explicitement. Cet opérateur d'observation rassemble en effet directement les mesures (les distributions d'intensité locale) et la relation entre les mesures et la variable d'état (la distance de Bhattacharya). L'opérateur tangent linéaire correspondant est :

$$\partial_{\Phi}F = \left([1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_o)]^2 - [1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_b)]^2 \right) \delta(\Phi). \quad (4.19)$$

Il s'agit donc d'une force dirigeant la variable d'état Φ vers les observations. Dans ce cas, nous avons choisi de représenter la covariance associée aux bruits des mesures, ϵ , par une matrice

diagonale correspondant à la covariance photométrique locale empirique minimale :

$$R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) = \mathbb{E}[\text{Min}((1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_o))^2, (1 - d_B(\rho_{V_{\mathbf{x}}}, \rho_b))^2)].$$

La fonctionnelle à minimiser sera alors :

$$J_2(w, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|F(\Phi, I)(t)\|_R^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_Q^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_B^2.$$

4.4.7 Système d'optimalité

Pour les modèles d'observation de courbe du paragraphe (4.4.6.1) et de moyennes d'intensités du paragraphe (4.4.6.2), le système d'optimalité considéré pour le suivi de courbes peut être résumé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi^T \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta \Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} \right) = w(\mathbf{x}, t), \\ \Phi(\mathbf{x}, t_0) = g(\mathbf{x}, \Gamma(t_0)) + \eta(\mathbf{x}), \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_{\Phi} \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_{\Phi} \mathbb{H})^* R^{-1}(t)(Y(t) - \mathbb{H}(\Phi)), \\ \partial_w J_1 = Q^{-1}(\partial_t \Phi + \mathbb{M}(\Phi)) - \lambda, \\ \partial_{\eta} J_1 = -\lambda(t_0) + B^{-1}(\Phi(\mathbf{x}, t_0) - g(\mathbf{x}, \Gamma(t_0))). \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Dans le cas du modèle image par densité de probabilités locales (paragraphe 4.4.6.3), l'équation d'observation (4.15) devient (4.18), le système d'optimalité associé est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \Phi^T \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta \Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} \right) = w(\mathbf{x}, t), \\ \Phi(\mathbf{x}, t_0) = g(\mathbf{x}, \Gamma(t_0)) + \eta(\mathbf{x}) \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_{\Phi} \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_{\Phi} F)^* R^{-1}(t)(F(\Phi, I)), \\ \partial_w J_2 = Q^{-1}(\partial_t \Phi + \mathbb{M}(\Phi)) - \lambda, \\ \partial_{\eta} J_2 = -\lambda(t_0) + B^{-1}(\Phi(\mathbf{x}, t_0) - g(\mathbf{x}, \Gamma(t_0))). \end{array} \right. \quad (4.21)$$

4.4.8 Résultats

Nous présentons ici des résultats obtenus sur différents types de séquences d'images réelles. On rappelle que dans ces expériences, le champ de mouvement transportant la courbe est fourni par une technique extérieure d'estimation de champ dense [125]. Les équations de mesure utilisées seront les trois modèles précédemment décrits. Enfin, le modèle d'évolution de la courbe possède un paramètre de lissage pour sa partie non linéaire relative à la courbure. La valeur de ce paramètre a été fixée empiriquement afin d'assurer la stabilité numérique des loi d'évolutions.

4.4.8.1 Étude de la stabilité

En utilisant la définition (3.55) introduite dans le chapitre 3.5.1, la discrétisation de notre code adjoint a pu être testée :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(X + \alpha \theta) - J(X)}{\alpha \nabla J \cdot \theta} = 1.$$

Le gradient de la fonctionnelle a été calculé pour différentes valeurs du paramètre α et du paramètre de courbure moyenne ε sur la séquence de la raie (figure 4.2). Les résultats, présentés dans la figure 4.1 montrent que notre mise en œuvre est valide jusqu'à un incrément d'un facteur 10^{-6} . En effet, si α est trop petit, les erreurs d'arrondis s'accumulent et le critère (3.55) diverge. Les erreurs sont aussi dues à la partie non linéaire de l'opérateur d'évolution (ε est le paramètre lié à la composante de lissage non linéaire de courbure de (4.12)). La table 4.1 illustre le fait que la discrétisation utilisée donne des erreurs raisonnables pour des valeurs de ε comprises entre 10^{-1} et 10^{-5} . Finalement, fixer $\varepsilon = 10^{-3}$ nous semble être un bon compromis entre lissage et erreurs de linéarisation.

α	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
10^{-1}	0.977368	0.976915	0.97691
10^{-2}	1.001534	1.001224	1.001221
10^{-3}	1.005364	1.0041	1.004089
10^{-4}	1.015583	1.004473	1.004384
10^{-5}	1.114905	1.005292	1.004421
10^{-6}	2.107833	1.013197	1.004503
10^{-7}	12.037089	1.092217	1.005290
10^{-8}	111.329619	1.882416	1.013164

TAB. 4.1: **Test du gradient.** Les effets des perturbations et de la diffusion de la courbure sur le test du gradient.

4.4.8.2 Expériences

La première séquence comporte 17 images d'une raie se mouvant sur du sable (fig. 4.2). Comme ce type de poisson possède un moyen de camouflage naturel, sa luminosité et sa texture sont très proches de celles du sable. Le contour précis d'un tel objet est assez difficile à extraire. Dans cette séquence, nous avons utilisé le premier modèle d'observation (paragraphe 4.4.6.1), où les mesures sont fournies par un algorithme de segmentation simple, défini sur les lignes de niveau de l'intensité lumineuse. Afin de démontrer la robustesse de notre méthode de suivi, nous avons seulement considéré ces observations aux images (0, 3, 6, 9, 12, 15). On peut ainsi voir sur la seconde ligne de la figure 4.2 que la forme globale et les positions successives de la raie ont été bien reconstruites sur l'ensemble de la séquence. Le bruit et l'instabilité des lignes de niveau observées ont été lissés dans la dimension temporelle de manière appropriée. De plus, on peut souligner que cette technique permet de gérer les occultations partielles générées par le mouvement ventral de la raie sur elle-même, lors de ses déplacements (images #5 à #15 dans la fig. 4.2).

Comme second exemple, nous présentons dans la figure 4.3 les résultats obtenus sur une séquence d'images météorologiques décrivant une dépression. Ces images proviennent du canal infra-rouge du satellite Météosat. Les courbes observées sont des lignes de niveau dans une certaine zone d'intérêt. Dans ce type de séquence, nous souhaitons ainsi suivre des courbes relatives à une température. Les résultats démontrent que la technique proposée conserve la propriété d'adaptation de la topologie des méthodes d'ensemble de lignes de niveau, et incorpore en même temps une évolution temporelle consistante de la courbe.

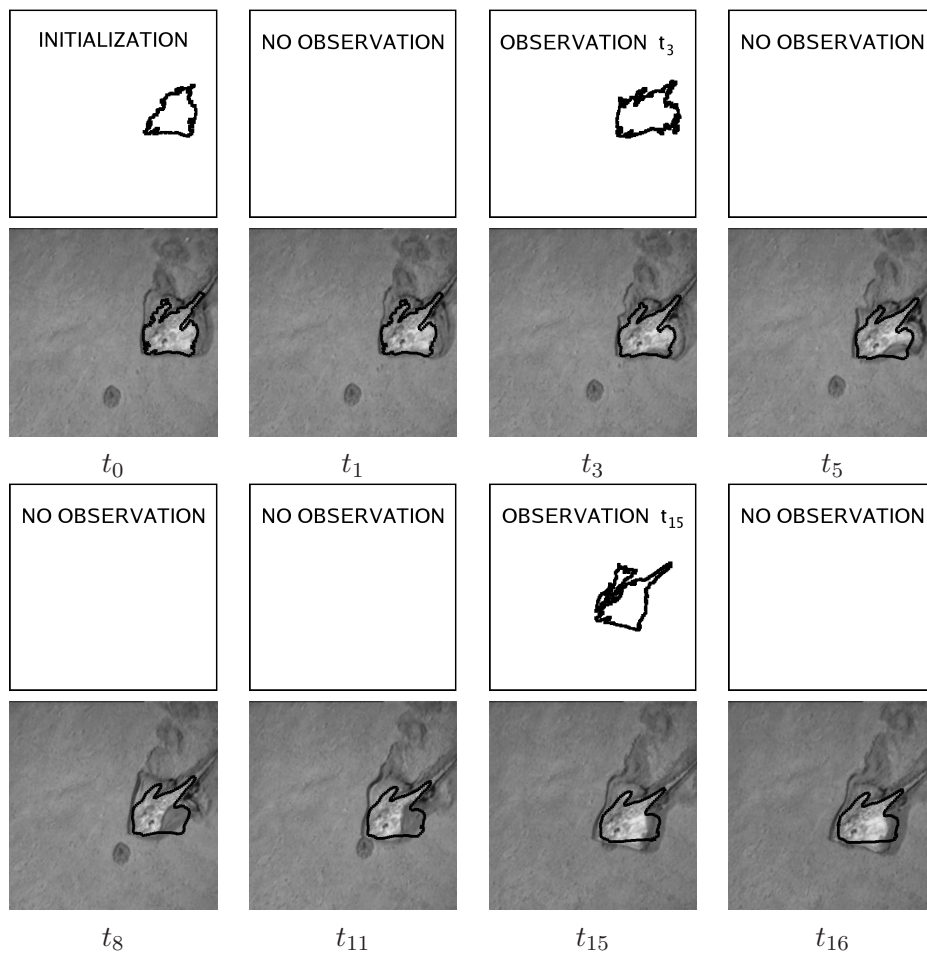


FIG. 4.2: **Suivi d'une raie**. Lignes du haut : Observations discrètes disponibles. Lignes du bas : Résultats des courbes continues obtenues

Dans le but d'illustrer un autre intérêt de notre approche, nous avons construit une séquence synthétique représentant successivement les quatre premières lettres de l'alphabet. Dans la figure 4.4, nous avons montré les résultats obtenus ainsi que les déformations intermédiaires de la courbe solution entre les images. La courbe solution se déforme continûment au cours du temps (selon la dynamique *a priori*) et opère un "morphing" entre les lettres.

Une séquence de segmentations stables dans le temps d'un objet déterminé est souvent difficile à obtenir. Il est donc préférable de considérer directement les observations image comme mesure de suivi. Ce type de mesure permet en effet d'éviter d'avoir recours à des techniques extérieures de segmentation, dont les paramètres sont parfois peu stables dans le temps. Afin de comparer l'efficacité des modèles de mesures directement liés à l'intensité lumineuse observée (*intensités moyennes* et *densités de probabilités locales*), nous avons appliqué un système d'assimilation simplifié, correspondant à de la segmentation, sur une seule image sans champ de mouvement. Les deux modèles de mesure ont été initialisés avec la même condition initiale. Les résultats sont

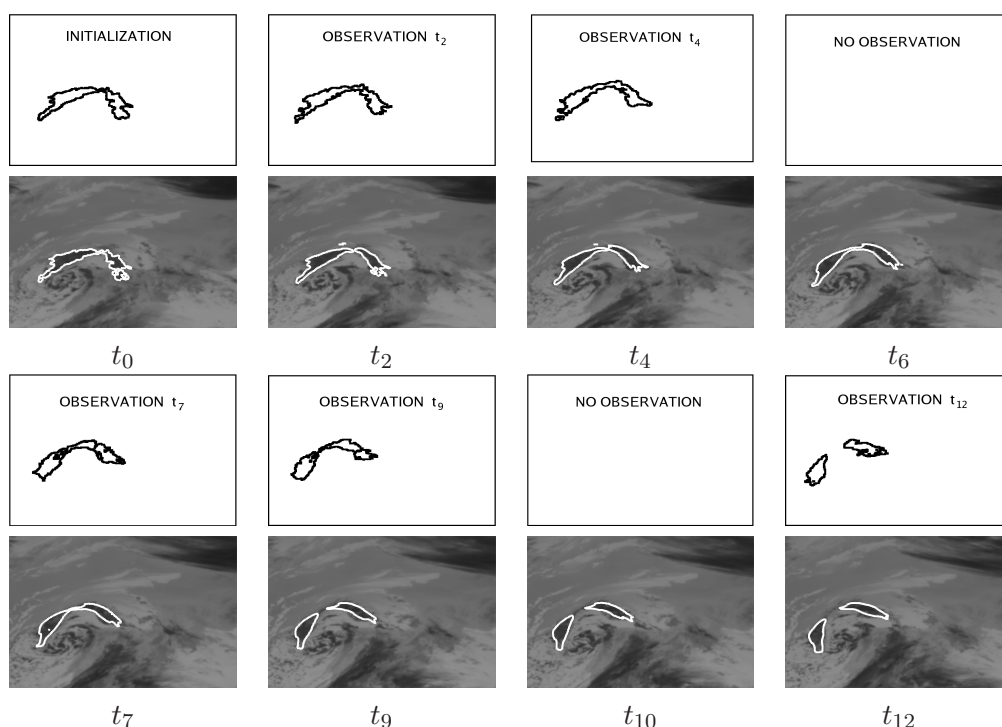


FIG. 4.3: **Suivi d'une dépression.** Lignes du haut : Observations discrètes disponibles. Lignes du bas : Résultats des courbes continues obtenues

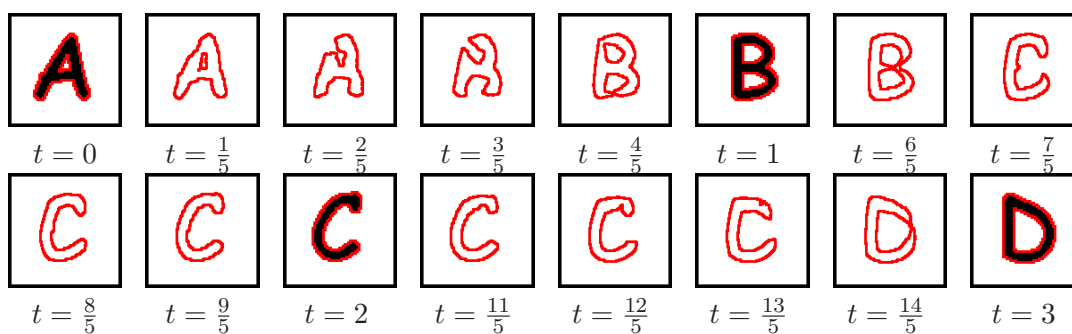


FIG. 4.4: **Séquence lettres.** Résultats de l'assimilation, la courbe est superposée aux images observées aux temps $t = 0, 1, 2, 3$. Les déformations de la courbe entre les images constituent une déformation continue entre les lettres.

présentés dans la figure 4.5. On observe que le modèle de *densités de probabilités locales* donne une meilleure segmentation, puisque le modèle s'appuyant sur les *intensités moyennes* est trop simpliste. Il est en effet difficile de représenter un fond ou un objet uniquement à partir de deux valeurs d'intensités lumineuses moyennes. Sur la base de cette expérience, nous avons choisis de ne pas retenir le modèle d'*intensités moyennes*. Par la suite, selon l'application considérée, nous référerons soit au modèle d'observation de courbes, soit au modèle d'observation construit à partir des *densités de probabilités locales*. Afin de démontrer la validité du modèle de *densités de probabilités locales*, nous avons appliqué notre système sur la séquence *Hamburg taxi*. Les

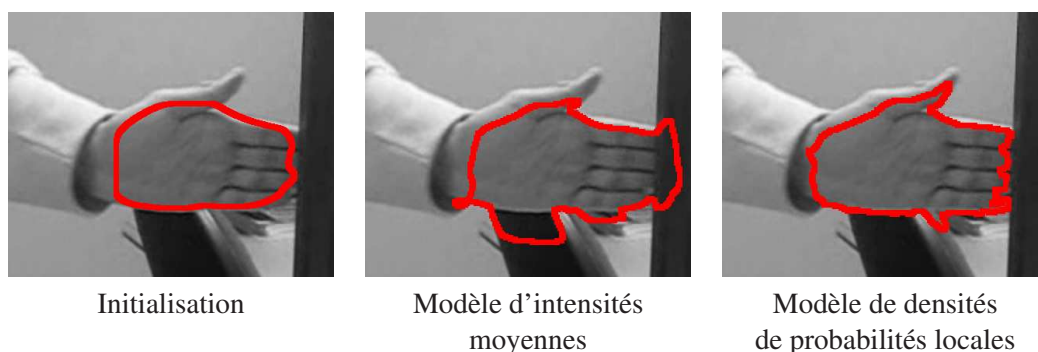


FIG. 4.5: **Comparaison des deux modèles images** sur une unique image après quelques itérations. La moyenne de l'intensité lumineuse du fond est claire. Ainsi, les zones noires sont plus proches de l'objet que du fond avec le modèle d'*intensités moyennes*. Ce problème est résolu en utilisant le modèle de *densités de probabilités locales*.

résultats, présentés dans la figure 4.6, montrent que la méthode d'assimilation permet de suivre une cible au travers d'une courbe dans un cas relativement simple, tout en respectant les gradients d'intensité lumineuse des images.

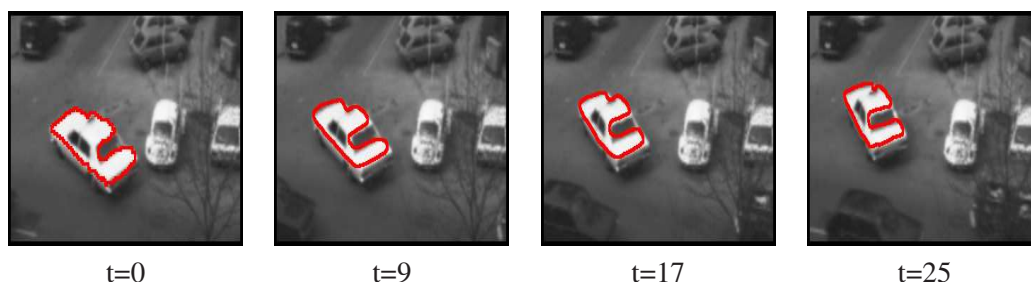


FIG. 4.6: **Séquence voiture**. Une seule courbe est disponible au temps initial. La forme est cohérente au cours du temps grâce au modèle de *densités de probabilités locales*.

Le système a ensuite été appliqué au suivi d'un tigre en pleine course. Cette séquence est composée de 27 images de mauvaise qualité. On note la présence d'un flou de bouger et d'un bruit conséquent. Le modèle de mesure considéré est le modèle de *densités de probabilités locales*. La courbe initiale permettant de déterminer les densités de probabilités du tigre et du fond est obtenue par une technique de seuillage. Les résultats sont présentés dans la figure 4.7. Malgré la très mauvaise qualité des images, l'approche permet de suivre le tigre continûment dans le temps.

Pour cette même séquence, nous avons aussi tracé sur la figure 4.8, un échantillon des segmentations obtenues par un modèle de Chan et Vese [41] basé sur le même terme de données que notre approche (équations. 4.18-4.19) avec un terme additionnel de pénalisation de la longueur de la courbe.

Comme on peut l'observer sur la figure 4.8, les masques obtenus par cette segmentation spatiale sont de bonne qualité pour certaines images. Les résultats sont néanmoins instables dans

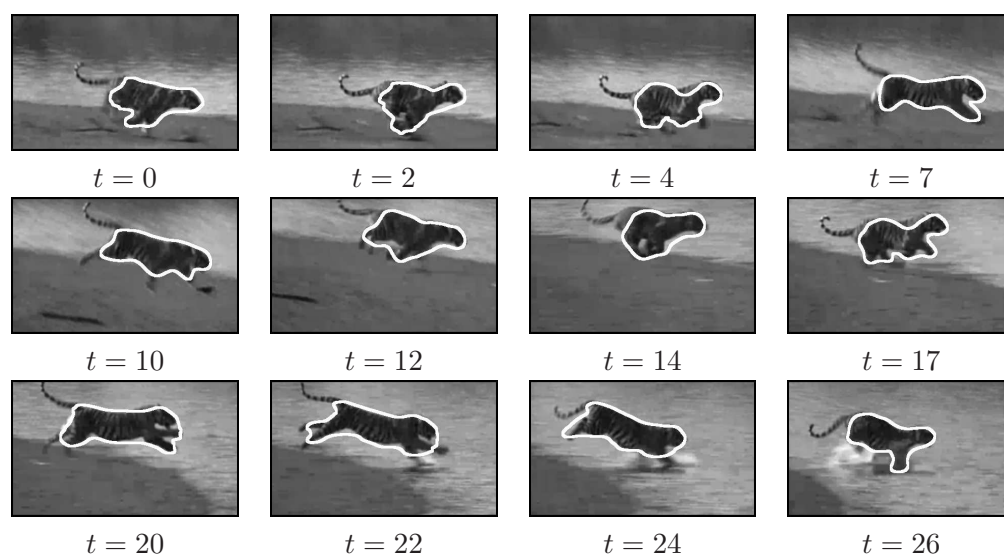


FIG. 4.7: **Séquence tigre**. Résultats de la technique d'assimilation avec le modèle de *densités de probabilités locales*

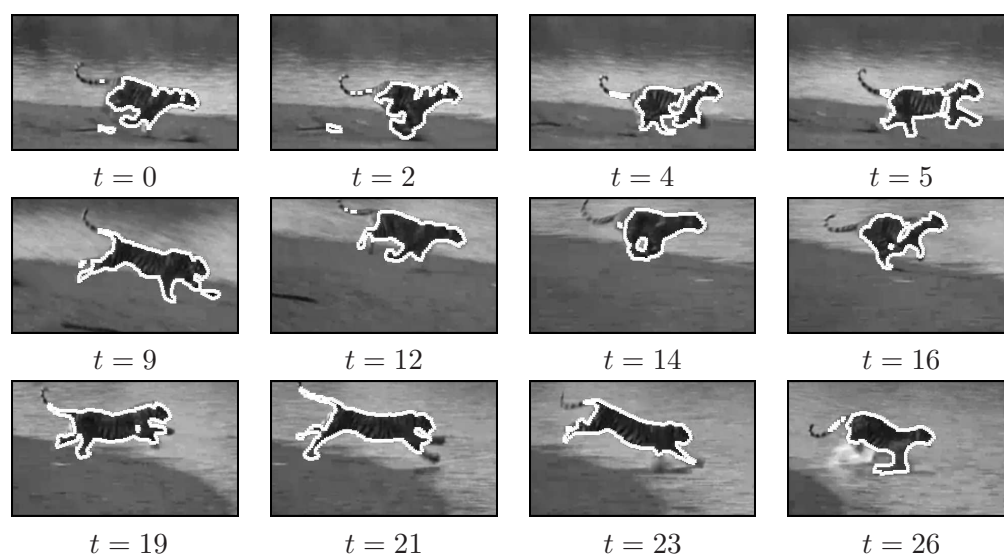


FIG. 4.8: **Séquence Tigre 2**. Segmentations successives obtenues par un modèle de Chan et Vese avec un modèle de données basé sur des mesures de *densités de probabilités locales* et la distance de Bhattacharya (équations. 4.18-4.19).

le temps et nécessiteraient une paramétrisation adaptée à chaque image pour obtenir des courbes constantes tout au long de la séquence. Comparée aux techniques de segmentation traditionnelles, l'assimilation de données fournit donc des résultats reproduisant de manière cohérente les déformations et les changements de topologie d'une cible au cours du temps. A cause de la mauvaise qualité de la séquence d'images et des champs de mouvement correspondants, on peut cependant observer que la courbe obtenue par assimilation ne suit pas exactement les gradients de l'image au cours du temps.

Afin d'illustrer les différences entre notre approche et les techniques de segmentations successives, nous avons finalement appliqué notre méthode à une séquence cardiaque d'Images à Résonance Magnétique². Le but est de suivre le ventricule gauche du système cardiaque. Les résultats de notre méthode sont présentés dans la figure 4.9. La région cible, approximativement initialisée sur la première image, est parfaitement suivie au cours de la séquence. Les déformations successives du ventricule sont bien captées de manière continue dans le temps. En comparaison, les résultats obtenus avec la même initialisation par la méthode de Chan et Vese montrent une expansion immédiate de la région d'intérêt à d'autres zones de l'image aux caractéristiques photométriques semblables (voir figure 4.10). Des fusions et des séparations de régions, incohérentes par rapport à la vraie déformation du ventricule, sont observées. Ce problème de fusion/séparation de région est en effet une des principales difficultés rencontrées lorsque l'on souhaite faire une analyse spatio-temporelle sur la base de résultats obtenus simplement spatialement (ou même liés en initialisant avec le résultat de l'image précédente).

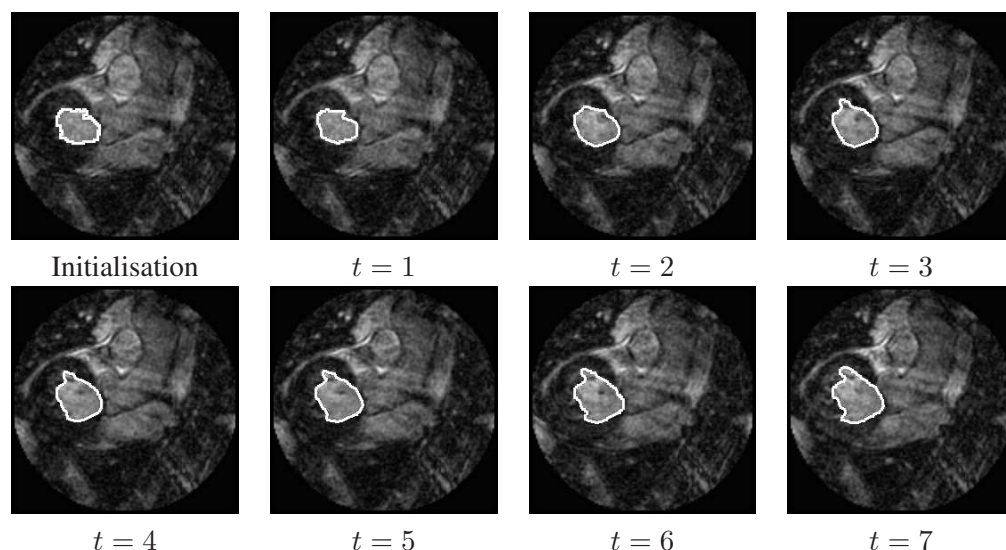


FIG. 4.9: **Séquence cardiaque d'Images à Résonance Magnétique.** Résultats de la technique d'assimilation avec le modèle de *densités de probabilités locales*. La courbe donnée comme initialisation est montrée sur la première image de la ligne du haut.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour suivre une courbe le long d'une séquence d'images. Cette technique permet de construire des déformations continues de l'objet cible au cours du temps. Différents modèles de mesure ont été utilisés pour guider le suivi. Les observations sont obtenues indirectement ou directement à partir des images. Dans le premier cas, un algorithme de segmentation extérieur est utilisé pour fournir les mesures, ce travail a été publié dans [142]. Dans le second cas, les images constituent directement les mesures, ces travaux de recherche correspondent à la publication [141]. Pour réaliser le suivi, la méthode nécessite

²<http://mrel.usc.edu/class/preview.html>

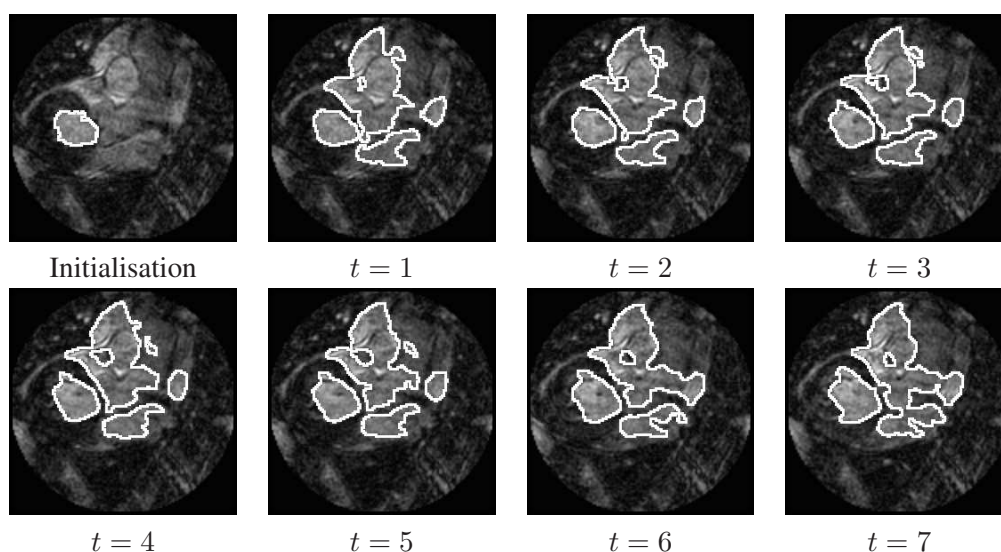


FIG. 4.10: **Séquence cardiaque d'Images à Résonance Magnétique 2.** Segmentations successives obtenues par un modèle de Chan et Vese avec un modèle de données basé sur des mesures de densités locales et la distance de Bhattacharya (équations. 4.18-4.19).

néanmoins d'estimer préalablement un champ de vitesse. Dans des cas plus complexes incluant des occultations, ce premier système d'assimilation ne peut pas fournir de résultats satisfaisant puisque le mouvement permettant de transporter l'objet ne sera que partiellement disponible à tous les instants. En supposant que la dynamique de l'objet suit une loi d'évolution connue au cours de la séquence et que l'on dispose d'une mesure du mouvement, il est également possible d'assimiler ces champs de vitesse.

En considérant un vecteur d'état rassemblant des représentations de la courbe et de son mouvement, ces variables couplées par leurs modèles respectifs doivent alors être assimilées conjointement. Dans le chapitre 5, nous nous consacrons premièrement au suivi de mouvement dans les applications d'images fluides. Ceci nous permettra de préciser les techniques générales utilisées pour l'estimation de champs denses. Le chapitre 6 sera ensuite dédié à l'étude du suivi couplé de courbes et de mouvement.

Chapitre 5

Estimation de champs denses de mouvements fluides

5.1 Introduction

L'estimation de mouvement est un problème très ancien dans le domaine de la vision par ordinateur. Ce problème consiste à estimer, à partir d'une séquence d'images, le mouvement apparent des objets composant une scène tridimensionnelle. Il s'agit donc d'un problème inverse extrêmement difficile à résoudre. En effet, la scène tridimensionnelle observée n'est perçue qu'à travers la projection d'une fonction de l'intensité lumineuse 2D.

Lorsque la variation de l'intensité lumineuse est nulle entre deux images (cas par exemple d'une sphère homogène tournant sur elle-même) ce problème possède une infinité de solutions dont une seule correspond à la projection du mouvement apparent réel. Ce problème s'étend à tout type d'images prises par des capteurs de toutes sortes et dépeignant des phénomènes physiques divers. Ces phénomènes physiques et les séquences d'images associées possèdent des spécificités qui vont, selon les cas, simplifier ou au contraire compliquer la tâche d'estimation du mouvement.

Un des cas particuliers rencontrés très fréquemment concerne les écoulements fluides. L'étude et la visualisation des écoulements fluides sont au centre de vastes domaines d'études comme l'imagerie médicale, les sciences de l'environnement, ou encore la visualisation expérimentale d'écoulements (aérodynamique, hydrodynamique). Ces domaines mettent en jeu des écoulements pour lesquels il n'existe pas de modélisation exacte ou qui ne sont pas modélisables dans toute leur complexité, en raison notamment de conditions limites (aux bords du domaine et à l'instant initial) complexes ou inconnues.

La visualisation offre dans ce cas un moyen rapide d'analyser et de comprendre ces écoulements. Les techniques standards issues de la communauté de vision par ordinateur, qui s'appuient sur des caractéristiques stables de la fonction de luminance et un mouvement rigide, s'avèrent en général mal adaptées. Lorsque les images sont bruitées, lorsque la vitesse du fluide est trop grande ou chaotique, comme dans le cas des écoulements turbulents, l'estimation de mouvement est assez difficile et encline aux erreurs. Une autre source d'erreurs est inhérente aux techniques d'estimation de mouvement. En effet, la plupart des approches utilisent uniquement deux images consécutives pour estimer le mouvement. Les différents champs obtenus souffrent donc d'une réelle inconsistance temporelle.

Ces techniques d'estimation de mouvement ont été étendues avec des régularisations temporelles [34, 145, 174]. On peut aussi noter l'introduction d'une contrainte dynamique simple dans [72]. Toutes ces méthodes sont destinées au suivi d'objets rigides et reposent sur des hypothèses de stationnarité en général fausses.

Afin d'améliorer la qualité de l'estimation des mouvements fluides observés au travers des images, des estimateurs spécifiques ont été introduits. Les estimateurs dédiés aux mouvements fluides sont basés sur l'introduction de termes de données adéquats [48], de fonctions de bases appropriées [56] ou de termes de régularisation d'ordre supérieur [48, 103, 178]. Cependant, ces approches n'incluent pas de contraintes dynamiques permettant le respect de lois de conservation physiques.

Ainsi, rien n'interdit à la solution obtenue d'être inconsistante par rapport à la loi dynamique qui régit l'écoulement. Pour résoudre ce problème, des travaux récents ont introduit une cohérence temporelle plus adaptée [83, 158, 159]. L'estimation obtenue à un instant donné est alors propagée selon une loi physique afin de produire un terme de donnée supplémentaire à l'instant suivant. Ces travaux n'assurent cependant toujours pas le respect absolu de la dynamique physique observée.

Au travers d'un schéma d'assimilation de données, l'introduction de lois de conservation combinée à des observations de mouvement va permettre d'améliorer considérablement la qualité de l'estimation des champs denses de mouvement. Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire le principe général des techniques d'estimation de champs denses dans la section 5.2 (voir [11] pour un état de l'art étendu des méthodes d'estimation de mouvement). Nous nous attarderons ensuite sur les méthodes dédiées à l'estimation de mouvement fluides dans la section 5.3 et plus particulièrement à celles qui introduisent une consistance temporelle au moyen de dynamique physique. Enfin, la méthode d'assimilation développée pour l'estimation de champs denses respectant une loi physique sera présentée dans la section 5.4.

5.2 État de l'art des techniques d'estimation de champs denses

Cette partie a pour but de décrire les principes généraux sur lesquels reposent les différents estimateurs denses de mouvement proposés dans la littérature. Les estimateurs dédiés aux mouvements fluides, reposant sur des principes similaires, seront décrits dans la partie suivante.

5.2.1 Principes généraux

Toutes les méthodes d'estimation de flot optique s'appuient sur la conservation temporelle d'invariants géométriques ou photométriques. Les invariants géométriques tels que les contours, les points de courbure maximale, les segments ou encore les coins ont l'avantage de constituer des invariants stables aisément identifiables. Par contre, ces points ont l'inconvénient d'être peu nombreux et donc de conduire à des mesures de mouvement *éparses*. Dans le cas d'images faiblement "structurées" (imagerie fluide, radar, etc...), ce type de marqueurs s'avère quasiment impossible à extraire. À l'opposé, les invariants photométriques sont eux beaucoup plus simples à obtenir et permettent une mesure *dense* du mouvement.

Les approches décrites dans ce chapitre s'appuient exclusivement sur des invariants photométriques. Dans la suite nous désignerons par $I(\mathbf{x}, t)$ l'intensité lumineuse d'un point $\mathbf{x} \in \Omega$ à l'instant t , où Ω représente le domaine spatial de l'image. Le champ de vecteur $\mathbf{v} = (u, v)$ désigne le champ des vitesses instantanées 2D que l'on cherche à estimer. D'un point de vue général, la constitution d'un invariant photométrique peut s'exprimer en supposant que la luminance est conservée au cours du temps. À partir de ces spécifications, l'invariance temporelle entre deux instants peut être caractérisée par une formulation *différentielle* linéaire, aussi appelée *équation de contrainte du mouvement apparent* (ECMA) :

$$\forall \mathbf{x}, \frac{dI}{dt}(\mathbf{x}) = I_t(\mathbf{x}) + \nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0.$$

Cette contrainte repose sur l'hypothèse forte que les variations temporelles de luminance sont uniquement dues au mouvement. Cette hypothèse possède des limitations évidentes et ne prend pas en compte un certain nombre de phénomènes tels que les variations d'illumination, les occultations ou les réflexions spéculaires. De plus, cette relation ne peut être utilisée seule car elle ne relie l'expression de la variation temporelle de l'intensité qu'à la composante du vecteur vitesse normale aux courbes d'iso-intensité :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})^\top = -\frac{I_t(\mathbf{x})}{\|\nabla I(\mathbf{x})\|} \cdot \frac{\nabla I(\mathbf{x})}{\|\nabla I(\mathbf{x})\|}.$$

Ce problème classique et commun aux différentes approches d'estimation du mouvement est désigné dans la littérature par le nom de "*problème de l'ouverture*". En effet, on ne peut pas directement estimer un champ bidimensionnel à l'aide de données unidimensionnelles (les images). On peut noter que cette approche ne permet en aucune façon une estimation dans les zones quasi-uniformes (infinité de solutions) et est très sensible aux bruits (considérés comme issus d'un mouvement). Ces difficultés sont habituellement levées en ayant recours à un *a priori* contextuel de la solution.

5.2.1.1 *A priori contextuel*

L'ajout d'un *a priori* contextuel permet de lever l'indétermination de l'estimation par la prise en compte d'un voisinage spatial, mais aussi de propager l'information vers les zones trop uniformes de l'image. Cela a aussi pour conséquence d'augmenter la *robustesse* de l'estimation vis-à-vis des bruits de mesure ou de modélisation. Il s'agit d'imposer une certaine régularité mathématique à la solution recherchée en introduisant une dépendance spatiale mutuelle des points de la grille image. Cette dépendance peut, suivant les cas, s'exprimer de façon paramétrique ou non-paramétrique. On distinguera ici, trois types principaux de méthodes :

- les lissages locaux,
- les lissages locaux globalisés,
- les lissages globaux.

5.2.1.2 *Lissages locaux*

Méthodes de corrélation Le principe de ce lissage consiste de façon générale à considérer un ensemble de fenêtres $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ centrées en différents points de la grille image. Un champ paramétrique (constant, affine, quadratique, ...) est estimé sur chacune de ces fenêtres $\mathcal{W}(\mathbf{x})$. Le vecteur

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ obtenu au centre de chaque fenêtre est conservé. Ce type d'estimation est parfois associé à un lissage *a posteriori* du champ \mathbf{v} obtenu. Ce principe de lissage peut s'exprimer aisément sur tout type d'invariant, qu'il soit géométrique ou photométrique. Dans le cadre de la conservation de la luminance, on obtient les méthodes de *corrélation* où un champ localement constant est recherché sur un espace d'états discret :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{v} \in \{-U, \dots, U\} \times \{-V, \dots, V\}} \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} \mathcal{C}(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{v}), I_1(\mathbf{r})).$$

Les fonctions de similarité, \mathcal{C} , utilisées habituellement sont : la valeur absolue, la fonction carré, ou la fonction de corrélation croisée. Cette dernière est utilisée sous sa forme initiale :

$$\mathcal{C}(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{v}), I_1(\mathbf{r})) = -I_2(\mathbf{r} + \mathbf{v})I_1(\mathbf{r}),$$

ou sous une forme centrée et normalisée par la variance :

$$\mathcal{C}(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{v}), I_1(\mathbf{r})) = -\frac{(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{v}) - \bar{I}_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}))(I_1(\mathbf{r}) - \bar{I}_1(\mathbf{x}))}{\sigma_{I_2}(\mathbf{x} + \mathbf{v})\sigma_{I_1}(\mathbf{x})},$$

où $\bar{I}(\mathbf{x})$ et $\sigma_I^2(\mathbf{x})$ désignent respectivement la moyenne et la variance empirique de la luminance sur une fenêtre \mathcal{W} centrée en \mathbf{x} . Cette dernière fonction constitue une mesure de corrélation plus robuste, puisque les variations d'intensité entre les deux images I_1 et I_2 sont prises en compte. Des études expérimentales ont montré que cette mesure conduisait à des déplacements estimés plus précis [123, 158, 159]. Des mises en œuvre très efficaces de ces fonctions de corrélation peuvent être obtenues dans le domaine de Fourier. Ces différentes méthodes sont très largement utilisées pour leur rapidité et leur simplicité. Elles trouvent leurs applications dans des domaines tels que l'indexation d'images, la compression de séquences d'images, où la visualisation d'écoulements fluides (méthodes dites PIV¹ pour l'estimation de mouvement à partir d'images de particules [4], l'extraction de vent, etc...). Ces méthodes rapides sont néanmoins intrinsèquement discrètes et il n'est pas toujours aisé de définir sur ce principe des schémas ayant une précision réelle (sous-pixellique).

Modèles paramétriques Un deuxième type de méthodes, modélisées au moyen d'un lissage local et reposant sur l'ECMA, revient à résoudre un système linéaire à p inconnues pour un modèle paramétrique à p composantes. Dans le cas d'un modèle de mouvement linéaire du type $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})\boldsymbol{\vartheta}$, où $P(\mathbf{x})$ est une matrice $2 \times p$ qui dépend de la paramétrisation choisie², estimer le mouvement revient alors à chercher le vecteur $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ tel que :

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\vartheta}} \int_{\mathcal{W}(\mathbf{x})} g(\mathbf{x} - \mathbf{r}) [I_t(\mathbf{r}) + \nabla I(\mathbf{r})^T P(\mathbf{r})\boldsymbol{\vartheta}]^2 d\mathbf{r}, \quad (5.1)$$

où $g(\mathbf{x})$ est une fonction de forme donnant plus ou moins d'importance au point central de la fenêtre considérée³. Notons que cette expression peut s'étendre à un produit de convolution dans

¹Particle Imagery Velocimetry.

² $P(s) = Id$ pour un modèle constant ; $P(s) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$ dans le cas d'un modèle affine et $P(s) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & y^2 \end{bmatrix}$ pour un modèle quadratique.

³Des fonctions gaussiennes sont habituellement employées.

le domaine spatio-temporel. Dans un cas discret et bidimensionnel, une résolution au sens des moindres carrés de l'expression (5.1) constitue l'estimateur proposé par Lucas et Kanade [117]. Ces approches sont en général associées à l'utilisation de filtres spatio-temporels directionnels pour estimer l'énergie spectrale locale du signal [76, 86, 98, 163, 179].

5.2.1.3 Lissages locaux globalisés :

Le second type de méthodes regroupe la majorité des approches denses d'estimation du mouvement. Contrairement aux cas précédents, ces techniques introduisent *explicitement* des fonctions de régularisation de la solution recherchée. En ajoutant un terme de lissage du mouvement sur la fonctionnelle à minimiser, le problème *inverse* initial peut ainsi être résolu. Des hypothèses de continuité d'un certain ordre sur la solution vont conduire à exprimer le problème d'estimation du mouvement comme la minimisation globale d'une fonctionnelle définie à partir de l'ECMA et portant sur les vitesses :

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} [(I_t + \nabla I^T \mathbf{v})^2 + \alpha \|\nabla u\|^2 + \alpha \|\nabla v\|^2] d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

où α est un paramètre de lissage positif. Ce cas correspond à l'approche proposée par Horn et Schunck [95]. Cette approche est définie sur un support continu Ω et \mathbf{v} est un champ de vecteur \mathcal{C}^1 sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Cette fonctionnelle est convexe, sa minimisation admet donc une solution unique. Les équations d'Euler-Lagrange donnant les conditions d'optimalité d'une telle fonctionnelle sont :

$$\nabla I(I_t + \nabla I^T \mathbf{v}) - \alpha \Delta \mathbf{v} = 0,$$

où Δ est l'opérateur Laplacien. Associé à une condition initiale \mathbf{v}_0 et à des conditions limites aux bords du domaine, ce système peut être résolu en cherchant la solution stationnaire d'un système d'équations de type réaction-diffusion :

$$\nabla I(I_t + \nabla I^T \mathbf{v}) - \alpha \Delta \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau},$$

où τ définit un pas de temps "algorithmique" de convergence itérative.

De façon équivalente, une discrétisation aux différences finies de la fonctionnelle (5.2) (dans le cadre d'une modélisation statistique du type champs de Markov par exemple) conduit à la résolution d'un grand système linéaire creux. Ce système étant très grand (la matrice à inverser est de taille $2N^2 \times 2N^2$, où N^2 désigne la taille d'une image), une résolution directe est assez difficile à mettre en œuvre. Une résolution par des méthodes itératives de type Gauss-Seidel, sur-relaxation, gradients conjugués, multigrille [125], *etc...* est alors envisageable.

Gestion incrémentale des grands déplacements : schéma multirésolution La validité des estimateurs s'appuyant sur l'ECMA est limitée aux déplacements qui, en chaque point, restent dans le domaine de linéarité de la fonction de luminance. Ce domaine est d'autant plus restreint que les déplacements sont de grande amplitude ou que les gradients photométriques sont importants (contours abrupts). Un moyen de s'affranchir de cette limitation consiste à s'appuyer sur une pyramide d'images I^k construite par filtrage (à l'aide d'un noyau gaussien G) et sous-échantillonnages successifs de l'image originale I :

$$G \star I^k \xrightarrow{\downarrow 2} I^{k-1},$$

où le symbole $\downarrow 2$ désigne une décimation par deux de l'image dans les directions horizontale et verticale et $I^0 = I$. Dans le cadre des approches multirésolution, l'idée consiste à estimer les composantes "principales" $\tilde{\mathbf{v}}$ du déplacement \mathbf{d} aux résolutions grossières, puis à raffiner successivement la solution en descendant dans la pyramide [15, 64]. Les approches multirésolution s'appuient sur une expression "recalée" de l'ECMA, obtenue à partir d'un développement de Taylor de la fonction de luminance $I(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t + 1)$ autour du point $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}$:

$$\nabla I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}, t + 1)^T \mathbf{v} + I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}, t + 1) - I(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (5.3)$$

en posant $\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}$. Cette contrainte diffère assez sensiblement de l'ECMA originelle. Les gradients spatiaux sont dans ce cas définis sur une image "recalée" $I(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}, t + 1)$ et la dérivée temporelle est remplacée par une différence inter-images déplacée.

Préservation des discontinuités La présence de grands déplacements n'est pas la seule difficulté rencontrée par des techniques d'estimation du mouvement. Le modèle de données utilisé s'appuie sur une hypothèse de conservation de la luminance qui n'est absolument pas respectée dans un certain nombre de situations telles que les occultations, les contours abrupts, la présence d'un bruit d'acquisition ou de variations d'illumination. L'autre source de problème concerne le terme de lissage et la préservation des discontinuités spatiales du champ de vitesse.

Le principal désavantage d'un terme de lissage quadratique est qu'il lisse "aveuglément" la solution à travers les contours des objets en mouvement. En effet, les fonctions de régularisation usuelles ne permettent pas d'introduire directement des ruptures de continuité. Plusieurs méthodes ont été proposées afin d'étendre la validité de l'ECMA. La plupart d'entre elles s'appuie sur une sophistication du terme quadratique d'attache aux données. La première stratégie possible consiste à normaliser ce terme en fonction des gradients photométriques :

$$\int_{\Omega} g(\|\nabla I(\mathbf{x})\|) [I_t(\mathbf{x}) + \nabla I(\mathbf{x})^T \mathbf{v}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} g(\|\nabla I(\mathbf{x})\|) \|\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x},$$

où $g(x)$ est une fonction décroissante définie telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Ces approches présentent l'avantage de rester linéaires vis-à-vis du champ inconnu tout en permettant une préservation des discontinuités dans le cas d'images homogènes contrastées. La préservation des discontinuités reste néanmoins uniquement conditionnée par les données et repose sur l'hypothèse forte (et fautive) que tout gradient photométrique fort correspond à une discontinuité de mouvement.

Une autre solution vise à adapter "en ligne" le lissage. Il s'agit dans ce cas de localiser en cours d'estimation les discontinuités sur la base des variations spatiales du champ des vitesses. Il est possible comme dans le cas précédent de localiser (*implicitement*) les discontinuités manifestes à l'aide de fonction de coûts robustes. Ces fonctions paires sont croissantes, définies telles que :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \psi(\mathbf{x}) = 0,$$

et souvent choisies telle que $\psi(\sqrt{\mathbf{x}^2})$ soit concave. Le terme de lissage s'exprime dans ce cas :

$$\int_{\Omega} \psi(\|\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2) d\mathbf{x}.$$

Toutes les techniques décrites jusqu'à présent peuvent évidemment être combinées entre elles.

Exemples d’approches Suivant la fonctionnelle associée, le choix de la discrétisation et de la méthode d’optimisation utilisée, il est possible de recenser quelques approches caractéristiques de la littérature. On distinguera ainsi les méthodes axées sur le choix de la norme pour le terme de régularisation [46], les fonctions robustes [22, 87, 125, 126], l’introduction d’opérateurs de lissage directionnel dépendant des contours photométriques [5, 89, 129], les tenseurs d’orientation [71, 72], les tenseurs de diffusion [33], les modèles de données sur des quantités dérivées de la fonction de luminance [145], les lissages de paramètres de modèles affines [132], les lissages spatio-temporels [32, 174], ...

5.2.1.4 Lissages globaux

Cette famille d’estimateurs de mouvement consiste à définir le champ des vitesses comme un champ paramétrique par morceaux [1, 10, 27, 126, 134]. Les différents morceaux (ou régions) forment une partition de l’image en terme de mouvements “homogènes” au sens de la paramétrisation utilisée. Le processus consistant à déterminer les paramètres de mouvement et la partition constitue un problème de *segmentation de l’image au sens du mouvement*. Plus précisément, les inconnues du problème sont : (i) une partition $R = \{R_1, R_2, \dots, R_M\}$ de Ω , où M est inconnu⁴ et, (ii) une paramétrisation θ_i par région du champ des vitesses ($\psi = (\theta_1, \dots, \theta_M)$) :

$$\forall \mathbf{x} \in R_i, \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\theta_i, \mathbf{x}).$$

Le problème peut alors être formulé au moyen d’une fonction d’énergie globale qui dans un cas discret est apparentée aux estimations disjointes par blocs. La fonction d’énergie peut naturellement s’écrire sur la base de l’ECMA :

$$\min_{M, R, \psi} \sum_{i=1}^M \sum_{\mathbf{s} \in R_i} \psi [I_t(\mathbf{s}) + \nabla I(\mathbf{s})^T \mathbf{f}(\theta_i, \mathbf{s})] + \text{a priori sur } R. \quad (5.4)$$

Le terme *a priori* permet de pénaliser l’apparition de nouvelles régions, et d’éviter une partition associée trop morcelée. De façon usuelle ce terme est défini comme la longueur totale de la frontière ∂R ; dans ce cas la frontière la plus petite possible est favorisée.

5.3 Phénomènes fluides

Les approches précédentes constituent des estimateurs de mouvement génériques dans le sens où, hormis des hypothèses d’invariance photométrique ou de continuité de la solution, aucune hypothèse spécifique sur la nature ou sur le mouvement des phénomènes observés n’est imposée. Il est bien évident que dans certains cas, l’association d’une contrainte de conservation de la luminance et de fonctions de lissage classiques s’avère assez restrictive. Ces modèles généraux ne permettent pas, par exemple, d’appréhender proprement des mouvements fluides. Dans le cas de l’imagerie fluide, les estimateurs de mouvements génériques sont souvent pris en défaut pour deux raisons principales. La première est que l’hypothèse de conservation de la luminance n’est absolument pas respectée en présence de puits, de sources ou d’autres phénomènes divergents qui s’accompagnent en général de variations locales très importantes de la luminance. La seconde raison est relative au terme de lissage. Un terme de lissage au premier ordre est, dans ce cadre,

⁴La partition est une union de régions telle que $\cup_{i=1}^M R_i = S$; $\forall i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset$.

également préjudiciable puisqu'il "écrase" la *divergence* ($\text{div}(\mathbf{v}) = u_x + v_y$) et le *rotationnel* ($\text{rot}(\mathbf{v}) = v_x - u_y$) de la solution. Une façon de remédier à cela consiste à s'appuyer d'une part sur un modèle de données relatif à l'*équation de continuité* d'une quantité E de la mécanique des fluides [48] :

$$\frac{dE}{dt} = E \text{div}(\mathbf{v}),$$

et d'autre part sur un terme de lissage *div-curl* favorisant les amas compacts de divergence et de rotationnel [48] :

$$J(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\psi([\nabla I \cdot \mathbf{v} + I_t + I \text{div} \mathbf{v}]^2) + \alpha \psi(\|\nabla \text{div} \mathbf{v}\|^2) + \beta \psi(\|\nabla \text{rot} \mathbf{v}\|^2)) d\mathbf{x}, \quad (5.5)$$

où α et β sont deux paramètres de pondération et ψ est une fonction robuste. La résolution du problème de minimisation associée s'avère cependant plus délicate que pour un estimateur générique et nécessite quelques adaptations [48]. Cet estimateur conduit à des résultats d'une qualité comparable à celle obtenue par les approches locales utilisées dans le cadre de la visualisation d'écoulements fluides, mais pour un volume d'informations bien supérieur.

5.3.1 Représentation physique des champs de vecteurs

Pour les mouvements fluides, on préférera donc représenter le champ de vecteur \mathbf{v} par sa vorticité ξ et sa divergence ζ :

$$\begin{aligned} \xi &= \nabla^\perp \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \zeta &= \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

La vorticité est li e à la présence de mouvements rotatifs, tandis que la divergence marque la présence de puits ou de sources dans un écoulement (voir figure 5.3.1).

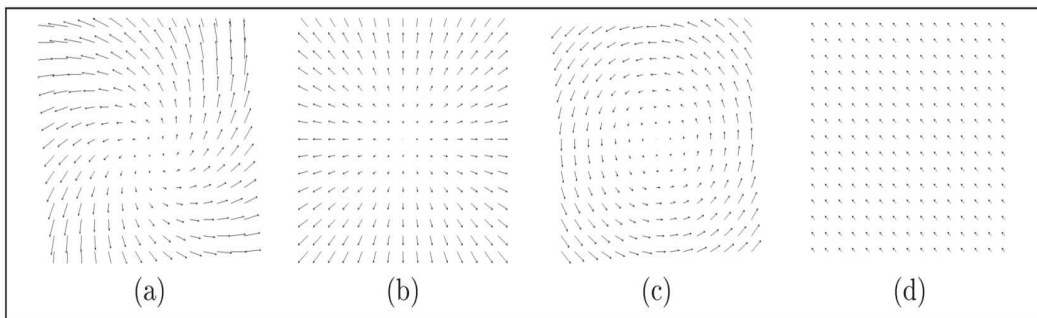


FIG. 5.1: **Décomposition de Helmholtz** : (a) champ de vecteur bidimensionnel. (b) composante divergente. (c) Composante de vorticité. (d) Composante laminaire (ici une translation).

En supposant qu'un champ de vecteurs s'annule à l'infini⁵, il peut être décrit par la d compo-

⁵Afin de rester dans le voisinage des frontières de l'image, une composante laminaire à divergence et vorticité nulles est retir e du champ de vecteurs. Cette composante est estim e par un estimateur de Horn et Schunck associé à un fort lissage [48].

sition orthogonale de Helmholtz, comme une somme de deux gradients de fonctions potentielles :

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \Psi + \nabla \phi. \quad (5.7)$$

La fonction de courant Ψ et le potentiel de vitesse ϕ correspondent respectivement aux parties solénoïdales et irrotationnelles du champ de vecteurs \mathbf{v} . Ils sont liés à la vorticité et à la divergence au travers de deux équations de Poisson : $\xi = \Delta \Psi$, $\zeta = \Delta \phi$. La solution de ces deux équations peut être exprim e comme un produit de convolution avec le noyau de Green $G(\bullet) = \frac{1}{2\pi} \log(\bullet)$ associé à l'opérateur Laplacien 2D :

$$\begin{aligned} \Psi &= G * \xi, \\ \phi &= G * \zeta. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le champ des vitesses 2D peut ainsi être retrouvé en connaissant sa divergence et sa vorticité au moyen de l'intégrale de Biot-Savard :

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp G * \xi + \nabla G * \zeta. \quad (5.9)$$

Ce calcul peut être facilement réalisé dans le domaine de Fourier puisqu'il ne fait intervenir que des produits de convolution.

5.3.2  quations d'évolution des écoulements fluides

L'équation de Navier-Stokes fournit une loi universelle pour la prédiction de l'évolution des écoulements fluides. Cette équation décrivant l'évolution de phénomènes 3D, peut aussi être projet e en 2D. Afin d'avoir une expression de l'équation de Navier-Stokes plus adapt e au problème de suivi dans les séquences d'images, ce travail repose sur la formulation compressible 2D de vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi + \xi \cdot \zeta - \nu_\xi \Delta \xi = 0, \quad (5.10)$$

où ν_ξ est le coefficient de viscosité. Cette formulation décrit un transport de la vorticité par le champ de vitesse et une diffusion au cours du temps. Concernant la divergence, la loi de conservation s'écrit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta + \zeta^2 - \nu_\zeta \Delta \zeta = 0, \quad (5.11)$$

avec le coefficient de diffusion ν_ζ . Dans les exemples que nous traiterons, nous ferons l'hypothèse que la divergence reste faible et qu'elle est transport e par un processus aléatoire. Plus précisément, on suppose que la divergence est une fonction d'un processus aléatoire gaussien X_t , avec un incrément stationnaire (un mouvement Brownien) initialement situé sur les points \mathbf{x} de la grille. Il peut être démontré, au travers de la formule d'Ito et de l'équation rétrograde de Kolmogorov, que la fonction $u(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}[\zeta(X_t)]$ obéit alors à l'équation de la chaleur [135] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu_\zeta \Delta u &= 0, \\ u(0, \mathbf{x}) &= \zeta(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

où ν_ζ est le coefficient de diffusion de la divergence. D'après cette équation, la divergence peut être retrouv e à tout instant comme la solution de l'équation de la chaleur (*i.e.* l'espérance de

la divergence à l'instant t est donnée par le lissage de la divergence initiale avec une fonction gaussienne d'écart type $2\sqrt{\nu_\zeta}$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nu_\zeta \Delta \zeta = 0. \quad (5.13)$$

5.3.3 Application à l'estimation de mouvement

De nouveaux estimateurs de mouvements fluides utilisant ces lois dynamiques ont récemment vu le jour. Nous proposons de les décrire, car ils constituent un premier pas important vers une estimation temporelle cohérente de champs de vitesse suivant une loi physique.

Cuzol et Mémin [54,55] : Ces travaux reposent sur une interprétation probabiliste des équations de Navier-Stokes. Un algorithme de filtrage stochastique non linéaire adapté au suivi de mouvement fluide et s'appuyant sur une représentation de faible dimension du champ de déplacement est proposé. L'idée repose sur les méthodes de particules de vortex [44, 49, 110], consistant à approcher la vorticit   d'un champ \mathbf{v} par une somme discr  te de fonctions de Dirac régularisés et situés en des *vortex ponctuels* \mathbf{x}_i :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_i \gamma_i f_\epsilon * \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (5.14)$$

o   le coefficient r  el γ_i repr  sente la force associé    la particule i , f est une fonction de lissage radiale de domaine d'influence ϵ et δ est la fonction de Dirac. Cette discréétisation de la vorticit   en un nombre limit   d'  l  ments permet d'  valuer le champ de d  placement directement    partir de l'int  grale de Biot-Savart. Une repr  sentation analogue peut   tre   crite pour la divergence du champ    partir de *particules de source*. La discréétisation de la vorticit      l'aide de p particules de vortex conduit, gr  ce    l'int  grale de Biot-Savart,    la repr  sentation suivante pour la composante sol  no  dale du champ de d  placement :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=0}^p \gamma_i^{sol} K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp(\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x}), \quad (5.15)$$

o   \mathbf{x}_i et ϵ_i indiquent respectivement le centre et le domaine d'influence de $K_{\epsilon_i^{sol}}^\perp$, le gradient orthogonal r  gularis   du noyau de Green. Une approximation du champ de d  placements est ainsi obtenue par une somme pondéré de fonctions de base d  finies par la position de leur centre et leur domaine d'influence.

Un filtre particulaire est ensuite mis en place. Une version probabiliste de l'  quation de vorticit  -vitesse    divergence nulle sert alors de mod  le dynamique. Cette   quation diff  rentielle stochastique est simulé par un ensemble donn   d'  chantillons en   tapes distinctes suivant la m  thode de *viscous splitting* [44], permettant de traiter successivement la partie non visqueuse d'advection et la partie visqueuse de diffusion de l'  quation.

Une phase de correction mettant    jour le poids associ      chaque   chantillon est ensuite réalisé en utilisant une vraisemblance d  finie    partir des variations spatio-temporelles de la luminance.

H  as, M  min et Papadakis [83, 84] : Ces travaux s'appuient directement sur les   quations dynamiques (5.10) et (5.13) présentés pr  c  demment. Il s'agit d'une alternative aux r  gularisations spatio-temporelles d  finies dans [174]. La vorticit   et la divergence de l'estimation    un instant

donné sont ici propagées selon les lois dynamiques afin de réaliser une prédiction sur les grandes échelles du mouvement. Les vorticités et divergences propagées sont ainsi utilisées pour calculer un champ prédit \mathbf{v}_p , par la relation (5.9), qui sert d'ancrage à l'estimée à l'instant suivant via un terme quadratique supplémentaire dans la fonctionnelle de l'estimateur. Cette approche permet donc d'introduire une cohérence physique temporelle entre les estimation successives.

Une extension de la méthode permet aussi d'incorporer des champs de vecteurs de corrélation comme termes de données supplémentaires, en ajoutant le terme suivant à la fonctionnelle de l'estimateur :

$$J_c(\mathbf{v}) = \int_M \left(\sum_{i=1}^K \gamma^i \mathcal{N}^i(\mathbf{s}^i - \mathbf{s}) \psi_c(\mathbf{v}_c^i - \mathbf{v}(\mathbf{s})) \right) ds,$$

où ψ_c est une fonction de pénalisation robuste et où les vecteurs de corrélation $\mathbf{v}_c^i = (u^i, v^i)$ situés aux pixels $\mathbf{s}^i = (x^i, y^i)$ influencent leurs voisinages selon une loi gaussienne bidimensionnelle $\mathcal{N}^i(\mathbf{s}^i - \mathbf{s})$ de variance σ liée à l'influence de la fenêtre de corrélation. Enfin, γ^i est un coefficient de confiance défini à partir de la fonction de dissimilarité. Le masque $M \in \Omega$ correspond au domaine de définition des vecteurs de corrélation disponibles. Les vecteurs de corrélation, calculés par des méthodes PIV (pour Particle Image Velocity) pour des séquences d'images d'écoulements expérimentaux ou des séquences d'images satellitaires, présentent en effet l'avantage d'être très précis et peu sensibles aux déplacements de grande amplitude. Ces vecteurs ne sont cependant pas denses, et il est difficile d'en extraire une vorticité précise par interpolation. L'incorporation de ces données dans un schéma d'estimation de champ dense permet donc d'éviter l'emploi de schémas multirésolution. La figure 5.2 illustre l'apport de la prédiction et des vecteurs de corrélation à la consistance temporelle des estimations.

Ruhnau et Schnörr [158, 159] : Ces travaux s'appuient sur des idées très proches de la technique précédemment présentée dans le cas d'écoulements turbulents incompressibles 2D. La vorticité est elle aussi propagée par l'équation de vorticité-vitesse afin de produire une prédiction de la vorticité ξ^p servant de terme de donnée pour l'estimation au temps suivant :

$$\xi^p = \xi(t-1) + \int_{t-1}^t [\nabla \xi(t') \cdot \mathbf{v}(t') - \nu_\xi \Delta \xi(t')] dt'.$$

Ceci mène à la minimisation de la fonctionnelle :

$$J_\xi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\psi([\nabla I \cdot \mathbf{v} + I_t]^2) + \alpha \psi(\|\nabla \text{curl} \mathbf{v}\|^2) + \beta \|\xi_p - \nabla \text{curl} \mathbf{v}\|^2) d\mathbf{x},$$

où α et β sont deux paramètres positif de pondération et ψ est une fonction de coût robuste.

Bien que ces dernières techniques d'estimation de mouvement introduisent une régularisation spatio-temporelle s'appuyant sur une équation de conservation relative à l'écoulement, elles ne garantissent pas que la trajectoire des champs de vitesse estimés respecte cette équation de conservation sur l'ensemble de la séquence. Les fonctions de lissage de la vorticité et de la divergence constituent en effet des régularisations acceptables pour estimer un mouvement fluide, mais elles ne correspondent pas à la réalité physique des phénomènes observés. Ce type de lissage isotrope ne permet par exemple en aucune façon d'estimer les petites échelles du mouvement apparent. À partir de ce postulat, nous allons à présent détailler comment estimer des champs de mouvement respectant une loi physique par assimilation de données.

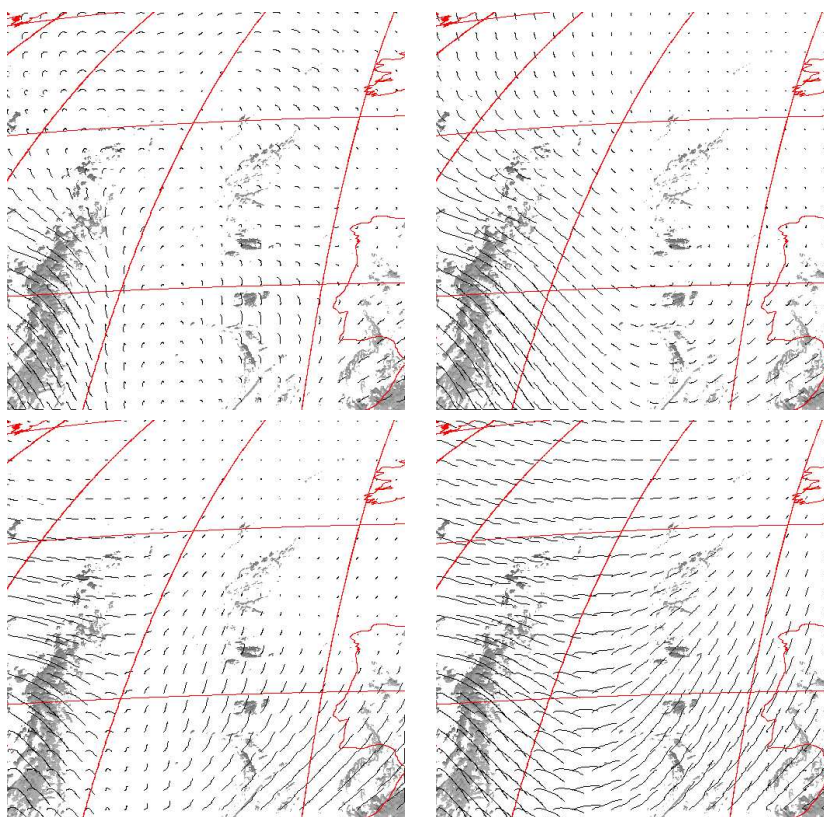


FIG. 5.2: **Influence de la régularisation spatio-temporelle et des données de corrélation** sur l'estimation de champs de vent sur une couche de nuages de haute altitude. Première ligne : Reconstruction des trajectoires pour un schéma d'estimation de champ dense sans (gauche) et avec (droite) régularisation spatio-temporelle. Seconde ligne : Reconstruction des trajectoires pour un schéma d'estimation utilisant les données de corrélation sans (gauche) et avec (droite) régularisation spatio-temporelle. Les lignes rouges représentent les contours des côtes, les méridiens et les parallèles (tous les 10°).

5.4 Assimilation de champs de vecteurs

Nous décrivons dans cette section le système mis en œuvre pour l'assimilation de champs de vecteurs fluides. L'introduction d'une contrainte dynamique *a priori* va ainsi permettre de gérer de manière appropriée les contraintes spatiales, en remplacement du terme de régularisation spatiale, sans réel sens physique, inhérent aux méthodes denses d'estimation du mouvement apparent.

5.4.1 Équation dynamique

Comme la vorticité et la divergence déterminent entièrement le champ de vitesse (à un champ laminaire près), les équations (5.10) et (5.12) permettent d'écrire le modèle dynamique suivant

pour le champ de mouvement fluide :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \nu_\xi \Delta \xi + \zeta \cdot \xi \\ -\nu_\zeta \Delta \zeta \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbb{M}(\chi)} = w, \quad (5.16)$$

où l'on a utilisé les *coordonnées div-curl* $\chi(\mathbf{x}) = [\xi(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x})]^T$. Une nouvelle fois, une fonction de contrôle w de matrice de covariance Q a été ajoutée pour représenter l'incertitude sur le modèle.

5.4.2 Discrétisation des équations dynamiques

5.4.2.1 Équation vorticité-vitesse

La discrétisation de l'équation de vorticité-vitesse (5.10) est une tâche délicate. En particulier, le terme advectif $\nabla \xi \cdot \mathbf{v}$ doit être traité spécifiquement. Il existe donc trois choix pour la mise en œuvre de l'équation dynamique : les différences finies, les volumes finis et les éléments finis.

La méthode des volumes finis consiste à intégrer sur des volumes élémentaires les équations écrites sous forme intégrale. C'est une technique particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux éléments finis et la gestion associée des fonctions de bases ; l'approche est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires sont des rectangles 2D ou des parallélépipèdes 3D. Comme le cadre de ce travail concerne les images, le maillage employé est naturellement la grille régulière pixellique. Nous avons donc choisi d'utiliser la méthode des volumes finis, qui est d'autre part moins sensible aux oscillations que les discrétisations par différences finies.

De nombreux schémas non-oscillatoires respectant les lois de conservation physique ont ainsi été développés pour résoudre le problème de discrétisation du terme advectif [82, 106, 130]. De tels schémas considèrent une reconstruction polynomiale de la fonction inconnue sur les cellules élémentaires de la discrétisation (ici les pixels). Les valeurs intermédiaires de cette fonction sont discrétisées sur les frontières de ces cellules. Les dérivées de la quantité transportée sont ainsi calculées avec des schémas de discrétisation de haut degré de précision. Les valeurs des dérivées sont finalement atténuées par des fonctions de limitation, aussi appelée limiteurs de pente. Cette technique permet d'éviter les erreurs d'amplification numérique.

Les schémas ENO (Essentially non-oscillatory) ou WENO (Weighted ENO) constituent les familles de méthodes les plus couramment utilisées [112, 162]. Afin de réaliser une discrétisation stable et précise du terme advectif, les schémas de conservation numérique doivent donc être employés. Ces approches permettent en effet de respecter les lois de conservation physique à l'intérieur des cellules en intégrant la valeur du flux sur les frontières des cellules. Les bons schémas présentent la propriété de Diminution de la Variation Totale (DVT). Ce sont des flux préservant la monotonie, empêchant l'amplification des oscillations au cours du temps et permettant en même temps de propager les discontinuités. Des explications plus précises de ces travaux peuvent être trouvées dans [162].

Reconstruction de la vorticité Dans ces travaux, la reconstruction de la vorticité sur les frontières des cellules est réalisée par une méthode du second ordre [113] s'appuyant sur un limiteur

Min-Mod sur la grille spatiale régulière $(i\Delta_x, j\Delta_y)$:

$$\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ = \xi_{i+1,j} - \frac{\Delta_x}{2}(\xi_x)_{i+1,j} \quad \text{et} \quad \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- = \xi_{i,j} + \frac{\Delta_x}{2}(\xi_x)_{i,j},$$

$$\text{avec } (\xi_x)_{i,j} = \text{Minmod} \left(2 \frac{(\xi_{i,j} - \xi_{i-1,j})}{\Delta_x}, \frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}}{2\Delta_x}, 2 \frac{(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j})}{\Delta_x} \right),$$

$$\text{et } \text{Minmod}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \inf_i(x_i) & \text{si } x_i \geq 0 \quad \forall i, \\ \sup_i(x_i) & \text{si } x_i \leq 0 \quad \forall i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs intermédiaires $\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^+$ et $\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^-$ sont calculées de la même manière. Comme le limiteur Mid-Mod choisit la pente minimale pour calculer la dérivée, les valeurs reconstruites de la vorticité sur les frontières des cellules atténuent les effets d'amplification liés aux discontinuités spatiales.

Discrétisation du terme advectif Le schéma centré semi-discret suivant est utilisé pour calculer le terme advectif [105, 106] :

$$\partial_t \xi_{i,j} = - \frac{H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) - H_{i-\frac{1}{2},j}^x(t)}{\Delta_x} - \frac{H_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t) - H_{i,j-\frac{1}{2}}^y(t)}{\Delta_y} + \nu_\xi D_{i,j}, \quad (5.17)$$

avec un flux d'advection numérique dérivé du flux monotone de Lax-Friedricks :

$$\begin{aligned} H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}(t)}{2} \left[\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ + \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- \right] - \frac{|u_{i+\frac{1}{2},j}(t)|}{2} \left[\xi_{i+\frac{1}{2},j}^+ - \xi_{i+\frac{1}{2},j}^- \right], \\ H_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t) &= \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}(t)}{2} \left[\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^+ + \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^- \right] - \frac{|v_{i,j+\frac{1}{2}}(t)|}{2} \left[\xi_{i,j+\frac{1}{2}}^+ - \xi_{i,j+\frac{1}{2}}^- \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ce schéma centré semi-discret du second ordre est DVT [105, 113] et peu dissipatif. Les valeurs intermédiaires de la vitesse sont calculées par une moyenne du quatrième ordre :

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j}(t) &= \frac{-u_{i+2,j}(t) + 9u_{i+1,j}(t) + 9u_{i,j}(t) - u_{i-1,j}(t)}{16}, \\ v_{i,j+\frac{1}{2}}(t) &= \frac{-v_{i,j+2}(t) + 9v_{i,j+1}(t) + 9v_{i,j}(t) - v_{i,j-1}(t)}{16}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Le terme linéaire visqueux $\Delta\xi$ est lui aussi approché par un schéma de différentiation centré du quatrième ordre :

$$\begin{aligned} D_{i,j}(t) &= \frac{-\xi_{i+2,j}(t) + 16\xi_{i+1,j}(t) - 30\xi_{i,j}(t) + 16\xi_{i-1,j}(t) - \xi_{i-2,j}(t)}{12\Delta_x^2} \\ &+ \frac{-\xi_{i,j+2}(t) + 16\xi_{i,j+1}(t) - 30\xi_{i,j}(t) + 16\xi_{i,j-1}(t) - \xi_{i,j-2}(t)}{12\Delta_y^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

L'intégration en temps est réalisé par un schéma de Runge-Kutta du troisième ordre garantissant la propriété DTV [162]. Pour une discrétisation de type :

$$\frac{X^{t+dt} - X^t}{dt} = \mathbb{M}(X^t),$$

ce schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} X^1 &= X^t + dt\mathbb{M}(X^t), \\ X^2 &= \frac{3}{4}X^t + \frac{1}{4}X^1 + \frac{1}{4}dt\mathbb{M}(X^t), \\ X^{t+dt} &= \frac{1}{3}X^t + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}dt\mathbb{M}(X^t). \end{aligned} \quad (5.21)$$

En suivant [162], le dt est choisit maximal tel que :

$$dt \leq \frac{1}{2 \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}.$$

5.4.2.2 Équation de la divergence

La divergence est intégrée en temps avec une discrétisation implicite stable :

$$\frac{\zeta^{t+dt} - \zeta^t}{\Delta t} = \nu_\zeta \Delta \zeta^{t+dt},$$

soit :

$$\zeta^{t+dt} = (Id + dt\Delta)^{-1} \zeta^t.$$

En utilisant un schéma centré pour la discrétisation de l'opérateur Laplacien Δ , l'opérateur discret $(Id + dt\Delta)$ est à diagonale dominante et est donc inversible quel que soit dt . L'utilisation d'un tel schéma dissipatif se justifie par le fait que l'on considère ici l'espérance de la divergence guidée dans le temps par un bruit Brownien.

5.4.2.3 Mise en œuvre des modèles direct et adjoint

À partir des schémas de discrétisation présentés, la vorticité et la divergence du champ de vitesse peuvent être int gr es de manière stable dans le temps. Le champs de vitesse est mis à jour à chaque itération à partir des valeurs courantes de la vorticité et de la divergence par la relation (5.9). Le modèle adjoint est déduit de la discrétisation du modèle direct. Des valeurs intermédiaires de la vorticité et de la divergence sont donc stock es et recalcul es afin de pouvoir calculer l'adjoint numérique exact, comme décrit dans la section 3.5.2 du chapitre 3.

5.4.3 Observations des écoulements fluides

Nous décrivons   présent les deux modèles d'observation utilisés pour notre système d'assimilation de champs denses de mouvements fluides à partir d'observations images. Comme dans le cas des courbes du chapitre précédent, on discernera les observations indirecte et directe des données photométriques. Dans le premier cas, on fera l'hypothèse que l'on dispose de mesures de mouvement estim es préalablement. Dans un second temps, on s'appuiera directement sur la fonction de luminance pour estimer le mouvement.

5.4.3.1 Observations de champs de vitesse

Comme les mouvements fluides sont supposés continus et définis sur tout le domaine de l'image, on fait l'hypothèse qu'une observation \mathbf{v}_{obs} du champ de mouvement est disponible. Cette mesure de mouvement peut être obtenue par un estimateur de champ dense. On utilise ici un estimateur dédié [48]. En se référant à l'équation (5.9), l'équation d'observation est définie par

$$\begin{aligned} Y &= \mathbf{v}_{obs} = \mathbb{H}_1(\xi, \zeta) + \epsilon, \\ \mathbb{H}_1(\xi, \zeta) &= \nabla^\perp G * \xi + \nabla G * \zeta, \end{aligned} \quad (5.22)$$

où l'on rappelle que ϵ est le bruit de covariance R de la mesure Y . Cet opérateur d'observation lie les mesures de mouvement \mathbf{v}_{obs} à la variable d'état $\chi = [\zeta, \xi]^T$. Cet opérateur d'observation est linéaire par rapport à χ , son opérateur tangent linéaire n'est donc rien d'autre que lui-même :

$$\partial_\chi \mathbb{H}_1(\chi') = \mathbb{H}_1(\chi'). \quad (5.23)$$

Cependant, comme cet opérateur réalise une convolution, l'expression de son adjoint $\partial_\chi \mathbb{H}_1^*$ n'est pas triviale. La démonstration donnée dans l'Annexe B permet de définir explicitement l'opérateur adjoint par :

$$\partial_\chi \mathbb{H}_1^* = -\mathbb{H}_1. \quad (5.24)$$

Cette première application consiste donc à lisser des champs de vitesse observés selon une loi dynamique. On utilise donc ici des *pseudo-observations*, puisque l'on n'observe pas directement les images, mais une quantité calculée à partir des images. Nous allons à présent aller un peu plus loin, en estimant directement les champs de vitesse à partir des séquences d'images.

5.4.3.2 Observations images

En partant de l'ECMA, il est possible de calculer le flot apparent entre deux images, en supposant que le vecteur de mouvement pour un pixel \mathbf{x} est constant dans un voisinage de taille n [117] :

$$K_n * \left(\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla I(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \approx 0, \quad (5.25)$$

où I est la fonction de luminance et K_n est un noyau gaussien de taille n . La variable d'état χ est toujours connectée au champ inconnu \mathbf{v} par la relation (5.9). Ainsi, l'équation d'observation est cette fois donnée par :

$$\begin{aligned} Y &= K_n * I_t = \mathbb{H}_2(\zeta, \xi) + \epsilon, \\ \mathbb{H}_2(\zeta, \xi) &= -K_n * \nabla I \cdot (\nabla^\perp G * \xi + \nabla G * \zeta), \end{aligned} \quad (5.26)$$

avec ϵ , le bruit de mesure de covariance R . L'opérateur d'observation \mathbb{H}_2 est linéaire par rapport à la variable d'état $\chi = [\zeta, \xi]^T$. L'opérateur tangent linéaire est donc identique. En utilisant l'Appendice B, l'expression de l'opérateur adjoint pour une petite perturbation Y' est donné par :

$$\partial_\chi \mathbb{H}_2^* Y' = -\mathbb{H}_1(K - n * I_x Y', K - n * I_y Y').$$

5.4.4 Initialisation

Dans le cas des pseudo-observations (paragraphe 5.4.3.1), l'initialisation de la variable d'état $\chi = [\xi, \zeta]^T$ est simplement donnée par l'estimation de champ dense disponible entre les deux premières images de la séquence.

Dans le cas de l'observation directe des images (paragraphe 5.4.3.2), cette même initialisation peut aussi être utilisée. Cependant, le procédé peut être rendu autonome en prenant une initialisation nulle. Pour gérer les grands déplacements, le schéma multirésolution décrit dans le paragraphe 5.2.1.3 est alors utilisé. Une séquence de pyramides d'images est ainsi créée à partir de la séquence originale. La vorticité et la divergence du champ de vitesse sont estim es sur toute la séquence à l'échelle la plus grossière. Elles sont ensuite projet es et corrig es à des échelles de plus en plus fines, jusqu'à la résolution maximale de l'image.

5.4.5 Système d'optimalité

Pour les deux modèles d'observation présentés (champs de vecteurs et images), la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser s'écrit :

$$J_3(w, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|Y(t) - \mathbb{H}(\chi(t))\|_R^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|w(t)\|_Q^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta\|_B^2.$$

En partant d'un *a priori* χ_0 sur la condition initiale des variables d' tats, le système d'optimalité considéré pour le suivi de champs de vecteurs peut ainsi être résumé par :

$$\begin{cases} \partial_t \chi + \mathbb{M}(\chi) = w, \\ \chi(t_0) = \chi_0 + \eta, \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_{\chi} \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_{\chi} \mathbb{H})^* R^{-1}(t)(Y(t) - \mathbb{H}(\chi(t))), \\ \partial_w J_3 = Q^{-1}(\partial_t \chi + \mathbb{M}(\chi)) - \lambda, \\ \partial_{\eta} J_3 = -\lambda(t_0) + B^{-1}(\chi(t_0) - \chi_0). \end{cases} \quad (5.27)$$

Les seuls paramètres de la méthode sont une nouvelle fois les matrices de covariance de l'initialisation B , des observations $R(t)$ et du modèle $Q(t)$. Dans les applications de ce chapitre, ces matrices sont suppos es diagonales et de valeurs constantes. Pour la matrice d'initialisation, nous avons systématiquement choisi $B = 0.1$. Concernant la matrice de covariance du modèle, nous avons fixé $Q(t) = 0.001$ pour les séquences synthétiques où la dynamique est quasiment respectée et $Q(t) = 0.1$ pour les applications réelles. Les matrices de covariance des observations $R(t)$ sont quant à elles définies suivant le modèle d'observation considéré. Pour le modèle de pseudo-observations (où l'on observe des champs denses calculés par flot optique), on prend $R(t) = 10$. Lorsque l'on observe directement les images, une fonction robuste est alors introduite afin de prendre en compte les petits gradients des images :

$$R(t) = R_{min} + (R_{max} - R_{min}) \left(\exp\left(-\frac{\|\nabla I(t)\|^2}{\sigma}\right) \right),$$

avec $R_{min} = 10$ et $R_{max} \rightarrow \infty$. En pratique, le seuil σ a été fixé à 0.9. Ainsi, en cas d'absence de gradient en un point, l'observation n'est pas consid r e.

5.4.6 Résultats

Afin de démontrer l'apport de l'assimilation des champs de mouvement fluides, la méthode proposée est appliquée sur une séquence turbulente 2D composée d'images synthétiques de particules. Cette séquence de 50 images est obtenue par une simulation numérique directe de l'équation de vorticité-vitesse [37]. Dans un premier temps, les pseudo-observations décrites dans la section 5.4.3.1 sont utilis es. La figure 5.3 compare les champs de vorticité des champs de vecteurs réels, observés et assimilés. On peut observer que l'assimilation ne fait pas que débruiter les observations obtenues par un estimateur de flot optique spécifique [48]. En effet, les petites structures sont aussi r cup r es grâce à l'introduction de la loi dynamique. Des résultats d'évaluation quantitatives sont présentés dans la figure 5.4. Les erreurs des champs observés et assimilés sont compar es aux valeurs réelles de la simulation numérique. Le processus d'assimilation permet d'augmenter significativement la qualité de l'estimation du champ de mouvement. On voit aussi que même si certaines observations fournies par l'estimateur sont erron es, le processus d'assimilation permet de lisser ces erreurs et produit une séquence de champs continus dans le temps.

L'assimilation est ensuite r alis e en observant directement les images, il s'agit alors de l'estimateur de mouvement autonome décrit dans la section 5.4.3.2. Les résultats sont d'une qualité bien supérieure à ceux obtenus avec l'utilisation des pseudo-observations, comme l'illustre la figure 5.6. En effet, lorsque l'on observe des champs de mouvement, le résultat est dépendant de la qualité de ces pseudo-observations. Par exemple, les grandes échelles absentes des champs de vecteurs observés ne peuvent pas être r cup r es par le système d'assimilation. Ceci s'observe facilement sur le spectre de la vorticité présenté dans la figure 5.5. Les petites échelles sont aussi plus précises et suivent presque parfaitement le spectre de la vorticité réelle de la simulation numérique.

Le résultat est encore plus frappant lorsque l'on applique les deux méthodes à la séquence d'images scalaires synthétiques cr ees par le même écoulement que pour la séquence de particules, comme l'illustre la figure 5.7. En effet, dans cette séquence, les images possèdent de grandes zones uniformes peu contrast es (ligne *a*), et les techniques d'estimation de mouvement dense classiques (ou même les techniques de corrélation) donnent de très mauvais résultats (ligne *c*). L'assimilation des pseudo-observations obtenues par flot optique ne donne donc pas de résultats satisfaisants (ligne *d*). En introduisant observant directement les images, les estimations obtenues sont bien plus proches des vraies valeurs de la simulation numérique (ligne *e*). L'analyse de l'écart quadratique moyen présenté dans la figure 5.8 montre une nouvelle fois que l'assimilation des mesures image donne une meilleure précision que l'estimation classique du flot optique. Les grandes échelles de l'écoulement sont aussi mieux estim es, comme l'illustre le spectre de la vorticité présenté dans la figure 5.9.

La méthode est enfin appliqu e à une séquence infrarouge météorologique décrivant l'évolution du cyclone Vince sur l'Océan Atlantique. Il s'agit d'une séquence compos e de 20 images acquises le 9 octobre 2005 de 00H00   5H00 par le satellite Météosat Seconde G n ration⁶. Les résultats complets en terme de vorticité sont présentés dans la figure 5.10. L'utilisation de pseudo-observations image (ligne *b*) mène aux résultats présentés sur la ligne (*c*). En assimilant directement les images, les résultats en terme de vorticité du champ estimé sont assez différents (ligne *d*) de ceux obtenus avec les pseudo-observations. Tout d'abord, le centre du cyclone et l'amplitude de la vitesse sont bien mieux estimés en observant directement les images. On aperçoit de plus en haut à droite l'estimation d'un vortex inverse (en bleu) que les pseudo-observations ne percevaient

⁶Nous remercions le Laboratoire de Météorologie Dynamique pour nous avoir fourni cette séquence.

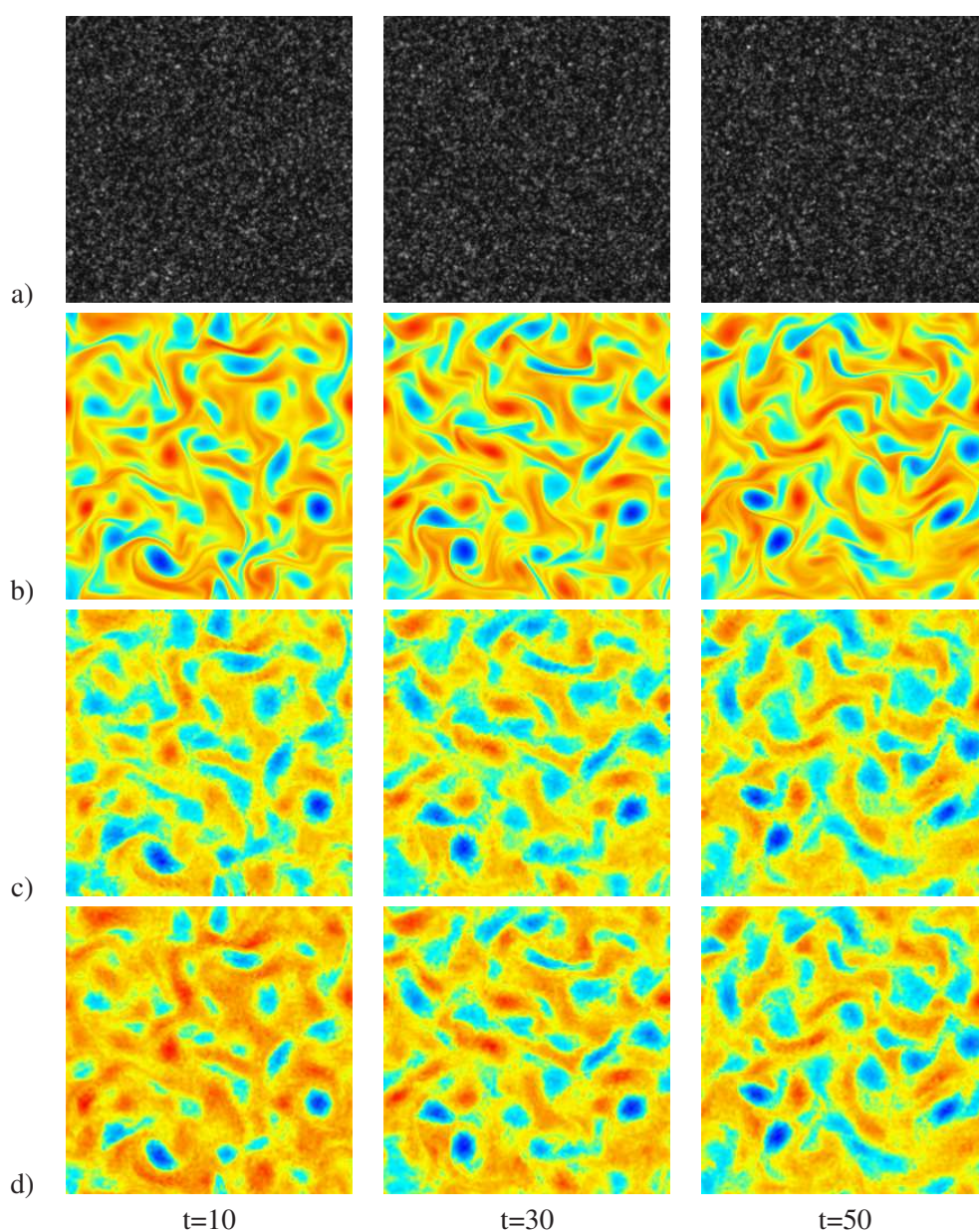


FIG. 5.3: **Séquence particules, simulation numérique 2D, assimilation des pseudo-observations image.** *a)* Séquence d'images de particules. *b)* Vorticité réelle. *c)* Vorticité du champ observé par l'estimateur de flot optique. *d)* Vorticité du champ assimilé .

pas et qui est cohérent par rapport à la dynamique du cyclone.

Nous avons ici considéré tous les points du domaine image de façon uniforme. Ces points peuvent cependant correspondre à des couches nuageuses d'altitude très différentes devant être traitées séparément. Ce type d'estimation par couche sera détaillé dans le chapitre 7.

La méthode d'assimilation des champs de vecteurs vitesse par observation directe de l'in-

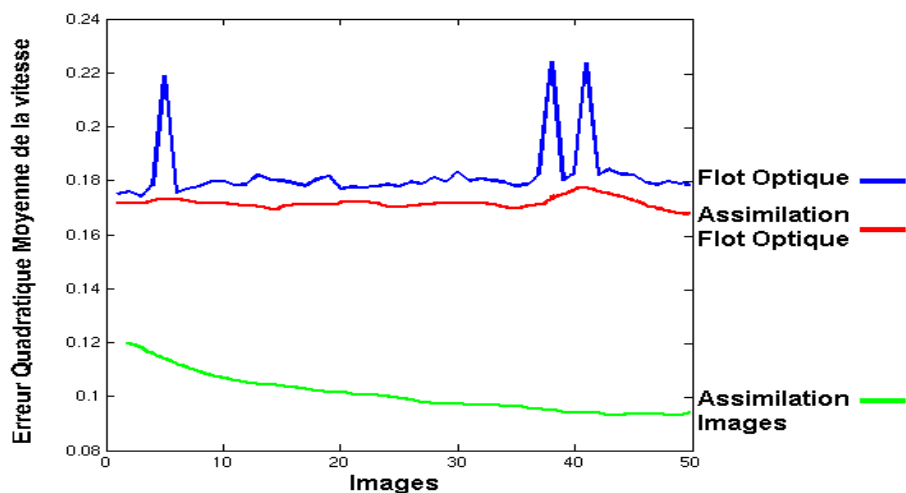


FIG. 5.4: **Séquence particules, comparaison des erreurs.** Les Erreurs Quadratiques Moyennes des champs de vitesse estimés sur les 50 images de la séquence particules sont comparées pour les 3 méthodes : vitesses obtenues par l'estimateur de flot optique (en bleu), vitesses du résultat de l'assimilation des mesures fournies par l'estimateur de flot optique (en rouge) et vitesses du résultat obtenu en assimilant directement l'intensité lumineuse des images (en vert).

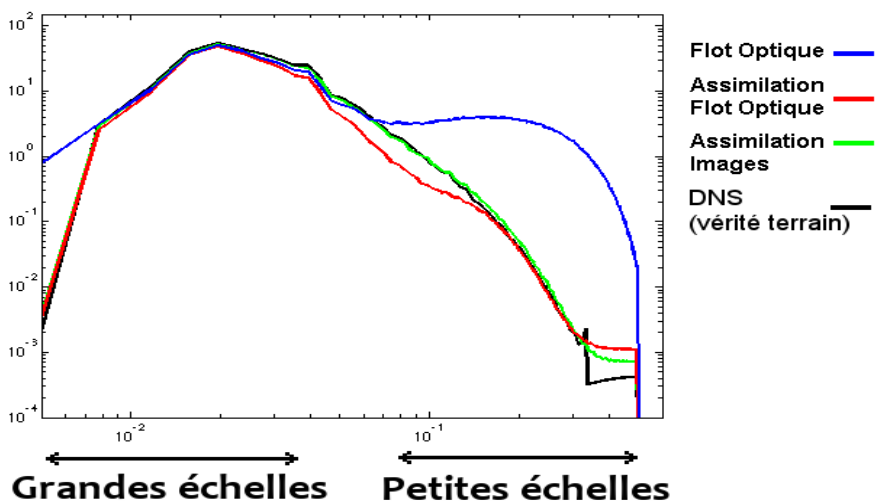


FIG. 5.5: **Séquence particules, spectre de la vorticité.** Les spectres des différentes vorticités obtenues à partir des images de particules sont ici comparés : vorticité réelle (en noir), vorticité obtenue par l'estimateur de flot optique (en bleu), vorticité du résultat de l'assimilation des mesures fournies par l'estimateur de flot optique (en rouge) et vorticité du résultat obtenu en assimilant directement l'intensité lumineuse des images (en vert).

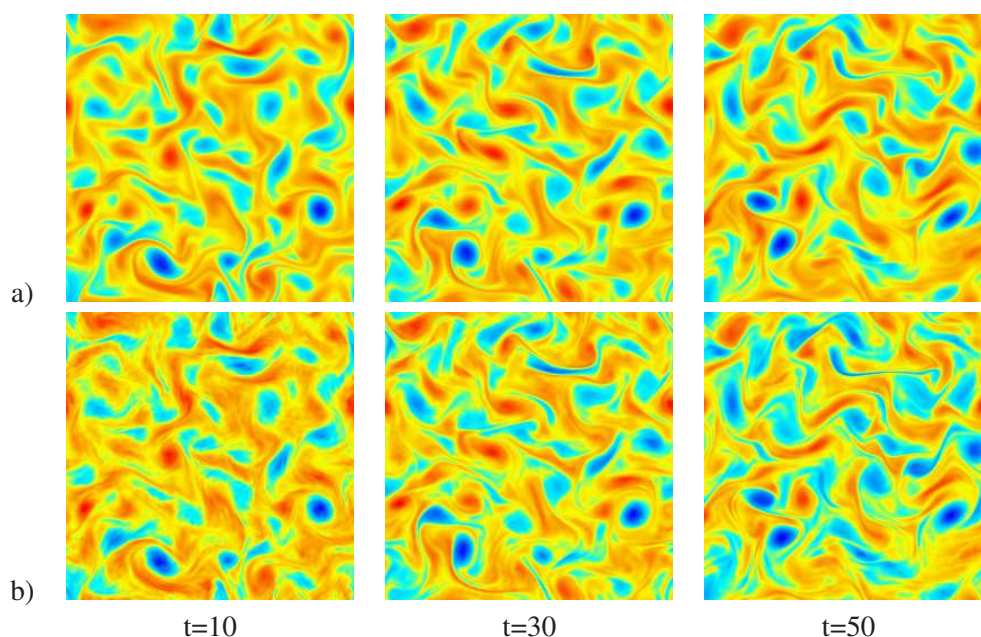


FIG. 5.6: **Séquence particules, simulation numérique 2D, assimilation directe des images.** *a)* Vorticité réelle. *b)* Vorticité du champ assimilé.

tensité lumineuse est donc très performante lorsque l'on a une bonne idée de la dynamique du phénomène visualisé. Les résultats en terme de champs de vitesse reste toutefois très précis, comme le montre la figure 5.11 où le champ de vitesse estimé a été superposé aux images. Ces derniers résultats illustrent le fait que les estimations fournies par la méthode proposée sont complètement cohérentes avec le phénomène visualisé.

En prenant à présent la séquence d'images Vince acquises sur le canal visible du satellite Météosat Seconde Génération, on peut suivre le cyclone pendant la nuit. Plus précisément, les pseudo-observations, calculées par flot optique, ne sont alors disponibles que le jour et absentes du 9 octobre à 19H00 jusqu'au 10 octobre à 8H00. La fenêtre d'assimilation est alors prise sur 24 heures en englobant cette période d'occultation, et les champs observés sont lissés afin d'estimer le déplacement du cyclone au cours de la nuit. Les matrices de covariance d'observations correspondantes $R(t)$ sont donc fixées à l'infini pendant les images de nuit. Les champs de vecteurs ainsi obtenus sur les images du *canal visible* sont superposés aux images *infra-rouge* dans la figure 5.12, afin d'évaluer visuellement la qualité de l'estimation. Étant donné que le cyclone accélère sa course au cours de la nuit, l'estimation n'est pas parfaite. Cependant, cette technique de lissage permet d'obtenir une idée du chemin parcouru par le cyclone, grâce à la loi dynamique sous-jacente.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un aperçu des techniques permettant d'estimer des champs de mouvement dans des séquences d'images a été donné. L'application de ces méthodes aux images de phéno-

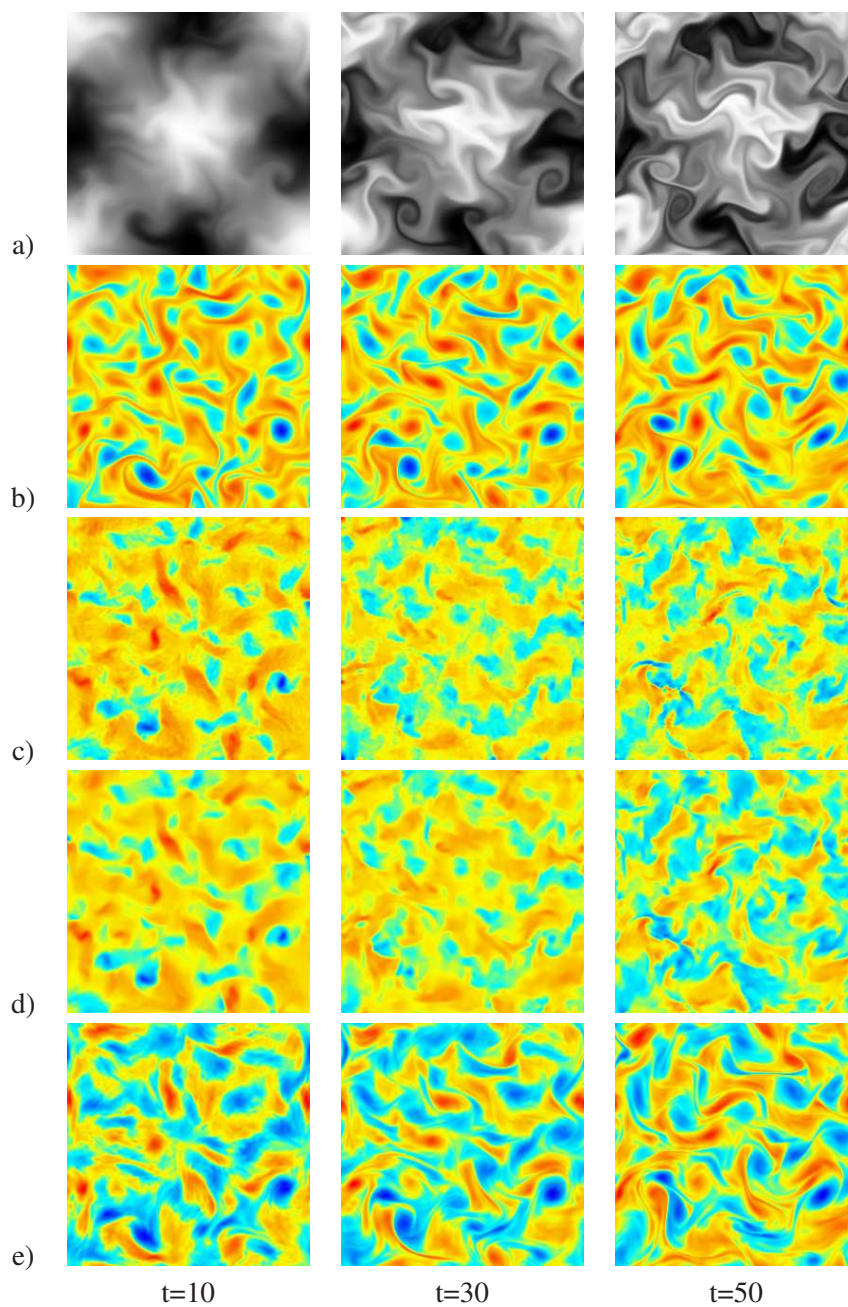


FIG. 5.7: **Séquence scalaires, simulation numérique 2D.** *a)* Séquence d'images scalaires. *b)* Vorticité réelle. *c)* Vorticité des pseudo-observations calculées par flot optique. *d)* Vorticité du champ assimilé avec les pseudo-observations *e)* Vorticité du champ assimilé avec les observations image.

mènes fluides a ensuite été plus amplement détaillée. Enfin, une nouvelle méthode permettant d'estimer des champs de mouvement respectant une loi dynamique physique sur une séquence d'images entière a été présentée. L'introduction d'une contrainte dynamique a ainsi permis de ne

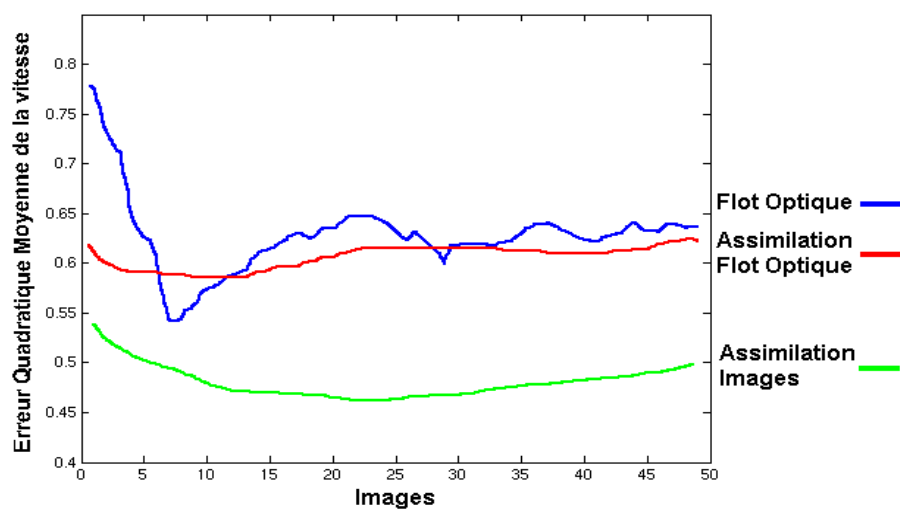


FIG. 5.8: **Séquence scalaire, spectre de la vorticité.** Les spectres des différentes vorticités obtenues à partir des images de particules sont ici comparés : vorticité réelle (en noir), vorticité obtenue par l’estimateur de flot optique (en bleu), vorticité du résultat de l’assimilation des mesures fournies par l’estimateur de flot optique (en rouge) et vorticité du résultat obtenu en assimilant directement l’intensité lumineuse des images (en vert).

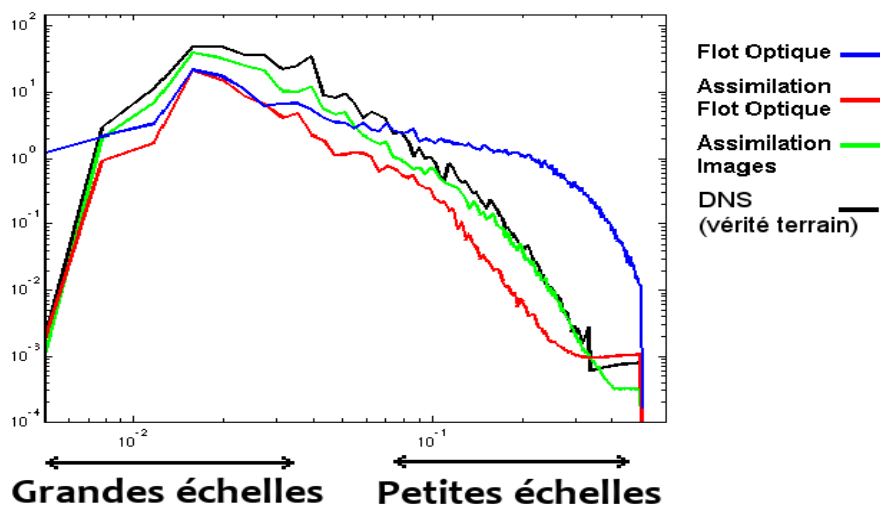


FIG. 5.9: **Séquence scalaire, comparaison des erreurs.** Les courbes violette et rouge décrivent l’Erreur Quadratique Moyenne de la vorticité des 50 champs calculés par flot optique sur les séquences scalaires et particules. Les courbe verte et bleue présentent les erreurs correspondantes à la vorticité des champs obtenus par assimilation sur les mêmes séquences.

plus considérer de régularisation spatiale sans réel sens physique, comme le font les méthodes

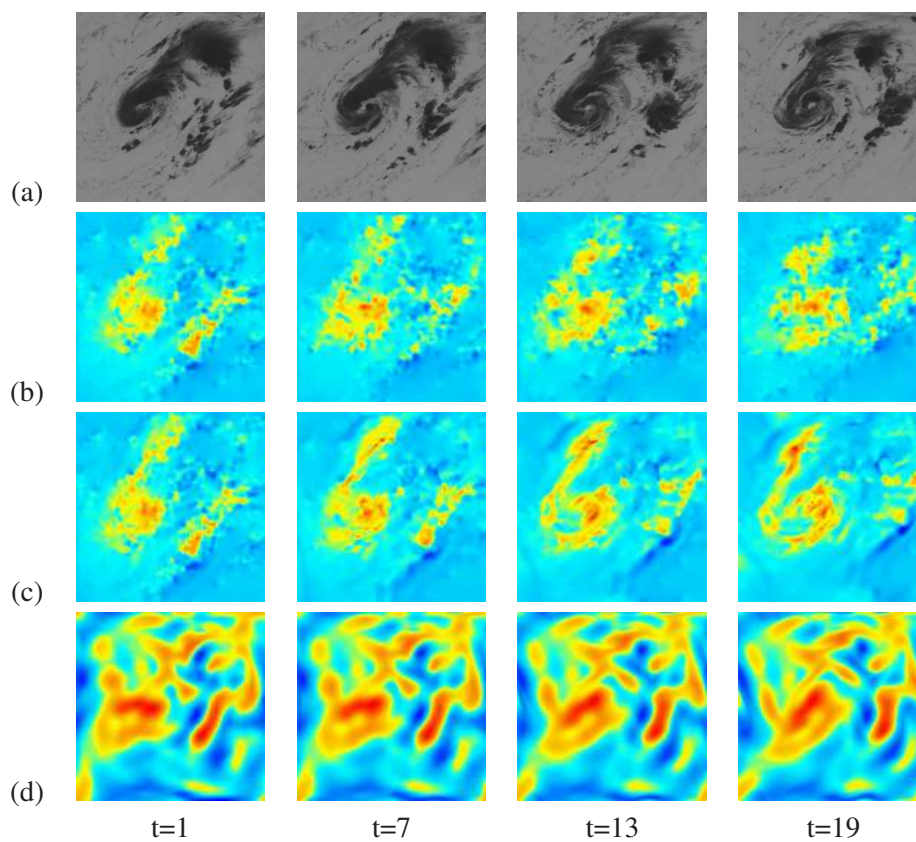


FIG. 5.10: **Cyclone Vince.** (a) Séquence d'images. (b) Cartes de vorticités des pseudo-observations. (c) Cartes de vorticité des champs assimilés avec les pseudo-observations. (d) Cartes de vorticité des champs assimilés avec les observations images.

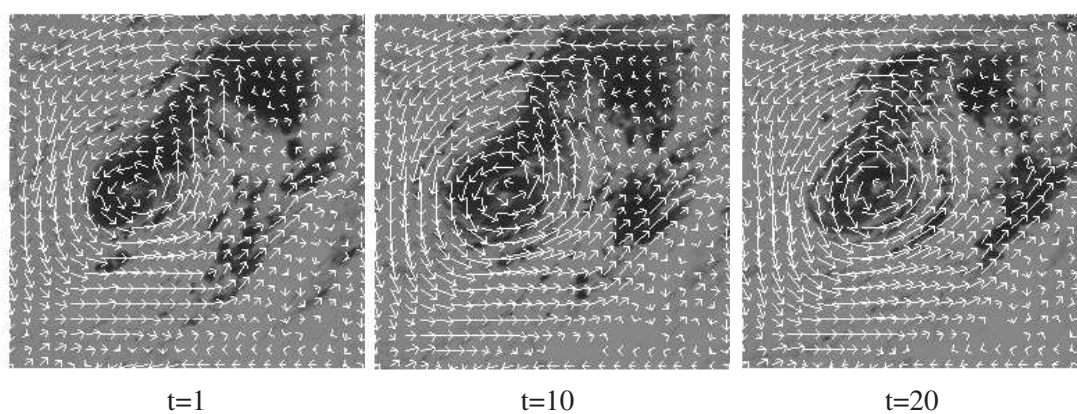


FIG. 5.11: **Cyclone Vince 2.** Champs de mouvements estimés par assimilation directe des mesures de l'intensité lumineuse.

classiques d'estimation de champs denses de mouvement. Les résultats de l'approche proposée, validés sur des séquences synthétiques de mécanique des fluides expérimentale, sont très bons, notamment dans le cas d'images scalaires où les techniques traditionnelles éprouvent des difficultés face à l'homogénéité des données. De plus, l'introduction d'une loi dynamique permet d'estimer naturellement les petites échelles des écoulements, tandis que les techniques classiques de flot optique sont limitées aux grandes structures cohérentes du mouvement. La méthode a ensuite été appliquée à des cas réels et des résultats prometteurs ont été obtenus sur des séquences météorologiques.

Nous avons considéré deux modèles de mesure en observant indirectement ou directement l'intensité lumineuse des images. Dans le cas des pseudo-observations correspondant à la publication [140], si le bruit des estimations fournies par un algorithme de flot optique est trop grand, la méthode aura tendance à développer des petites échelles incohérentes du mouvement. En observant directement les images, on évite alors l'utilisation d'estimateurs externes possédant leurs propres paramètres. Cette dernière technique a été elle aussi publiée dans [139].

À partir de cette assimilation des vitesses, il est possible, dans le cas de phénomènes fluides, de coupler le suivi de courbes et de champs de vitesse dans un processus d'assimilation conjoint. Dans le cas de séquences d'images présentant des objets rigides, le mouvement obéit sous une hypothèse d'accélération nulle à une équation de conservation de la vitesse. Ce type de contrainte permettra d'effectuer une tâche de suivi visuel d'objets, malgré la présence d'occultations partielles ou totales de la cible.

Dans le chapitre suivant, nous verrons qu'il est possible d'exhiber différentes représentations du mouvement et des lois dynamiques pertinentes suivant les applications considérées.

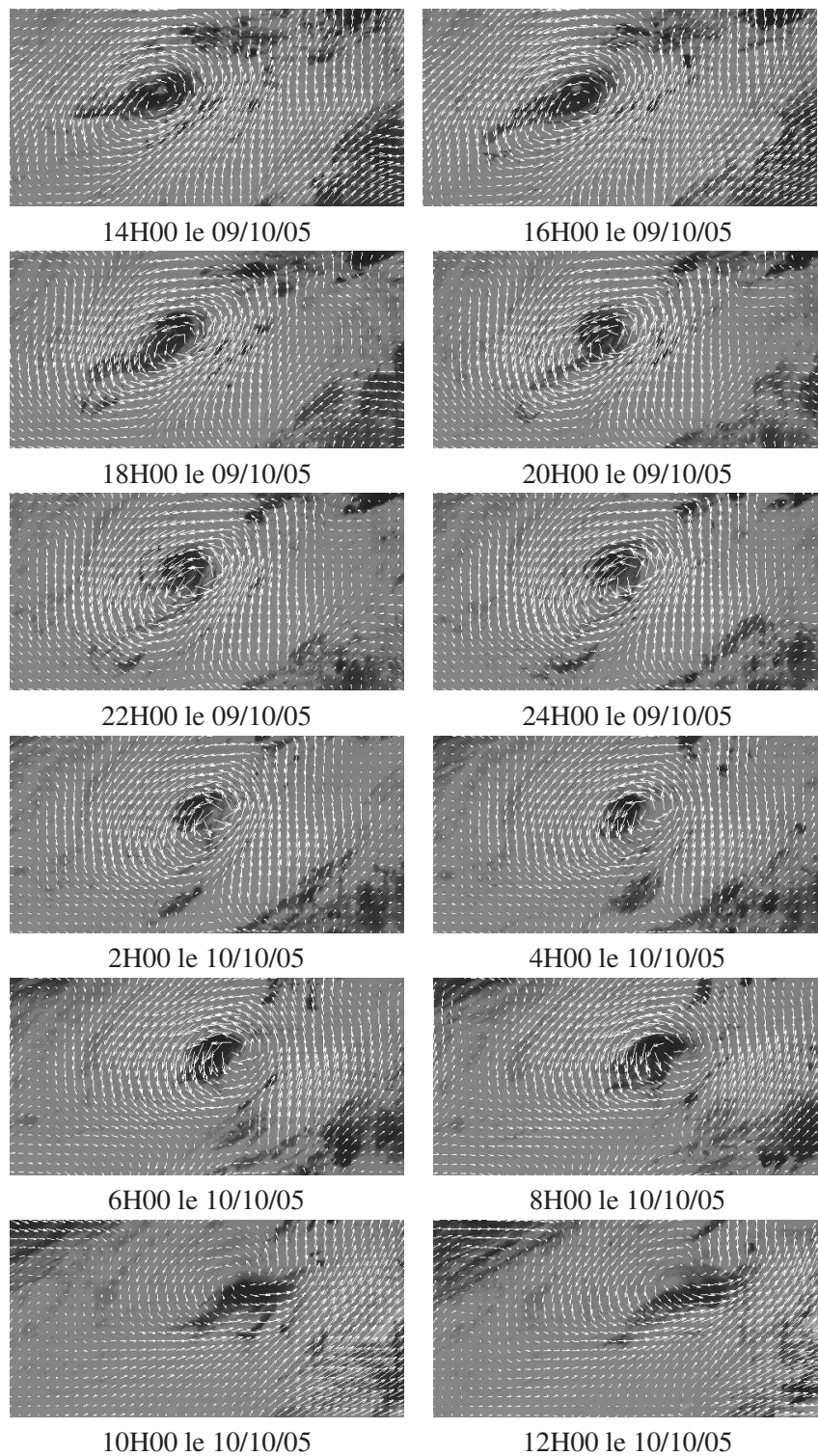


FIG. 5.12: **Suivi du Cyclone Vince de nuit.** Les champs assimilés à partir des pseudo-observations calculées sur les images du canal visible sont superposés aux images infrarouge. Il y a donc une occultation des données du 9 octobre à 19H00 jusqu'au 10 octobre à 8H00.

Chapitre 6

Suivi couplé de courbes et de mouvement

6.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer que le système de suivi de courbes précédemment introduit dans le chapitre 4 peut être enrichi en considérant un suivi couplé de l'objet et de son mouvement. L'idée consiste à augmenter la dimension de la variable d'état en ajoutant une représentation du mouvement. Une loi de conservation du mouvement cohérente doit donc être ajoutée au système d'assimilation.

La difficulté principale concerne le choix d'une loi d'évolution adéquate pour le champ de mouvement. Deux différents types d'application sont ici considérées séparément : les mouvements fluides et les mouvement d'objets réels.

En effet, dans le cas de mouvements fluides, la courbe suivie ne délimite pas les frontières d'un objet spécifique. Le fluide est une entité plus globale, son mouvement est *a priori* indépendant de la position de la courbe d'intérêt. La courbe suivie n'est ici qu'un traceur de mouvements très complexes régis par des lois physiques. Nous sommes donc en présence d'un problème d'assimilation *faiblement* couplé où les deux variables (courbe et mouvement) ne sont que faiblement interdépendantes. Même si l'évolution de la courbe dépend fortement de la dynamique du champ de vitesse sous-jacente, la réciproque n'est pas nécessairement vérifiée. En effet, la loi de conservation du champ de vitesse ne dépend pas, sauf cas particuliers comme les courbes d'iso-vorticité, de la position de la courbe.

Le cas des mouvements d'objets naturels dans les séquences d'images est complètement différent. Le fond de l'image et l'objet suivi ont leurs propres mouvements et possèdent des différences photométriques. La courbe délimitant l'objet cible est aussi une frontière de discontinuité pour le mouvement dans l'image. Le support du mouvement décrivant la trajectoire de l'objet est donc entièrement dépendant de la position de la courbe descriptive. Dans ce second cas, il s'agit d'un problème d'assimilation *fortement* couplé.

Dans la section suivante, nous abordons en premier lieu le cas des mouvements fluides.

6.2 Images de mouvements fluides

Dans cette section, les travaux présentés dans les deux chapitres précédents sont combinés.

6.3 Suivis successifs

Comme le système mis en place dans le cas fluide est faiblement couplé, l'assimilation de courbe et de champs de vitesse est dans un premier temps réalisée successivement. Les composantes du mouvement ne dépendent que faiblement de celles de la courbe, on peut donc les assimiler dans une première phase au moyen de la technique présentée dans le chapitre 5. Une fois les champs de vitesse calculés sur l'ensemble de la séquence, les courbes peuvent à leur tour être assimilées. En combinant la dynamique de mouvement sur la vorticité et la divergence $\chi = [\xi, \zeta]^T$ avec la loi d'évolution de la courbe Φ (4.12) pr sent e dans le chapitre 4, on obtient un modèle dynamique complet pour la fonction d'état $\mathbf{X} = [\Phi, \xi, \zeta]$ regroupant la représentation de la courbe et du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Phi \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla\Phi \cdot \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta\Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|^2} \right) \\ \mathbf{v} \cdot \nabla\xi + \xi \cdot \zeta - \nu_\xi \Delta\xi \\ -\nu_\zeta \Delta\zeta \end{bmatrix} = w. \quad (6.1)$$

Comme on suppose que la dynamique d'un mouvement fluide est assez précise, la matrice de covariance du modèle a été fix e comme un scalaire de faible valeur ($Q = 0.001$) pour toutes les séquences. L'étape d'assimilation du champ des vitesses peut être vue comme un post-traitement ou de calcul (dans le cas de l'observation directe des images) des champs denses de vitesses fluides. Les matrices de covariance de l'initialisation et des observations ont quant à elles été fixées comme des matrices diagonales à valeurs constantes (typiquement $B = 0.1$ et $R = 10$).

Il est important de noter que, dans ce premier système dynamique, les assimilations de vitesse et de courbes sont r alis es successivement. Les modèles adjoints associés à la courbe et au mouvement ne sont donc pas corrélés.

L'utilité d'une assimilation successive de courbe et de champ de mouvement est d montr e sur une séquence Infra-rouge météorologique présentant un cyclone au-dessus de l'océan Indien. La figure 6.1 montre la position finale de la courbe après une simple intégration avant de la courbe initiale, avec et sans assimilation préalable des champs de vitesse.

Dans un premier temps, les champs de vitesse sont des données déterministes, des entr es du système qui se révèlent assez bruit es (comme dans le chapitre 4). Une seconde expérience est r alis e en appliquant le processus d'assimilation des champs de vitesse décrit dans le chapitre 5. Comme le montre la position finale de la courbe à la fin de l'intégration, le mouvement assimilé correspond bien mieux au déplacement réel du cyclone. Ceci permet donc d'améliorer le processus d'assimilation des courbes puisque la courbe d'iso-température est mieux d plac e en considérant un suivi couplé. Les résultats finaux sur les courbes et les vorticités sont présentés dans la figure 6.2. La colonne (a) montre les différentes lignes de niveaux photométriques utilis es comme observations pour la courbe. La colonne (b) présente les cartes de vorticité des champs de vitesse observés. Ces mesures constituent des observations bruit es du système courbe-mouvement que

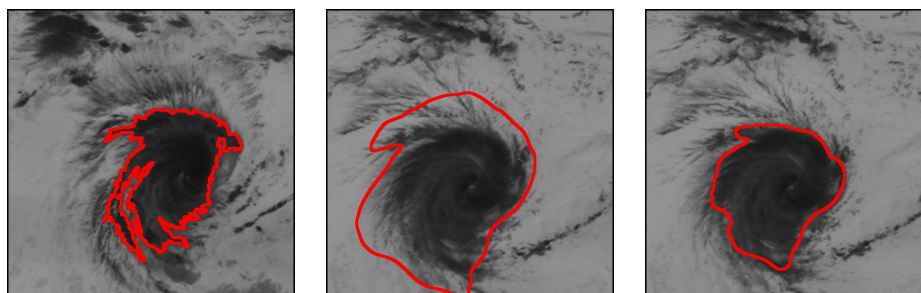


FIG. 6.1: **Position finale de la courbe sur l'image 19.** *Gauche* : Initialisation de la courbe sur la première image. *Milieu* : Position finale de la courbe sans assimilation de mouvement. *Droite* : Position finale de la courbe avec assimilation de mouvement.

l'on souhaite suivre. Les observations de mouvement exhibent d'ailleurs d'évidentes discontinuités temporelles. La courbe assimilée surimposée aux images originales et les cartes de vorticité des champs de vitesse solutions sont respectivement présentées dans les colonnes (c) et (d).

Comme troisième expérience, nous avons réalisé un suivi de partitions de couches nuageuses à des altitudes différentes. On considère ainsi trois partitions représentant des nuages d'altitude haute, moyenne et basse. Le suivi est appliqué sur une séquence de 8 images (équivalentes à 4 heures) du canal Infra-rouge d'un satellite MeteoSat Seconde Génération. Sur de telles images satellitaires, les nuages de basse altitude sont partiellement occultés par les plus hauts. Les observations des différentes couches sont obtenues par un système de classification instantanée des couches de nuages. Ces masques sont fournis par EUMETSAT, le consortium européen en charge de l'exploitation des satellites météorologiques METEOSAT. La technique de suivi est ensuite appliquée indépendamment à chaque couche nuageuse. Une estimation de champs de mouvement dense est réalisée sur chaque couche, par la technique développée dans [83]. Cette approche est une extension de [48] pour l'estimation de champs de vents atmosphériques stratifiés. La technique utilise aussi les cartes de classification et se sert d'un estimateur robuste pour étendre le champ de vent d'une couche sur tout le domaine de l'image. Dans le cas présent, la méthode a été appliquée pour trois couches atmosphériques (nuages bas, moyens et hauts). Du point de vue de l'assimilation, ces trois champs de vent constituent les mesures d'observations du champ de vitesse. Les cartes de classification utilisées comme observations pour les courbes sont présentées dans la figure 6.3. Par souci de clarté, on ne montre ici que les résultats concernant le suivi de courbes. On peut ainsi observer que la technique d'assimilation est capable de suivre au cours du temps différentes cartes de classification. Même si les nuages bas sont partiellement occultés, le processus d'assimilation permet de reconstruire une partie de cette couche nuageuse. Les parties récupérées sont indiquées avec différentes couleurs. Comme la séquence est courte, la surimposition des couches de nuage n'est pas très importante. Cependant, ces résultats montrent la capacité de la méthode à gérer des problèmes de suivi de courbes complexes. Notons enfin que, comme pour la composante de la courbe, l'assimilation permet d'étendre la vitesse d'une couche à ses zones occultées.

Finalement, le suivi du cyclone Vince est réalisé dans la figure 6.4. On utilise une nouvelle fois l'opérateur d'observation directe des images reposant sur les probabilités de densités locales

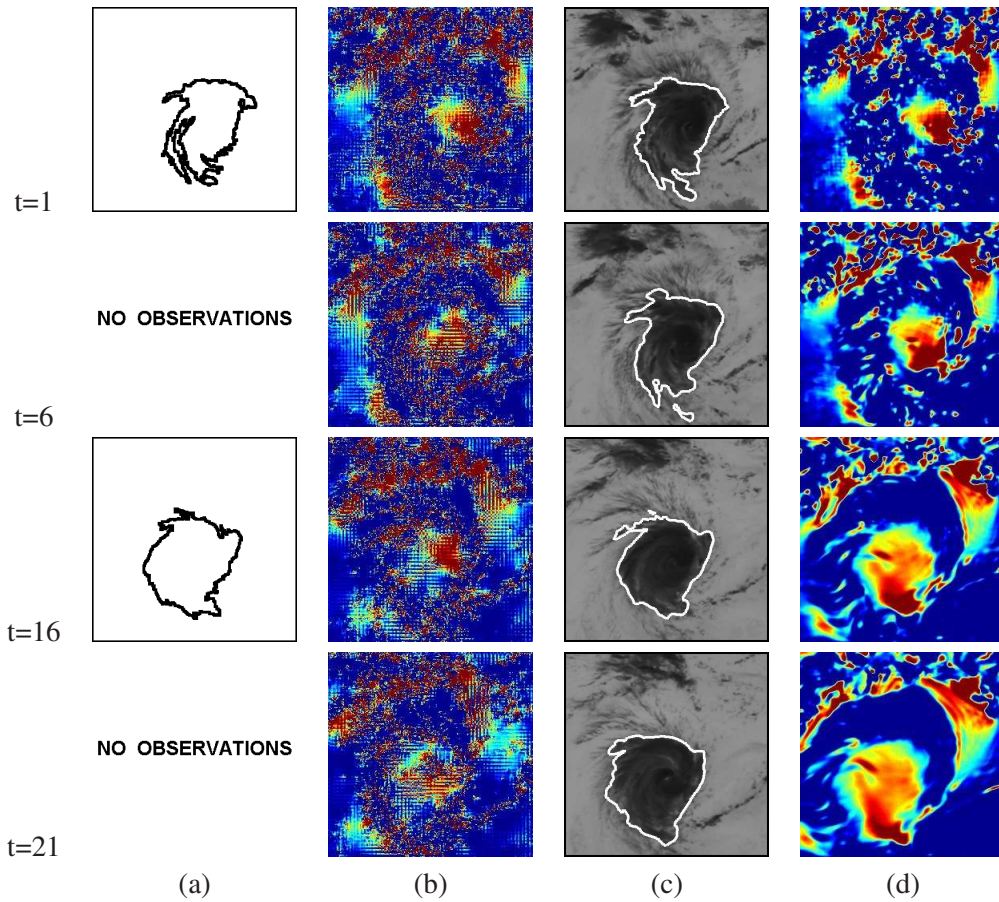


FIG. 6.2: **Séquence du cyclone** . (a) Échantillons des courbes observées. (b) Cartes de vorticité observées. (c) Courbes assimilées. (d) Cartes de vorticité des champs de vitesse assimilés.

(équations. 4.18-4.19). Cet exemple illustre le fait que les changements de topologie de l'œil du cyclone sont parfaitement retrouvés par la méthode.

6.3.1 Suivis couplés

À partir de ces travaux sur l'assimilation successive des champs de vecteurs fluides et des courbes, un vrai modèle couplé entre courbes et mouvement peut être envisagé. Le modèle dynamique de la courbe est guidé par le champs de vitesse, une assimilation conjointe des deux variables peut alors permettre d'estimer le mouvement en observant les déformations de courbes suivies au cours d'une séquence d'image. On se place ici dans un cadre de dynamique simplifié ou seule la vorticité du champ de vitesse est considérée :

$$\begin{cases} \partial_t \xi + \nabla \xi \cdot \mathbf{v} = \epsilon_1 \Delta \xi \\ \partial_t \Phi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \epsilon_2 \kappa) \|\nabla \Phi\| = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Le lien entre les deux équations est donné par l'intégrale de Biot-Savart :

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp G * \xi,$$

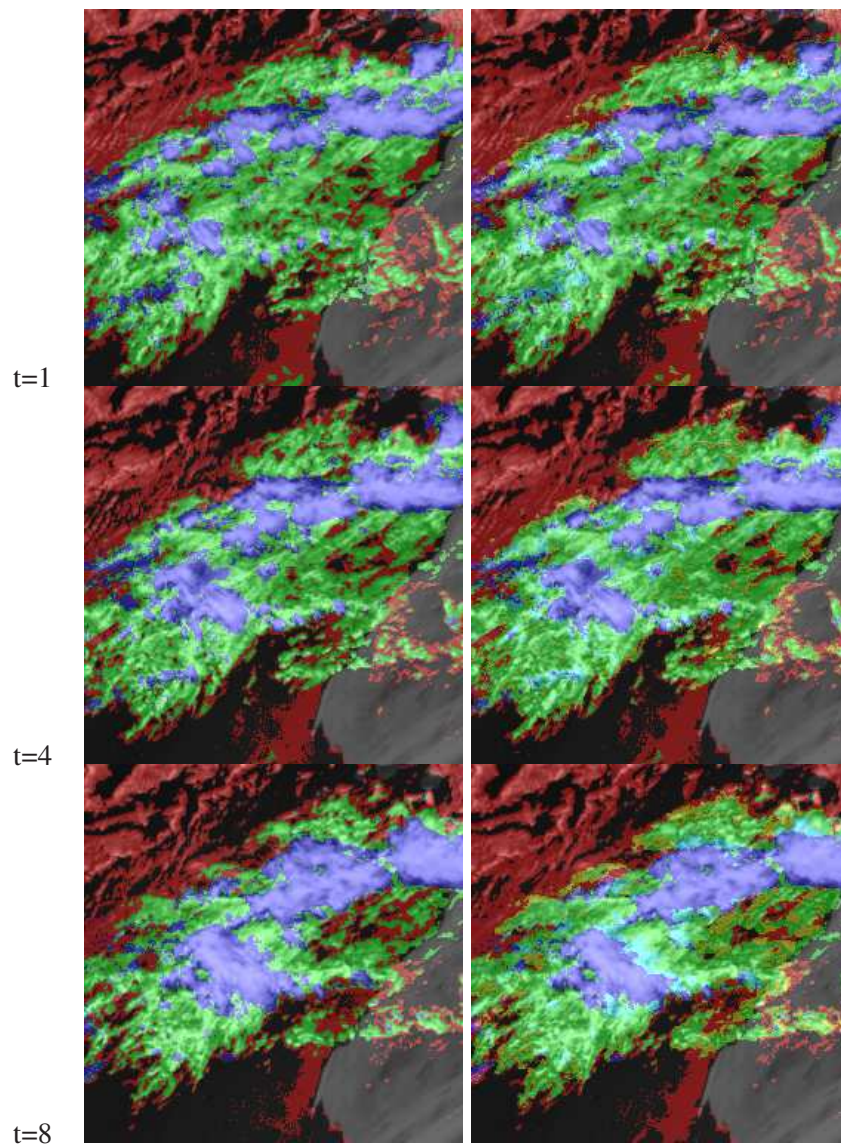


FIG. 6.3: **Séquence de couches de nuages.** *Colonne de gauche* : Échantillon des couches observées. *Colonne de droite* : Résultats après assimilation. Sur la colonne de gauche, le bleu, le rouge et le vert indiquent la présence de nuages hauts, moyens et bas. Sur la droite, les résultats font apparaître de nouvelles couleurs correspondant aux intersections entre couches. Par exemple, le bleu clair indique la superposition de nuages hauts et moyens, le jaune celle de nuages moyens et bas.

où G est le noyau de Green.

Il s'agit d'une assimilation avec modèle dynamique parfait, comme défini dans la section 3.2.1. Le contrôle du système porte donc uniquement sur la vorticité et la courbe initiale.

Contrairement à la sous-section précédente, les équations du système 6.2 sont assimil es

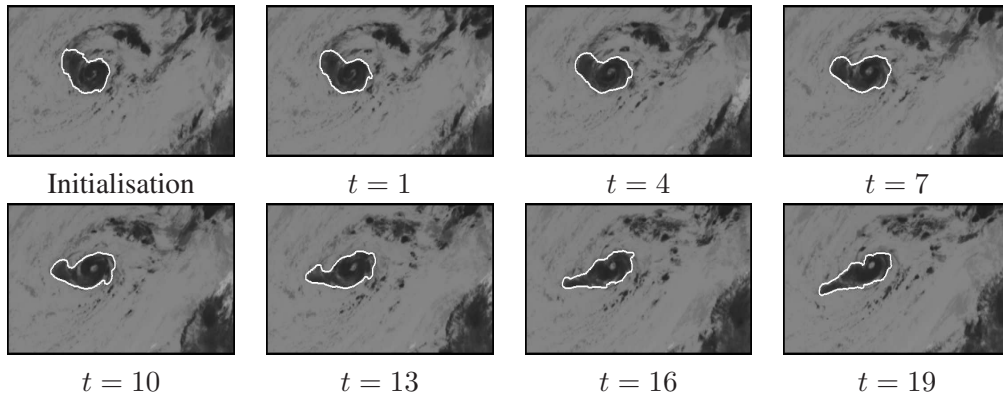


FIG. 6.4: **Séquence Vince**. L'initialisation est donnée par la première image, le suivi obtenu avec la méthode d'assimilation considère toutes les déformations de l'œil du cyclone.

conjointement. Le modèle adjoint fait alors intervenir un réel couplage entre modèles de courbe et de mouvement grâce à l'adjoint du terme de transport de la courbe.

Le modèle de mesure associé à cette dynamique est donné par l'opérateur d'observation image basé sur les histogrammes d'intensité lumineuse (équation 4.19) créé pour le suivi de courbe :

$$F(\phi, I)(\mathbf{x}, t) = [1 - d_B(\rho_{V_x}, \rho_o)]^2 \mathbf{1}_{\phi(\mathbf{x}) < 0} + [1 - d_B(\rho_{V_x}, \rho_f)]^2 \mathbf{1}_{\phi(\mathbf{x}) \geq 0},$$

où d_B est la distance de Bhattacharia et ρ_o et ρ_f sont les histogrammes de référence de l'objet et du fond.

Nous avons appliqué cette nouvelle approche à la séquence décrivant le cyclone. Les résultats sont présentés dans la figure 6.5. Le système est initialisé par une surface de vorticité et la selection d'une courbe d'intérêt sur la première image de la séquence. L'intégration de la vorticité initiale est illustr e dans la colonne (a). Cette vorticité guide le premier développement de la courbe (colonne (b)). A la fin du processus d'assimilation couplé, la vorticité et la courbe initiales ont été corrig es et mènent aux résultats des colonnes (c) et (d).

Comme seconde expérimentation, nous avons suivi un vortex crée par le passage d'une aile d'avion¹. Les résultats sont présents dans la figure 6.6.

Le mouvement a été initialisé avec une vorticité nulle, la courbe ne se déplace donc pas lors de la première intégration du système (colonne (a)). Au fur et à mesure des itérations (colonne (b)), le mouvement estimé permet de recalibrer la courbe aux images, jusqu'à ce que le suivi corresponde très précisément au phénomène visualisé (colonne (c)).

Ces exemples montrent que le procédé permet d'utiliser les déformations visibles d'une courbe suivie pour estimer le mouvement du système physique sous-jacent. Le mouvement initial est en effet corrigé pour que l'évolution dans le temps de la courbe initiale respecte les contraintes photométriques de la séquence d'images. Le modèle dynamique impliqué dans nos applications

¹Nous remercions l'ONERA pour nous avoir fourni cette séquence d'images

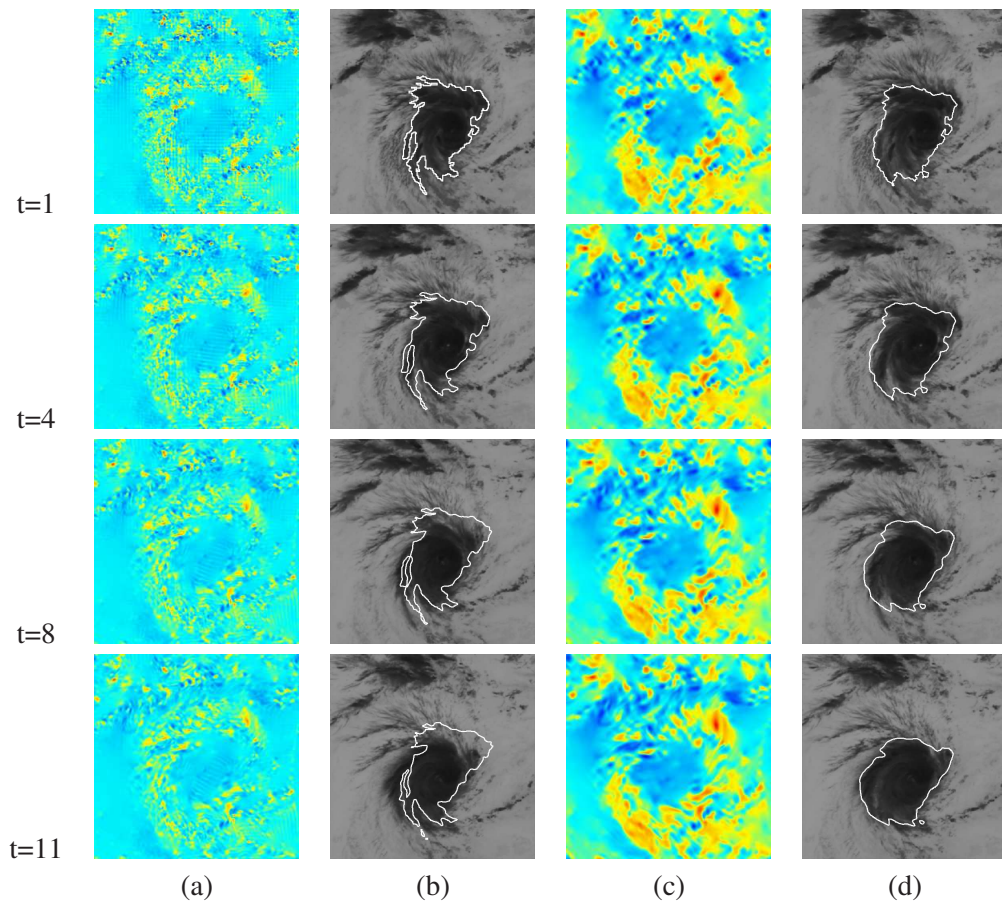


FIG. 6.5: **Séquence du cyclone, assimilation couplée.** (a) Intégration de la vorticité initiale. (b) Intégration de la courbe initiale suivant la vorticité initiale. (c) Intégration de la vorticité finale. (d) Intégration de la courbe finale suivant la vorticité finale.

est bien sûr très simple, mais l'idée pourrait être adaptée pour des systèmes plus complexes.

Dans les applications météorologiques, on sait que seuls certains types de nuages ont une dynamique respectant les vents atmosphériques. La connaissance *a priori* de l'histogramme d'intensité de ces nuages doit ainsi permettre d'assimiler directement les données images satellitaires. De manière équivalente, les histogrammes correspondant aux nuages ne respectant pas les contraintes de la dynamique atmosphérique seront attribués à l'histogramme du fond ρ_f .

En océanographie, les images décrivant l'évolution d'icebergs pourraient également être directement utilisées avec ce système couplé.

6.4 Suivi d'objets naturels

Dans le cas d'objets naturels, rigides ou déformables, la situation est complètement différente. En effet, la courbe et son mouvement sont fortement couplés. On traite alors un problème croisé qui doit être résolu alternativement. Les matrices de covariance d'observation feront ainsi interve-

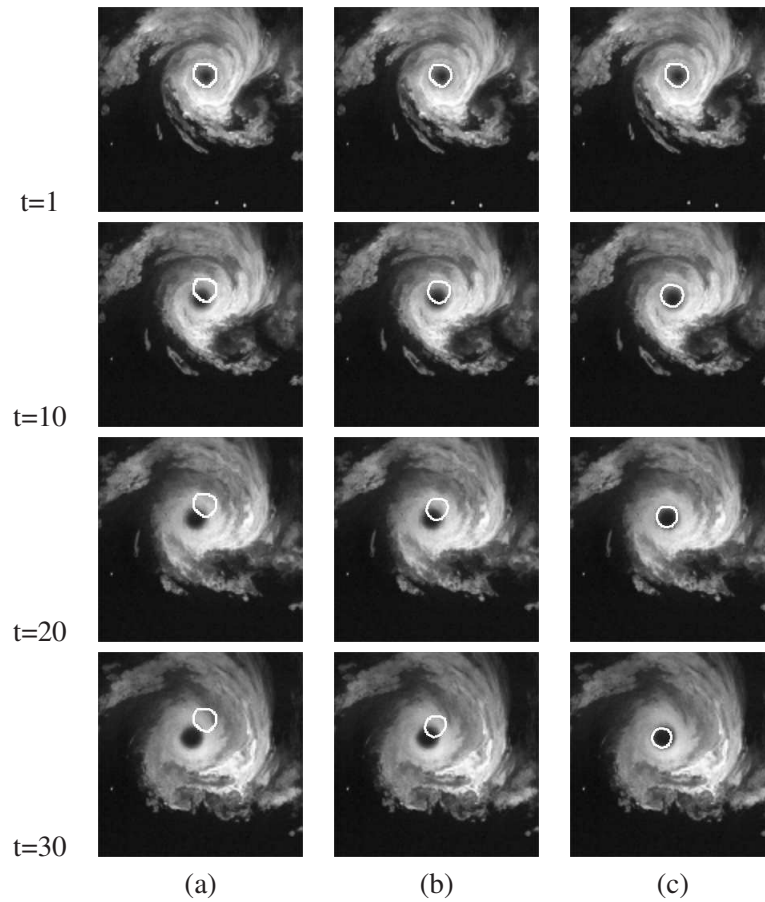


FIG. 6.6: **Séquence du vortex, assimilation couplée.** Le système est initialisé avec une vorticité nulle. (a) Intégration de la courbe initiale suivant la vorticité initiale. (b) Résultat intermédiaire. (c) Intégration de la courbe finale suivant la vorticité finale.

nir un couplage entre assimilation de courbe et de mouvement.

Aucune loi physique ne peut être utilisée pour décrire de façon générale les mouvements d'objets naturels dans les vidéos. Dans les applications de suivi, il est donc difficile de définir une loi permettant de prévoir avec certitude la trajectoire d'un objet. Des modèles généraux de dynamique, tels que vitesse ou accélération constantes, sont communément utilisés [97]. Le travail présenté repose aussi sur ce type de modèle. On considérera néanmoins deux représentations différentes du mouvement : un modèle dense défini sur l'image entière et un champ paramétrique affine défini à l'intérieur de la courbe représentant l'objet suivi.

6.4.1 Champ dense de mouvement

6.4.1.1 Loi d'évolution pour le champ dense de mouvement

Commençons par décrire la loi d'évolution utilisée. Dans cette approche, la vitesse est supposé constante, à une fonction de contrôle w_v près, le long de la trajectoire d'un point. Ceci se traduit

de manière différentielle comme :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = w_{\mathbf{v}}. \quad (6.3)$$

Selon les deux composantes de la vitesse $\mathbf{v} = [u, v]^T$, la loi d'évolution pour le champs dense peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \mathbf{v} = w_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v \cdot \mathbf{v} = w_v, \end{cases} \quad (6.4)$$

où w_u et w_v sont des fonctions de contrôle dont les covariances associées sont fixées comme des matrices diagonales constantes. En combinant le système d'évolution de la courbe (4.12) et la dynamique de mouvement (6.4), un modèle couplé pour la fonction d'état $[\Phi, u, v]^T$ est obtenu :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Phi \\ u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta \Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} \right) \\ \nabla u \cdot \mathbf{v} \\ \nabla v \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} = w. \quad (6.5)$$

Les différentes mesures liées à cette loi doivent maintenant être définies.

6.4.1.2 Observations des champs denses

Comme le mouvement guide la courbe, il est nécessaire d'avoir de bonnes mesures de mouvement. Les observations de champs denses sont obtenues par la technique du flot optique sur chaque image de la séquence. En cas d'occultation, ces mesures de mouvement ne décrivent plus la trajectoire de l'objet suivi mais celui de l'objet occultant. On fera donc l'hypothèse que l'objet est visible sur les deux premières images de la séquence. L'observation initiale de son mouvement permet ainsi de représenter la trajectoire initiale de l'objet. Les mesures de mouvement obtenues par flot optique sont ensuite assimilées avec des matrices de covariances appropriées, afin de ne considérer que les zones de mouvement reliées à l'objet suivi. Deux cas doivent être traités séparément, suivant le modèle d'observation de courbes considéré :

- *Modèle d'observations de courbes bruitées* : Dans ce type de modèle présenté dans le paragraphe 4.4.6.1, des courbes bruitées ou incomplètes sont supposées disponibles quand l'objet est entièrement ou partiellement visible. Ces courbes observées sont obtenues grâce à un algorithme externe de segmentation. Des procédés simples reposant sur le seuillage photométrique peuvent être utilisés. Ce type de mesure permet d'obtenir directement la zone de l'image où l'objet est supposé visible, en faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas d'ambiguïté photométrique sur l'objet suivi. Les matrices de covariance d'observations du mouvement peuvent ainsi être définies à partir des mesures disponibles des courbes :

$$R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) = R_{min} + (R_{max} - R_{min}) \mathbf{1}_{Y_{obs} > 0}. \quad (6.6)$$

Ainsi, les mesures de champs denses ne sont utilisées que dans les zones de l'image où l'objet est visible. Dans toutes nos applications, nous avons fixé $R_{min} = 10$ et $R_{max} = 50$.

- *Modèle d'observations image* : Lorsque le modèle de mesure est directement lié à l'intensité lumineuse de l'image (paragraphe 4.4.6.2) ou à des histogrammes locaux (paragraphe 4.4.6.3), la situation est plus problématique, puisque l'on n'observe plus des courbes. En considérant les paramètres photométriques définissant l'objet et le fond ($m_o \setminus m_b$ ou $\rho_o \setminus \rho_b$),

il est possible de générer des matrices de covariance d'observations du mouvement adaptées aux mesures :

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) &= R_{min} + (R_{max} - R_{min}) \mathbf{1}_{|I(\mathbf{x}, t) - m_o| > |I(\mathbf{x}, t) - m_b|} \quad (\text{\S} \textit{paragraphe} 4.4.6.2) \\ R(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}, t) &= R_{min} + (R_{max} - R_{min}) \mathbf{1}_{d_B(\rho_{V\mathbf{x}}, \rho_o) < d_B(\rho_{V\mathbf{x}}, \rho_b)} \quad (\textit{paragraphe} 4.4.6.3) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Les valeurs fortes de la covariance ($R_{max} = 20$) sont associées aux points appartenant au fond tandis que les valeurs faibles ($R_{min} = 5$, où la confiance est bonne) correspondent à l'objet d'intérêt. Les matrices de covariance d'observations du mouvement permettent de ne considérer le mouvement que dans les zones de l'image correspondant à l'objet suivi. En cas d'occultation, aucune mesure photométrique n'est considérée.

6.4.2 Modèle de vitesse affine

Dans certains cas (objets quasi planaires ou éloignés), il est possible de considérer une représentation paramétrique affine du mouvement sur la région correspondant à l'objet cible.

6.4.2.1 Loi d'évolution

Comme précédemment avec l'équation (6.3), on fait l'hypothèse que l'objet est animé d'une vitesse constante le long de sa trajectoire, à une fonction de contrôle près. Le mouvement apparent de la zone délimitée par le contour de l'objet est désormais représenté par un mouvement paramétrique affine :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x} + \mathbf{T}(t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que } \Phi(\mathbf{x}) < 0, \quad (6.8)$$

où $\mathbf{S}(t)$ est la matrice de rotation et divergence et $\mathbf{T}(t)$ est un vecteur de translation. En combinant les équations (6.3) et (6.8), on obtient la relation :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{S}(t)}{\partial t} + \mathbf{S}^2(t) \right) \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} + \mathbf{S}(t)\mathbf{T}(t) = w_{\mathbf{v}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ tel que } \Phi(\mathbf{x}) < 0. \quad (6.9)$$

Comme cette équation doit être respectée pour tous les points \mathbf{x} à l'intérieur de l'objet, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{S}(t)}{\partial t} + \mathbf{S}^2(t) = w_{\mathbf{S}}, \\ \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} + \mathbf{S}(t)\mathbf{T}(t) = w_{\mathbf{T}}, \end{cases} \quad (6.10)$$

où $w_{\mathbf{S}}$ et $w_{\mathbf{T}}$ sont des fonctions de contrôle dont les matrices de covariances associées sont fixées comme des matrices diagonales constantes. Si $\mathbf{S}^{-1}(t_0)$ existe, alors il existe une solution au système d'équations (6.10) :

$$\begin{cases} \mathbf{S}(t) = (\mathbf{S}^{-1}(t_0) - \mathbf{I}d t)^{-1}, \\ \mathbf{T}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)\mathbf{T}(t_0). \end{cases} \quad (6.11)$$

Cette solution peut être utilisée comme résultat de l'intégration directe lors du processus d'assimilation de la composante de mouvement. Il suffit désormais de joindre la loi d'évolution de la courbe (4.12) et la nouvelle dynamique de mouvement (6.10) pour obtenir un modèle d'évolution couplé de la fonction d'état $[\Phi, \mathbf{S}, \mathbf{T}]^T$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Phi \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} - \varepsilon \left(\Delta \Phi - \frac{\nabla^T \Phi \nabla^2 \Phi \nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|^2} \right) \\ \mathbf{S}^2(t) \\ \mathbf{S}(t)\mathbf{T}(t) \end{bmatrix} = w. \quad (6.12)$$

Il ne reste plus à présent qu'à définir les mesures Y_S et Y_T associées aux nouvelles composantes S et T de la fonctions d'état.

6.4.2.2 Observations de la vitesse affine

Comme pour le modèle de champs denses de mouvement, il est essentiel de disposer de mesures de vitesses. Les deux types de modèles d'observation des contours doivent aussi être distingués.

- *Modèle d'observations de courbes bruitées* : Avec ce modèle de mesure (paragraphe 4.4.6.1), les courbes sont obtenues par des techniques de segmentation externes. Ces observations de contour permettent de réaliser une estimation paramétrique robuste du mouvement dans une zone délimitée [22, 134]. Une telle approche permet d'obtenir directement les composantes de la fonction d'observation Y_S et Y_T . Lorsqu'aucune courbe n'est disponible ou si la courbe observée est trop petite, l'observation de mouvement n'est pas prise en compte. Les matrices de covariances sont alors fixées, comme dans le cas précédent avec l'équation 6.6.
- *Modèle d'observations image* : Lorsque le modèle de mesure des courbes est directement relié à l'intensité de l'image (paragraphe 4.4.6.2) ou à des histogrammes locaux (paragraphe 4.4.6.3), le seul contour disponible pour lequel il est possible de réaliser une estimation de mouvement est le contour donné par la condition initiale. Cette simple mesure initiale de mouvement est bien évidemment insuffisante pour assimiler le mouvement de l'objet sur toute la séquence. La solution choisie est de considérer également une condition finale sur la position de la courbe, ce qui a pour conséquence l'ajout d'une équation dans le système d'assimilation (voir le paragraphe 3.2.2.5). Ainsi, en supposant que l'objet est visible (au moins partiellement) sur la première et la dernière image de la séquence, les mesures de mouvement associées à ces deux courbes peuvent être assimilées pour donner une première approche du mouvement de l'objet au cours de la séquence. Cette esquisse permet d'effectuer une première assimilation des courbes. Ensuite, les estimations de la position de la courbe fourniront un support pour exécuter l'algorithme d'estimation paramétrique du mouvement, et ainsi raffiner les mesures de mouvement. Plus précisément, l'estimation de mouvement sera seulement réalisée sur le support de la région associée aux points de covariance d'observation de courbes de faibles valeurs. Les matrices de covariances sont donc données par l'équation 6.7. Un tel procédé permet d'éviter de réaliser l'estimation de mouvement sur les parties occultées de l'objet.

On peut noter que le coût de calcul de l'assimilation de vitesses affines est très faible. En effet, les variables d'état du mouvement sont, dans ce cas, définies par une matrice (2×2) et un vecteur (1×2), au lieu d'un champ de vecteurs de la taille de l'image dans le cas du modèle de champ dense.

6.4.3 Résultats

Comme premier exemple, le suivi de deux courbes représentant les lignes de niveau photométrique de deux véhicules dans une séquence vidéo de 27 images est présenté. On peut observer que l'un des véhicules cache l'autre durant une longue période. Les lignes de niveaux observées par

Le processus de segmentation sont présentées dans la colonne (a) de la figure 6.7. Une estimation paramétrique du mouvement est réalisée dans ces zones, puis ces mesures sont assimilées comme décrit dans la section 6.4.2. Évidemment, il n'y a aucune mesure disponible de la voiture blanche au cours de son occultation, que ce soit pour sa courbe ou son mouvement. Deux ensembles de lignes de niveau (une pour chaque objet) ont été utilisés dans cette application. Les colonnes (b) et (c) de la figure 6.7 présentent les courbes résultantes de l'assimilation pour deux paramétrisations distinctes. Dans la colonne (b), la matrice de covariance de l'initialisation de la courbe a été renforcée par rapport à celle des observations de la courbe ; tandis que dans la colonne (c), la matrice de covariance de l'initialisation de la courbe à de plus petites valeurs. Ainsi, la position

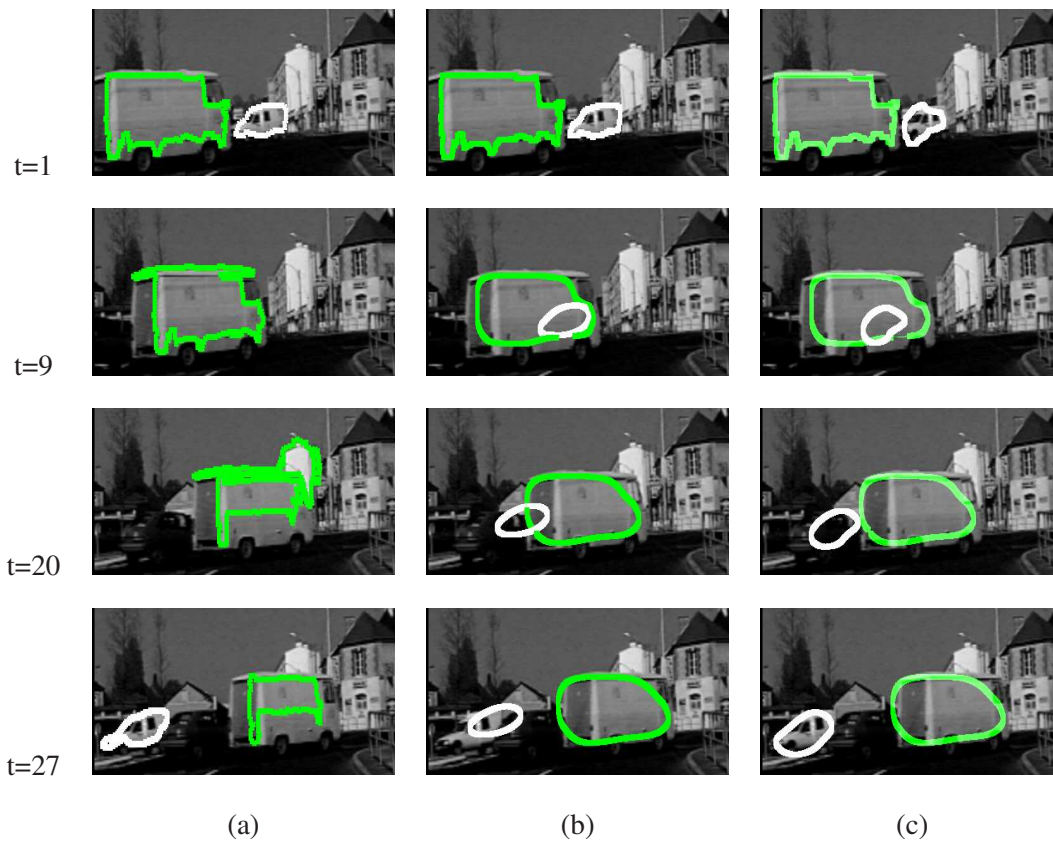


FIG. 6.7: **Séquence de voitures 2.** (a) Échantillon des courbes observée. (b) Courbes solutions avec une matrice de covariance d'initialisation renforcée. (c) Courbes solutions avec une matrice de covariance des observations renforcée.

initiale de la voiture entourée de rouge est bien retrouvée dans la colonne (b), mais cette même voiture est moins bien suivie à la fin de la séquence. A l'opposé, on peut voir sur la colonne (c) qu'avec plus de degrés de liberté sur l'initialisation, la voiture est bien récupérée à la fin de la séquence, mais la solution à l'image initiale est un peu détériorée. Cet exemple montre l'influence des matrices de covariances. Notons au passage que même si la voiture blanche n'a pas une vitesse constante au cours de son occultation, le processus d'assimilation permet de prédire de manière assez réussie la position de sa courbe photométrique.

La technique est à présent appliquée sur une séquence dans laquelle une main change de direction au cours de son occultation. Les lignes de niveaux correspondant aux observations fournies par le processus de segmentation sont présentées dans la colonne (a) de la figure 6.8. Il n'y a donc ni mesure de courbe ni mesure de mouvement entre les images 11 à 35 de la séquence. Les colonnes (b) et (c) de la figure 6.8 présentent respectivement les résultats finaux correspondant aux courbes et aux champs paramétriques affines. On peut ici voir que malgré le faible nombre de courbes observées et une longue occultation, la technique proposée permet de suivre le masque d'un objet ainsi que son mouvement.

La troisième expérience concerne à nouveau une main. Cette fois, le problème de changement de topologie est abordé, puisque la main va changer de forme en se fermant au cours d'une occultation. Pour cette exemple, le modèle de mesures de courbes basé sur les fonctions de densité de probabilité locales a été utilisé (paragraphe 4.4.6.3). Seules les courbes initiale et finale de la main sont données, comme le montre la colonne (a) de la figure 6.9. En considérant ces conditions limites pour la courbe, l'assimilation du mouvement avec le modèle affine est tout d'abord réalisée (paragraphe 6.4.2). Cette étape produit une esquisse de la trajectoire du mouvement affine. Le contour de la main est alors assimilé suivant ce mouvement. Contours et mouvements sont ainsi alternativement assimilés jusqu'à convergence. La colonne b de la figure 6.9 présente les résultats des courbes obtenues. Pour un tel exemple, l'assimilation combinée de mouvement et courbe permet de trouver une forme dynamique cohérente pour la main occultée.

Enfin, l'efficacité de la méthode de densité de probabilités locales est démontrée sur une séquence réelle. Il s'agit d'un problème d'occultation très difficile, puisque l'on cherche à suivre un surfer au sein d'un tube d'eau. La seule courbe disponible du surfer est l'initialisation, située avant l'occultation. Des champs de mouvement denses sont calculés entre chaque couple d'image de la séquence. Ces mesures de mouvements sont alors assimilées avec des matrices de covariance adaptées, comme le décrit la section 6.4.1. Les résultats du suivi sont présentés dans la figure 6.10. On peut vérifier visuellement que le suivi couplé de la courbe et du champ dense de mouvement permet de récupérer une position cohérente du surfer au cours de son occultation. Ce dernier exemple montre que la technique proposée utilise la part d'information pertinente contenue dans chacune des images afin de produire un suivi spatio-temporel globalement cohérent.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le suivi de courbes présenté dans le chapitre 4 a été enrichi par une assimilation conjointe des courbes et de leurs mouvements associés. Cette nouvelle méthode permet de gérer des occultations totales et persistantes de manière simple et efficace. Il apparaît en effet que l'introduction d'un suivi du champ de vitesse est un atout indéniable du suivi de courbes proposé. L'approche permet d'interpoler la position de l'objet dans le sens de son mouvement lors d'occultations totales, ce qui est impossible pour toutes les techniques de la littérature présentées dans la partie 4.3.

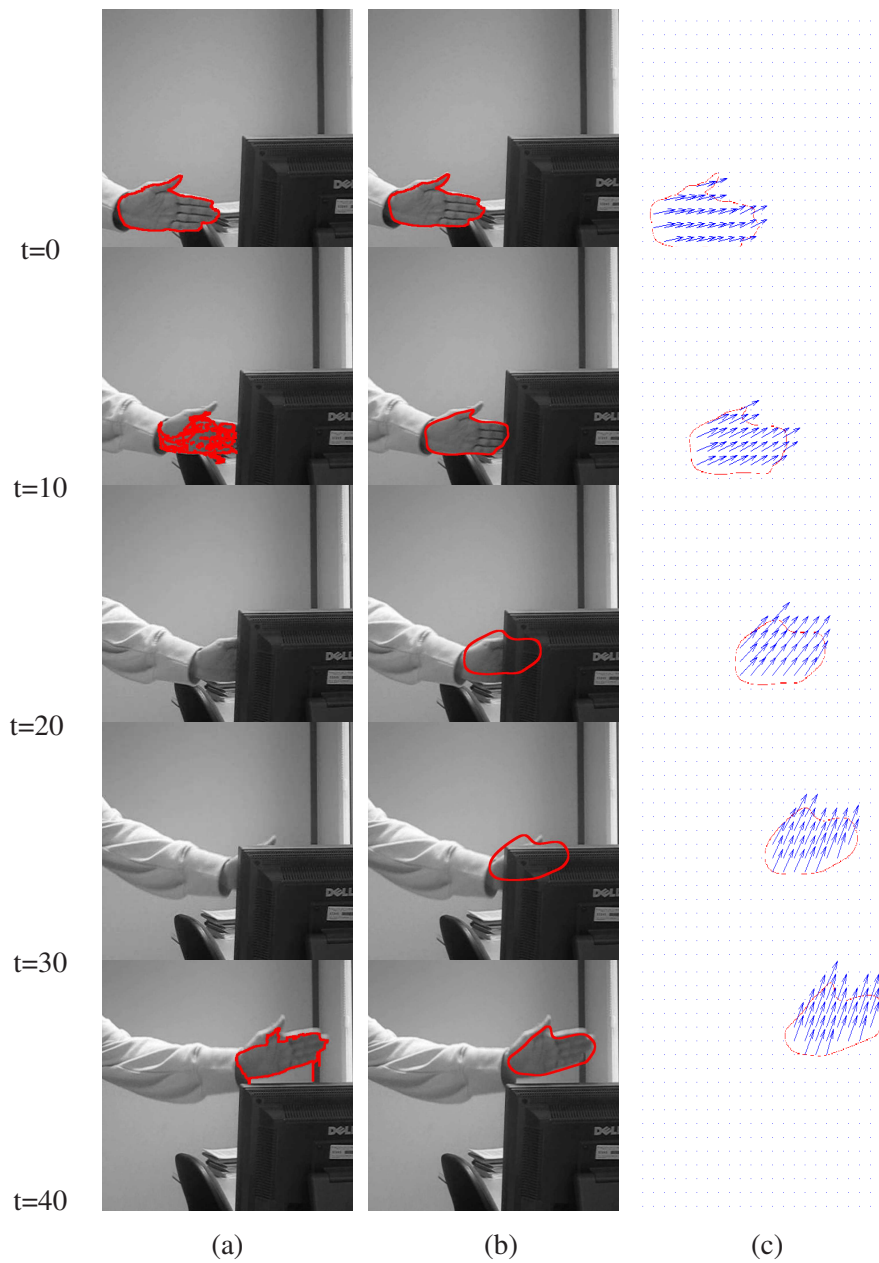


FIG. 6.8: **Séquence de main.** (a) Échantillon des courbes observées. (b) Courbes solutions (c) Champs affines solutions.

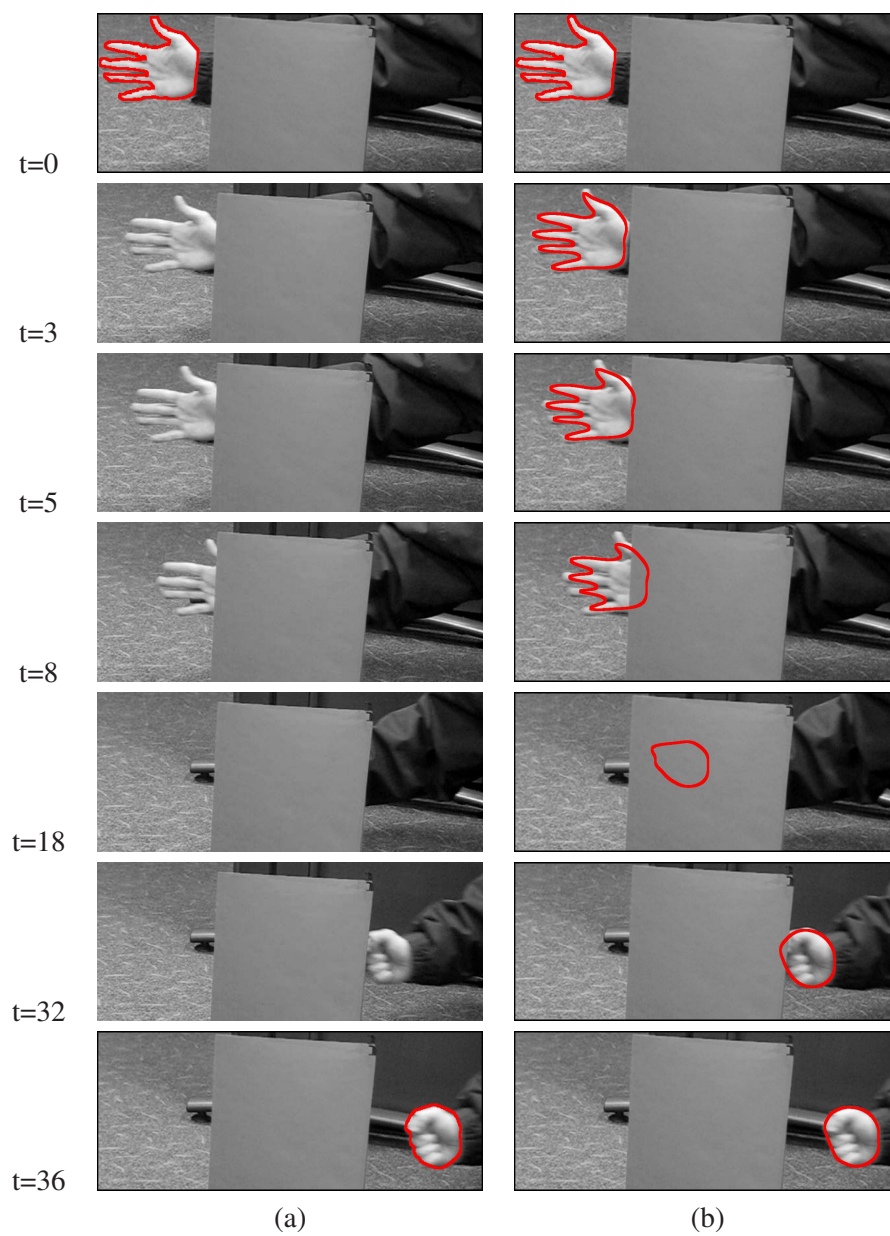


FIG. 6.9: **Séquence de main 2.** (a) Conditions initiale et finale de la courbe. (b) Courbes solutions après assimilation.

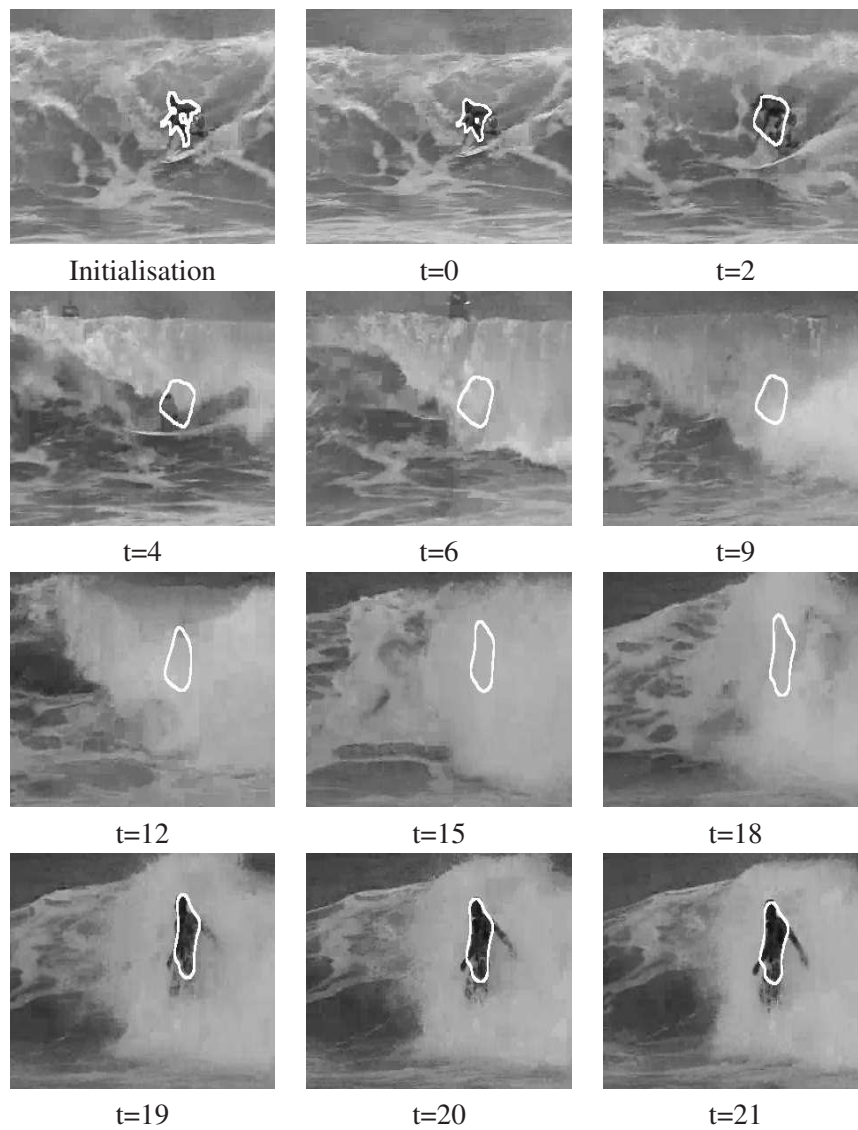


FIG. 6.10: **Surfer dans un tube.** La seule courbe disponible est celle donnée par l'initialisation. Les résultats du suivi sont présentés pour différentes images de $t=0$ à $t=21$.

Conclusion

Dans cette seconde partie, nous avons proposé une nouvelle méthode de suivi couplé de courbes et de mouvement, reposant sur les principes de l'assimilation de données. Un estimateur de champs denses fluides a aussi été développé.

Le cas des mesures indirectes extraites à partir des images (les pseudo-observations) a été étudié en se servant d'algorithmes externes (techniques de segmentation pour les courbes et flot optique pour le mouvement). Des modèles de mesure permettant d'observer directement les images ont alors été proposés (modèle de densités de probabilités locales pour les courbes et contrainte du mouvement apparent pour le mouvement) afin de rendre le système de suivi le plus autonome possible. L'introduction de l'assimilation de données a ainsi permis de gérer le suivi de variables de grandes dimensions soumises à des occultations totales de données images (objet masqué lors du suivi de courbes et estimation de mouvement pendant la nuit sur le canal visible du satellite Météosat Seconde Génération).

Dans le cas d'objets rigides soumis à des mouvements complexes, il devrait être possible d'obtenir un nouveau type de suivi complètement robuste aux occultations, en couplant ces travaux avec des techniques introduisant un *a priori* sur la nature de l'objet, en apprenant les modèles dynamiques des objets, ou encore en considérant le modèle 3D exact du déplacement d'un objet (modèle parfait et opérateur d'observation gérant la projection 3D/2D).

Enfin d'autres perspectives de ces travaux au sein de la communauté de vision par ordinateur peuvent être envisagées.

Morphing

Dans le chapitre 4, nous avons montré que la technique proposée permet de réaliser un "morphing" entre deux courbes (voir la séquence synthétique 4.4).

Nous avons essayé d'utiliser cette propriété pour réaliser un morphing entre deux images de visages. Pour cela, chaque ligne de niveau de gris Φ_n a été assimilée suivant un modèle de courbure moyenne :

$$\partial_t \Phi_n = -\kappa \|\nabla \Phi_n\|,$$

avec la courbure κ donnée par :

$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \Phi_n}{\|\nabla \Phi_n\|} \right).$$

Les observations sont données par les lignes de niveau des deux images de référence. Comme l'illustre la figure 6.11, les déformations intermédiaires de ces lignes de niveau obtenues par assi-

milation créent des visages intermédiaires. Les résultats sont visuellement assez décevant. Notons néanmoins que ces visages n'ont pas été recalés entre eux au préalable et qu'une amélioration sensible des résultats pourrait sans doute être obtenue en construisant un ensemble de ligne de niveaux en 3 dimensions pour réaliser un vrai morphing de visage.



FIG. 6.11: **Morphing de visages.** Des visages intermédiaires sont créés à partir de 2 photographies. Le résultat est bon pour les cheveux mais plus flou sur les détails des visages intermédiaires.

Restauration de films

Une autre piste de recherche concerne l'inpainting et la restauration de films. En considérant une séquence d'images détériorées, l'assimilation de données offre un cadre méthodologique idéal pour la reconstruction des zones dégradées des images. Des surfaces correspondant aux images peuvent ainsi être assimilées avec une dynamique donnée par un flot optique précalculé. La variable d'état est donc l'image I et le modèle dynamique s'écrit :

$$\partial_t I = \nabla I \cdot \mathbf{v}.$$

Les observations utilisées sont les images de la séquence considérée. Une détection des zones dégradées permet alors de générer des matrices de covariances d'observation adaptées aux données. Les images sont ensuite restaurées en propageant globalement l'ensemble de l'information contenue dans la séquence par le modèle direct et le modèle adjoint. Pour illustrer ce point, la figure 6.12 présente une séquence d'images artificiellement dégradée puis restaurée par le principe d'assimilation de surfaces.

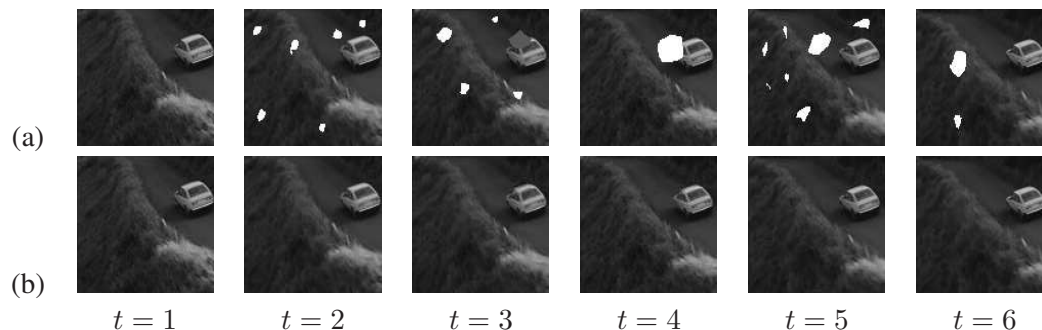


FIG. 6.12: **Restauration d'images.** La séquence de 6 images *Avenger* a été artificiellement détériorée (ligne a), puis les surfaces correspondant aux images ont été assimilées (ligne b). L'assimilation de surfaces permet de remplir les zones manquantes de données.

Estimation de mouvement

Dans le chapitre 6, nous avons décrit l'assimilation de champs denses de mouvement pour des séquences présentant l'évolution d'objets rigides ou déformables. Des champs estimés par un algorithme de flot optique ont été considérées comme pseudo-observations. Afin de s'affranchir de cette estimation préalable du mouvement et de la même manière que pour l'estimation de mouvement fluide du chapitre 5, nous avons proposé dans [139] d'observer directement les données images avec un modèle de transport de la vitesse et un modèle d'observation intégrant des fonctions robustes. Le principe de ce premier travail est détaillé dans l'annexe C.

Notons que des travaux similaires basés sur le contrôle optimal pour l'estimation de champs denses dans des séquences rigides ont été proposés dans [26]. Cependant, cette méthode est dédiée à l'estimation de champs stationnaires et inclut un modèle d'observation simple. De plus, et contrairement à notre approche, cette technique repose sur une régularisation spatiale explicite, comme les méthodes traditionnelles d'estimation du flot optique.

L'approche a été testée sur les 10 premières images de la séquence taxi. Afin de montrer l'apport du modèle dynamique, nous avons artificiellement bruité 3 images, comme illustré dans la figure 6.13(b-d). Ce type d'artéfact peut en effet apparaître lorsque l'on souhaite restaurer de vieux films. Les champs de mouvement estimés par notre approche pour les images 1, 2, 5 et 6 sont présentés sur les images (e-h). Les champs correspondant obtenus par un estimateur robuste de flot optique sans modèle dynamique [126] sont enfin présentés sur les images (i-l). On remarque que les champs estimés par notre procédé d'assimilation ne sont pas affectés par le bruit des images.

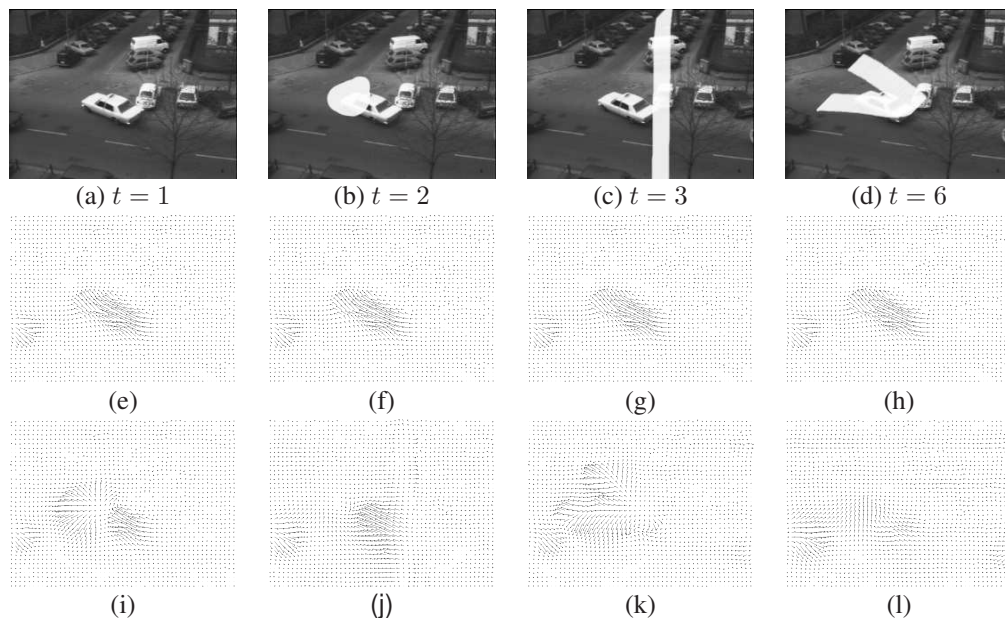


FIG. 6.13: **Séquence taxi.** (a) : Image initiale. (b-d) : trois images bruitées de la séquence. Champs de vitesses entre les temps $(t = 1, t = 2)$, $(t = 2, t = 3)$, $(t = 5, t = 6)$ et $(t = 6, t = 7)$ estimés par assimilation de données images (e-h) et par flot optique sans modèle dynamique (i-l).

Estimation de la profondeur d'une scène

En s'appuyant sur cette dernière technique d'estimation de mouvement, une méthode permettant de reconstruire la profondeur des scènes peut être créée. En effet, considérons une caméra mobile se déplaçant dans une scène rigide suivant un modèle dynamique simple (translation, rotation). La connaissance des paramètres de cette caméra ainsi que la distance entre la caméra et les points de la scène suffit pour calculer implicitement le flot optique de la séquence d'images. En s'appuyant sur la projection des points 3D sur une image 2D par une caméra se déplaçant à vitesse constante sur l'axe optique, le modèle dynamique de la vitesse \mathbf{v} est alors guidé par la carte de profondeur Z des points visualisés. Sous ces hypothèses, on obtient après quelques calculs :

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}}{Z} = 0.$$

Cette idée, brièvement détaillée dans l'annexe D, a été testée au cours de cette thèse sur la séquence Yosemite. Les résultats de l'estimation du mouvement et de la profondeur sont présentés dans la figure 6.14. La gestion des zones homogènes de l'image ainsi que les occultations ou les

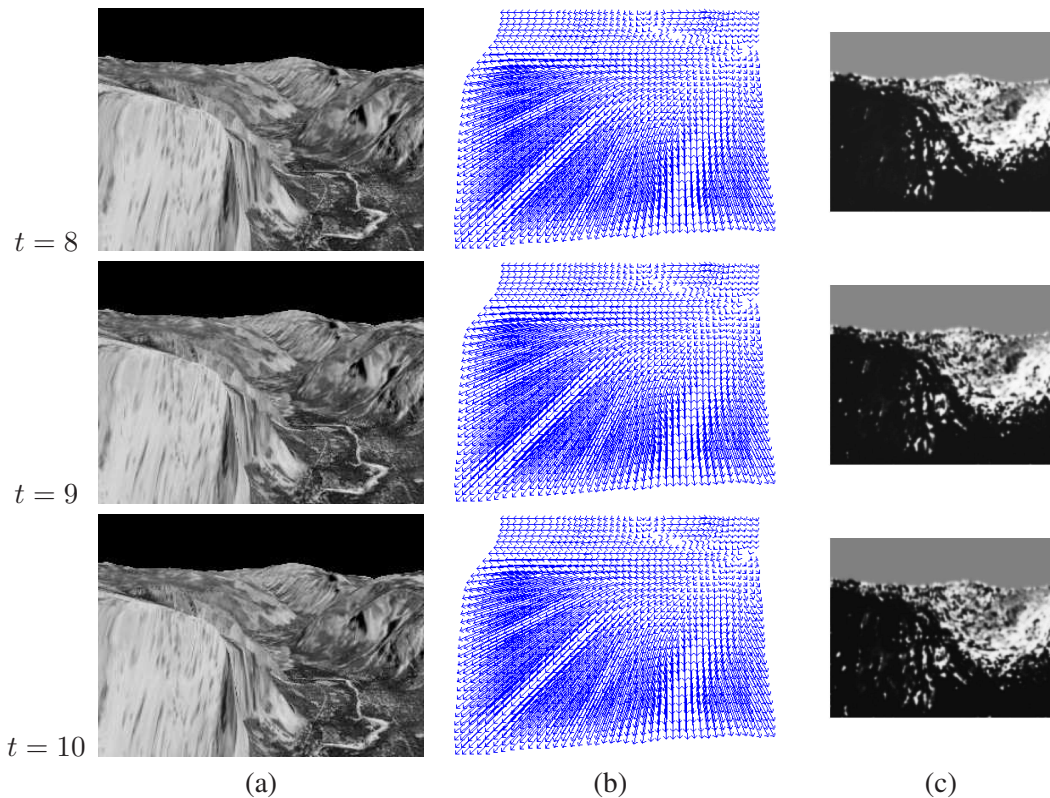


FIG. 6.14: **Estimation de vitesse et profondeur.** La séquence d'images Yosemite (colonne (a)) est assimilée pour estimer simultanément le flot optique (colonne (b)) et la carte de profondeur des points (colonne (c)).

apparitions d'objets sont néanmoins problématiques. Un effort de travail conséquent sur les matrices de covariance d'observations est encore nécessaire pour obtenir de meilleurs résultats. En

effet, même si le flot optique est bien reconstruit (voir tableau 6.1), la carte de profondeur (couleur noire pour les pixels les plus proches) souffre d'incohérences dues aux zones homogènes de l'image.

	err. #8	err. #9	err. #10
1	-	$1.99^\circ \pm 1.41^\circ$	-
2	-	$1.59^\circ \pm 1.39^\circ$	-
3	-	$1.58^\circ \pm 1.21^\circ$	-
4	-	$1.46^\circ \pm 1.50^\circ$	-
5	-	$1.14^\circ \pm 2.14^\circ$	-
6	-	$0.98^\circ \pm 1.17^\circ$	-
7	$1.23^\circ \pm 0.82^\circ$	$1.34^\circ \pm 0.89^\circ$	$1.17^\circ \pm 0.55^\circ$

TAB. 6.1: **Evaluation numérique du flot optique sur la séquence synthétique Yosemite** en suivant le critère de Barron *et al* [11] pour les champs correspondants aux images (#8, #9 et #10) de la séquence. Les méthodes comparées sont : **1** : Lai & Vemuri [107]; **2** : Brox *et al* 2D [32]; **3** : Mémin & Pérez [125]; **4** : Weickert *et al* [173]; **5** : Farnebäck [72]; **6** : Brox *et al* 3D [32]; **7** : Notre approche.

Bilan

Comme nous venons de le voir, les techniques d'assimilation de données, non exploitées par la communauté de la vision par ordinateur, offrent de nouvelles perspectives extrêmement intéressantes pour répondre à des problèmes contemporains de post-traitement de séquences vidéos.

D'autre part, on peut constater que les résultats obtenus sur les séquences fluides dans cette partie sont indéniablement meilleurs que les techniques classiques de la communauté. Les modèles dynamiques utilisés sont en effet plus proches de la réalité pour ces applications qui correspondent à un cadre idéal d'utilisation de l'assimilation de données. Nous allons maintenant nous intéresser à des applications où l'on connaît un bon *a priori* de la dynamique sous-jacente. Ainsi, dans la troisième partie de cette thèse, l'assimilation d'observations images va être appliquée successivement à la météorologie et à la mécanique des fluides expérimentale.

Troisième partie

Suivi de champs de vecteurs : applications particulières

Introduction

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressé au suivi visuel de courbes et de champs de vecteurs en utilisant le cadre variationnel de l'assimilation de données. Pour ces applications de suivi, nous nous sommes appuyés sur des modèles dynamiques approchés et sur des données images de manière directe ou indirectement par le biais de techniques additionnelles (segmentation par seuillage, estimation du flot optique).

Dans le cas de l'assimilation de champs de vitesse, peu d'hypothèses sur la nature de l'écoulement observé ont été formulées. Nous nous sommes principalement reposé sur une dynamique vorticité-vitesse avec un terme de divergence supposé faible.

Dans cette troisième partie, nous tentons d'explorer des problèmes de suivi pour deux applications particulières où une modélisation plus précise de la dynamique peut être utilisée. Cette partie est ainsi divisée en deux chapitres dédiés à la météorologie et à la mécanique des fluides expérimentale.

Dans le **chapitre 7**, nous nous intéressons à l'estimation de mouvement de couches atmosphériques. Des images satellitaires fournies par le consortium Eumetsat sont alors utilisées comme observation pour le système d'assimilation développé.

Le **chapitre 8** décrit l'estimation de coefficients associés à des systèmes dynamiques d'ordre réduits pour des écoulements expérimentaux. Ces écoulements sont visualisés au moyen d'une séquence d'images. L'assimilation est alors menée sur une représentation réduite des champs de vitesse représentant l'écoulement.

Chapitre 7

Suivi de mouvements atmosphériques par couches

7.1 Introduction

La caractérisation et l'analyse de mouvements géophysiques au moyen de séquences d'images est un problème de recherche qui peut s'avérer crucial dans de nombreux domaines scientifiques, comme l'étude des changements climatiques, la prévision du temps, ou l'analyse de l'évolution de la biosphère. L'utilisation de stations au sol, de ballons sondes et plus récemment de mesures aériennes et de satellites basses résolutions ont amélioré l'estimation des champs de vent. Cette étape constitue un pas important vers une meilleure compréhension des phénomènes météorologiques. Cependant, les résolutions spatiales et temporelles de ce type d'information sont souvent insuffisantes, même pour l'analyse de la dynamique des grandes échelles de l'écoulement.

Récemment, dans le but d'amoindrir ces limitations, une nouvelle génération de satellites a été mis en circulation. Ces satellites fournissent des séquences d'images de résolutions spatiales et temporelles bien plus fines que leurs prédécesseurs. Malgré une précision spatio-temporelle accrue, l'analyse du mouvement à partir de ces images reste particulièrement difficile, en raison de la complexité des dynamiques atmosphériques mis en jeu aux échelles observées. Des outils adaptés sont nécessaires pour exploiter les images de cette nouvelle génération de satellites.

Dans un contexte d'analyse d'écoulements géophysiques et d'observation satellitaire, les techniques standard de vision par ordinateur sont assez limitées et peu appropriées, puisqu'elles ne tiennent pas compte des lois physiques gouvernant ces écoulements. L'utilisation de loi dynamique doit en effet permettre de remédier aux ambiguïtés inhérentes aux données satellitaires (faible contraste, données occultées par des couches nuageuses). Afin d'estimer les mouvements régissant l'atmosphère, nous souhaitons coupler des données obtenues à partir des images satellitaires avec un modèle dynamique adapté.

Pour cela, une décomposition de l'atmosphère en couches est présentée dans la section 7.2. Afin de décrire l'évolution d'une couche atmosphérique, un modèle de Saint Venant [60] (aussi appelé modèle shallow-water) adapté à la dynamique des fluides sur une fine épaisseur est ensuite considéré dans la section 7.4. Ce modèle est alors couplé à des observations de pression image dans la section 7.3. Le système d'optimalité est ensuite donné dans la section 7.5, puis des résultats sur

des séquences synthétiques et réelles sont présentés dans la section 7.6. Ce travail a été publié dans [144].

Notons que des travaux similaires d'assimilation de données images ont été proposés pour l'estimation de circulation océanographique à partir d'images satellitaires. Différents types de mesures ont été utilisées dans ces applications : des champs de vitesse calculés par flot optique (*i.e.* des pseudo-observations images) [96], puis directement des images de température [88].

7.2 Décomposition en couches

La décomposition des écoulements atmosphériques en couches est valide dans la limite où l'échelle des mouvements horizontaux est bien supérieure à celle des mouvements verticaux. En pratique, comme la hauteur de l'atmosphère est d'une dizaine de kilomètres, cela correspond à des échelles horizontales supérieures à 100 km. L'espace tridimensionnel peut ainsi être décrit comme la superposition de couches de différentes épaisseurs où seules des régions suffisamment fines correspondent à la définition usuelle de couche atmosphérique. Une telle décomposition présente l'avantage de traiter différentes gammes de pressions atmosphériques séparément et évite le mélange d'informations hétérogènes.

Nous considérons ici une décomposition de l'espace 3D en K couches. La k -ième couche correspond à un volume défini par sa surface inférieure s^k et sa surface supérieure s^{k+1} . Une surface s^{k+1} est définie par le haut des nuages appartenant à la couche k . Ces surfaces ne sont ainsi définies que dans les zones où il existe des nuages appartenant à la couche k (voir figure 7.3).

L'appartenance de nuages à une couche donnée est déterminée par des cartes de classification de nuages. Ces cartes, présentées dans la figure 7.1, reposent sur un seuillage de la pression en haut des couches nuageuses. Elles sont fournies automatiquement par le consortium EUMETSAT, l'agence Européenne chargée de l'exploitation des données satellitaires MÉTÉOSAT.

7.3 Observations de cartes de différences de pression

De la même façon que les cartes de classification de couches nuageuses, des images de pression du haut des nuages sont fournies quotidiennement par le consortium EUMETSAT. Ces images sont calculées par un modèle de transfert radiatif basé sur des données obtenues par analyse ou des prévisions à court terme. L'utilisation des différents canaux (*visible, infra-rouge, vapeur d'eau, ...*) des satellites permet de déterminer la pression du sommet des couches nuageuses semi-transparentes [160]. Par la suite, on notera C^k le masque de classification correspondant à la couche de pression k . Les images de pression du haut des nuages sont elles notées p_{\cup} . Elles sont composées par la collection des segments de pression au sommet des nuages $p(s^{k+1})$, *i.e.* :

$$p_{\cup} = \left\{ \bigcup_k p(s^{k+1}, \mathbf{s}); \mathbf{s} \in C^k \right\}.$$

Les images de pression au sommet des nuages constituent donc des cartes éparées de la pression de la frontière supérieure $p(s^{k+1})$ de la couche k . Dans les images satellitaires, les frontières inférieures de ces couches sont toujours occultées. On fera donc ici l'hypothèse que la frontière supérieure de la couche k correspond à la frontière inférieure de la couche $k + 1$ et que

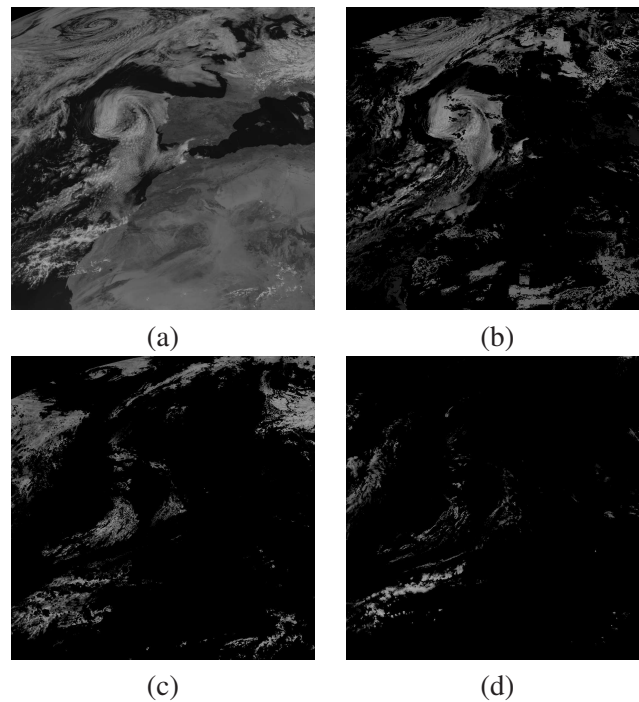


FIG. 7.1: **Classification des nuages.** À partir de l'image satellitaire présentée en (a), le consortium EU-METSAT classe les nuages en trois couches : (b) basse, (c) intermédiaire et (d) haute.

cette valeur est donnée par la pression moyenne sur les zones non occultées de la couche inférieure.

Les images satellitaires ont cependant une résolution bien plus précise que le domaine de validité de notre modèle ($\simeq 100$ km). En effet, un pixel représente une surface carrée de 3 km de côté. Pour cette raison, nous considérons une grille plus grossière des observations satellitaires, en réalisant un rééchantillonnage des images p^k et C^k en accord avec l'échelle de validité du modèle dynamique. Un filtrage passe-bas des images et une décimation sont donc réalisés pour ramener la dimension spatiale de 1024×1024 à 128×128 . Ce rééchantillonnage par un facteur 8 est expliqué dans la prochaine section.

Les images de pressions ainsi obtenues sont illustrées dans la figure 7.3.

Finalement, pour toute couche $k \in [1 \dots K]$, on définit les observations h_{obs}^k de différences de pression par :

$$h_{obs}^k(\mathbf{s}) = \begin{cases} \bar{p}^k - p_{\cup_k}(\mathbf{s}) & \text{si } \mathbf{s} \in C^k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7.1)$$

où \bar{p}^k désigne la pression de référence de la couche k . Les observations h_{obs}^k sont exprimées en hecto Pascal (hPa).

À partir de ces observations, nous allons présenter le modèle physique utilisé pour représenter l'évolution des mouvements horizontaux moyennés sur l'épaisseur d'une couche.

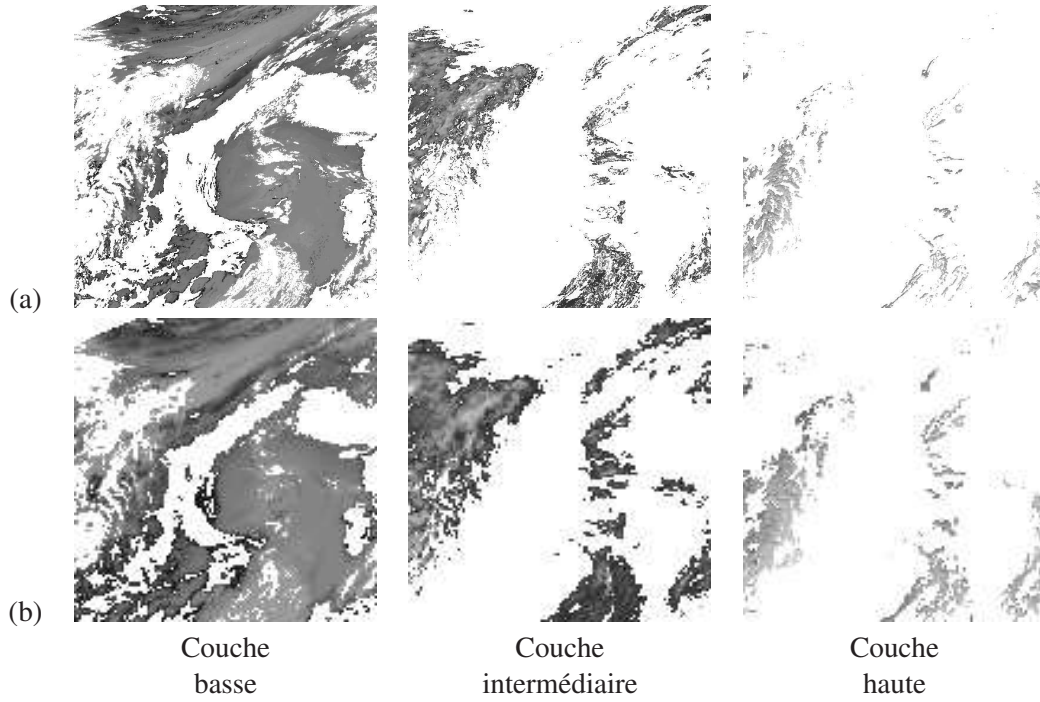


FIG. 7.2: Cartes de pressions. Ligne (a) : Images de pressions originales. Ligne (b) : Images de pressions rééchantillonnées.

7.4 Modèle shallow-water

7.4.1 Modèle direct

Dans le but de fournir un modèle dynamique cohérent par rapport à la décomposition en couches considérée, nous nous basons sur l'approximation de shallow-water (mouvement vertical négligeable par rapport aux mouvements horizontaux) dérivé avec l'hypothèse d'incompressibilité d'une couche. Cette hypothèse hydrostatique caractérise chaque couche k par une densité moyenne ρ^k . Comme nous l'avons souligné, une décomposition par couche et une approximation de type shallow-water ne sont valides que pour l'analyse des grandes échelles de l'atmosphère [50]. Ces équations aussi appelées équations de De Saint-Venant sont couramment utilisées en océanographie [24] ou en hydrologie [94], en considérant de fines couches d'eau.

Comme les forces de frottement sont négligées, l'intégration verticale de l'équation des moments entre les frontières s^k et s^{k+1} mène à l'équation suivante pour chaque couche k E :

$$\frac{\partial(\mathbf{q}^k)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h^k}\mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k\right) + \frac{1}{2\rho^k}\nabla_{xy}(h^k)^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f^\phi \mathbf{q}^k = 0. \quad (7.2)$$

Le mouvement horizontal \mathbf{v}^k , la hauteur h^k et le débit \mathbf{q}^k de la couche k étant respectivement

donnés par :

$$h^k = p(s^k) - p(s^{k+1}), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{v}^k = (u^k, v^k) = \frac{1}{h^k} \int_{p(z=s^{k+1})}^{p(z=s^k)} \mathbf{v} dp, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{q}^k = h^k \mathbf{v}^k. \quad (7.5)$$

On rappelle aussi la définition de l'opérateur introduit dans l'équation (7.2) :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{h^k} \mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(h^k(u^k)^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h^k u^k v^k)}{\partial y} \\ \frac{\partial(h^k u^k v^k)}{\partial x} + \frac{\partial(h^k(v^k)^2)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

On introduit à présent l'hypothèse de conservation de la masse intégrée sur l'épaisseur à l'équation, plus connue sous le nom d'équation de continuité intégrée [60], en ajoutant cette équation à l'expression (7.2) on obtient un système d'équations de shallow-water indépendantes pour l'ensemble des couches $k \in [1, K]$:

$$\begin{cases} \partial_t h^k + \operatorname{div}(h^k \mathbf{v}^k) & = 0, \\ \partial_t \mathbf{q}^k + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h^k} \mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k\right) + \frac{1}{2\rho^k} \nabla_{xy} (h^k)^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f\phi \mathbf{q}^k & = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Le détail de ces calculs est donné dans l'annexe E. Les différentes variables du système sont illustrées par la figure 7.3. On fait donc l'hypothèse que le modèle dynamique est parfait, ce qui correspond au cadre méthodologique d'assimilation à contrainte forte sur la dynamique présenté dans la section 3.2.1 du chapitre 3. Il est important de noter que ce système d'équations décrit la dynamique de quantité physiques exprimées en unités standards. Des facteurs de dimensions doivent être introduits lorsque l'on discrétise les équations sur une grille image où les vitesses sont exprimées en pixels par intervalle de temps entre deux images, et les pressions en hecto Pascal.

Comme 1 pixel représente Δx mètres et une image correspond à Δt secondes, les densités ρ^k exprimées en Pascal secondes carrées par mètres carrés ($Pa \ s^2/m^2$) doivent être multipliées par le facteur de dimensionnement $10^{-2} \Delta x^2 / \Delta s^2$. Le facteur de Coriolis exprimé en seconde doit quant à lui être multiplié par Δt .

Il s'écoule 15 minutes entre deux acquisitions successives des satellites Météosat Seconde Génération, donc $\Delta t = 900$ secondes. Enfin, le terme $\frac{1}{2\rho^k} \nabla_{xy} (h^k)^2$ de l'expression 7.7 à la même amplitude que les autres termes pour $\Delta x \geq 25$ km. Ceci est en accord avec les hypothèses de shallow-water. Étant donné qu'un pixel correspond à 3 km, le rééchantillonnage des images satellitaires sera donc fait par un facteur 8 dans nos applications.

7.4.2 Modèle adjoint

Le modèle adjoint peut être exprimé analytiquement. En notant λ_h^k et λ_q^k les deux composantes de la variable adjointe λ^k de la couche k , on obtient (voir [94] pour de plus amples détails) :

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda_h^k + \mathbf{v}^k \cdot (\mathbf{v}^k \cdot \nabla) \lambda_q^k - \frac{h^k}{\rho^k} \operatorname{div}(\lambda_q^k) & = R^{-1}(h_{obs}^k - h^k), \\ -\partial_t \lambda_q^k - (\mathbf{v}^k \cdot \nabla) \lambda_q^k - (\nabla \lambda_q^k) \mathbf{v}^k - \nabla \lambda_h^k + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} f\phi \lambda_q^k & = 0, \\ \lambda_h^k(t_f) & = 0, \\ \lambda_q^k(t_f) & = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

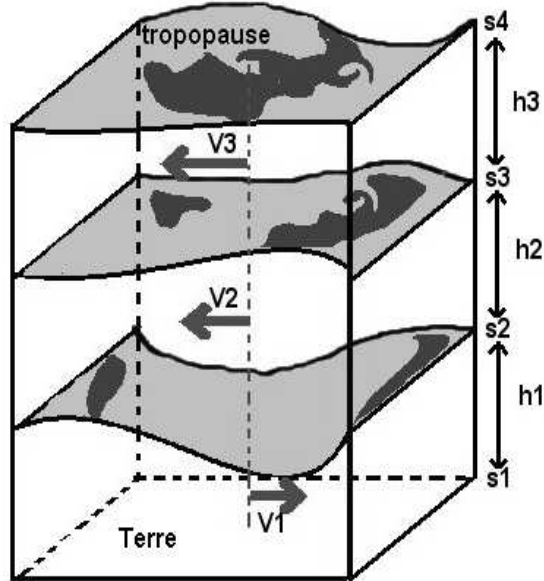


FIG. 7.3: Décomposition de l'atmosphère en 3 couches de différences de pressions. Une couche k est délimitée par ses surfaces inférieure s^k et supérieure s^{k+1} . Pour chaque couche, on considère l'épaisseur h^k et la vitesse moyennée sur cette épaisseur v^k .

7.4.3 Discrétisation des équations

La mise en œuvre d'un tel système dynamique est assez complexe. Des schémas de discrétisation similaires à ceux utilisés dans le chapitre 5 pour l'estimation de mouvement ont donc été considérés. Puisque l'on est ici en présence d'une équation de convection, et non plus d'une équation d'advection-diffusion (comme l'équation de vorticité-vitesse dans la section 5.4.2), nous avons considéré le schéma de discrétisation proposé dans [176].

On se place dans le cas général d'une équation de convection bidimensionnelle d'une variable $X \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\partial_t X + (f(X))_x + (g(X))_y = 0,$$

où f et g sont deux fonctions dérivables de $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$. La reconstruction des valeurs prises par la variable X sur les frontières des cellules constitu es par les pixels est r alis e par une méthode du second ordre incluant un limiteur *Min-Mod* sur la grille spatiale régulière $(i\Delta_x, j\Delta_y)$:

$$X_{i+\frac{1}{2},j}^+ = X_{i+1,j} - \frac{\Delta_x}{2}(X_x)_{i+1,j} \quad \text{et} \quad X_{i+\frac{1}{2},j}^- = X_{i,j} + \frac{\Delta_x}{2}(X_x)_{i,j},$$

$$\text{avec } (X_x)_{i,j} = \text{Minmod} \left(2 \frac{(X_{i,j} - X_{i-1,j})}{\Delta_x}, \frac{X_{i+1,j} - X_{i-1,j}}{2\Delta_x}, 2 \frac{(X_{i+1,j} - X_{i,j})}{\Delta_x} \right),$$

$$\text{et } \text{Minmod}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \inf_i(x_i) & \text{si } x_i \geq 0 \quad \forall i, \\ \sup_i(x_i) & \text{si } x_i \leq 0 \quad \forall i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs intermédiaires $X_{i,j+\frac{1}{2}}^+$ et $X_{i,j+\frac{1}{2}}^-$ sont calculées de la même manière. Le schéma centré semi-discret suivant est alors utilisé pour calculer le terme convectif [105, 106] :

$$\partial_t X_{i,j} = -\frac{H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) - H_{i-\frac{1}{2},j}^x(t)}{\Delta_x} - \frac{H_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t) - H_{i,j-\frac{1}{2}}^y(t)}{\Delta_y}, \quad (7.9)$$

avec un flux de convection numérique dérivé du flux monotone de Lax-Friedricks :

$$\begin{aligned} H_{i+\frac{1}{2},j}^x(t) &= \frac{f(X_{i+\frac{1}{2},j}^+(t)) + f(X_{i+\frac{1}{2},j}^-(t))}{2} - \frac{a_{i+\frac{1}{2},j}^x(t)}{2} [X_{i+\frac{1}{2},j}^+ - X_{i+\frac{1}{2},j}^-], \\ H_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t) &= \frac{g(X_{i,j+\frac{1}{2}}^+(t)) + g(X_{i,j+\frac{1}{2}}^-(t))}{2} - \frac{a_{i,j+\frac{1}{2}}^y(t)}{2} [X_{i,j+\frac{1}{2}}^+ - X_{i,j+\frac{1}{2}}^-], \end{aligned} \quad (7.10)$$

où les vitesses locales $a_{i+\frac{1}{2},j}^x$ et $a_{i,j+\frac{1}{2}}^y$ sont données par :

$$\begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2},j}^x &= \max \left(\Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial X}(X_{i+\frac{1}{2},j}^+(t)) \right), \Lambda \left(\frac{\partial f}{\partial X}(X_{i+\frac{1}{2},j}^-(t)) \right), 0 \right), \\ a_{i,j+\frac{1}{2}}^y &= \max \left(\Lambda \left(\frac{\partial g}{\partial X}(X_{i,j+\frac{1}{2}}^+(t)) \right), \Lambda \left(\frac{\partial g}{\partial X}(X_{i,j+\frac{1}{2}}^-(t)) \right), 0 \right), \end{aligned} \quad (7.11)$$

où $\Lambda(\cdot)$ désigne l'ensemble des valeurs propre d'une matrice (ici les matrices Jacobiennes $\frac{\partial f}{\partial X}$ et $\frac{\partial g}{\partial X}$). L'intégration temporelle est une nouvelle fois réalisée par une méthode de Runge-Kutta de rang 3 et le pas de temps dt utilisé vérifie :

$$dt \max \left(\max_X \left\| \frac{\partial f}{\partial X}(X) \right\|, \left\| \frac{\partial g}{\partial X}(X) \right\| \right) \leq \frac{1}{8},$$

pour que le schéma respecte la propriété de Diminution de la Variation Totale [106].

7.5 Système d'optimalité

Le contrôle des conditions initiales du système (7.7) $h^k(t_0)$ et $\mathbf{q}^k(t_0)$ est effectué grâce aux variables de contrôle η_h^k et $\eta_{\mathbf{q}}^k$:

$$\begin{cases} h^k(t_0) = h_0^k + \eta_h^k, \\ \mathbf{q}^k(t_0) = \mathbf{q}_0^k + \eta_{\mathbf{q}}^k. \end{cases} \quad (7.12)$$

En faisant l'hypothèse que ces variables sont de faible énergie, on est conduit à minimiser la fonctionnelle suivante pour chaque couche k :

$$J_k(\eta_h^k, \eta_{\mathbf{q}}^k) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|h_{obs}^k - h^k(\eta_h^k, \eta_{\mathbf{q}}^k)\|_{R^k(t)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\eta_h^k\|_{B_h^k}^2 + \frac{1}{2} \|\eta_{\mathbf{q}}^k\|_{B_{\mathbf{q}}^k}^2. \quad (7.13)$$

Les matrices $B_h^{(k)}$ et $B_{\mathbf{q}}^{(k)}$ sont les matrices de covariance associées aux fonctions de contrôle initiales η_h et $\eta_{\mathbf{q}}^k$.

Les observation h_{obs}^k portent directement et uniquement sur les différences de pression, l'opérateur d'observation est donc ici donné par $\mathbb{H} = [Id, 0]$, puisque l'on souhaite suivre le vecteur

d'état $[h^k, \mathbf{q}^k]^T$ et que l'on n'observe que la différence de pression h^k . Ceci signifie que la correction sur le mouvement ne sera effectuée que sur la base des observations de différence de pression. L'inverse de la matrice de covariance $R_k(t)$ peut être directement défini en utilisant le masque d'observation des données C^k :

$$R_k^{-1}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, t) = \begin{cases} = \alpha & \text{si } \mathbf{s} \in C^k(t), \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (7.14)$$

où α est un paramètre à fixer qui définit la pondération apportée par la covariance des observations. Comme les cartes de mesure de pression sont éparées, une matrice constituée de 9 diagonales a été utilisée afin de diffuser l'information dans le voisinage 3x3 des pixels où les observations sont disponibles.

Nous pouvons à présent définir tous les ingrédients de ce système d'assimilation de données. La variable d'état considérée pour chacune des couches $k \in [1, K]$ est donc composée de la hauteur et du débit horizontal : $X^k = [h^k, \mathbf{q}^k]^T$. Le modèle dynamique $\mathbb{M}(h^k, \mathbf{q}^k)$ est donné par l'équation (7.7). Enfin, l'opérateur adjoint $(\partial_{X^k} \mathbb{M})^*$, associé à la variable adjointe $\lambda^k = [\lambda_h^k, \lambda_{\mathbf{q}}^k]^T$, est donné par l'équation (7.8). Pour chaque couche $k \in [1 \dots K]$, le processus d'assimilation peut finalement être résumé par le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} \partial_t X^k + \mathbb{M}(X^k) = 0, \\ X^k(t_0) = X_0^k + \eta, \\ \lambda^k(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda^k + (\partial_{X^k} \mathbb{M})^*(\lambda^k) = \mathbb{H}^T R_k^{-1}(h_{obs}^k - \mathbb{H}X^k), \\ \partial_{\eta_h^k} J_k = -\lambda_h^k(t_0) + B_h^{(k)-1}(h^k(t_0) - h_0^k), \\ \partial_{\eta_{\mathbf{q}}^k} J_k = -\lambda_{\mathbf{q}}^k(t_0) + B_{\mathbf{q}}^{(k)-1}(\mathbf{q}^k(t_0) - \mathbf{q}_0^k), \end{cases} \quad (7.15)$$

où les deux dernières équations correspondent à la mise à jour des conditions initiales $X^k(t_0) = [h^k(t_0), \mathbf{q}^k(t_0)]^T$ en tenant compte des matrices de covariances associées à l'incertitude des conditions initiales. Comme aucune garantie de convergence vers un minimum global n'est assurée pour une fonctionnelle non convexe, la qualité des résultats dépend des conditions initiales données aux variables du système. Nous avons choisi d'initialiser les variables h_0^k comme des surfaces plates dont la hauteur est la moyenne des hauteurs observées sur la couche. La valeur initiale du mouvement \mathbf{v}_0^k est obtenue par un algorithme de flot optique dédié à l'estimation de champs atmosphériques par couche [84] décrit dans l'état de l'art du chapitre 5. Ces deux éléments permettent d'initialiser la variable d'état du système $\mathbf{q}_0^k = h_0^k \mathbf{v}_0^k$.

7.6 Résultats

7.6.1 Expériences synthétiques

Pour effectuer une évaluation qualitative de la mise en œuvre du système, nous avons réalisé une simulation numérique du modèle dynamique de shallow-water (7.7). Des conditions initiales réalistes sur la fonction de pression $h(t_0)$ et le mouvement $\mathbf{q}(t_0)$ ont été choisies afin de produire une séquence synthétique de 10 images de cartes dense de pression $h_{réel}$. Cette séquence a ensuite été détériorée par différents niveaux de bruits et masquée afin de produire des observations cohérentes avec le type de données satellitaires dont on dispose habituellement.

Un banc test de quatre jeux de données a ainsi été formé. Les deux premières séquences expérimentales, nommées e_1 et e_2 sont composées d'observations denses, en unités hecto-pascal (hPa), dégradées par des bruits gaussiens de variances respectives 10% et 20% de l'amplitude de la pression simulée $h_{\text{réel}}$. Une carte de classification réelle (utilisée dans l'expérience réelle suivante) a ensuite été utilisée afin d'extraire des régions des données expérimentales e_1 et e_2 et créer deux nouvelles séquences synthétiques e_3 et e_4 à la fois bruitées et masquées (voir la figure 7.4).

Pour initialiser les variables de notre système, nous avons dégradé le mouvement moyen réel $\mathbf{q}(t_0)$ par un bruit gaussien, et nous avons utilisé une surface plate pour h_0 . Une analyse qualitative de l'estimation couplée de mouvement et de pression réalisé par assimilation de données images de pression est présentée dans le tableau 7.1.

	Masqué	Bruit %	EQM h_{obs} (hPa)	EQM final h (hPa)	EQM initial $ \mathbf{v}(t_0) $ (pixel/images)	EQM final $ \mathbf{v}(t_0) $ (pixel/images)
e_1		10	15.813880	5.904791	0.22863	0.03457
e_2		20	22.361642	8.133384	0.21954	0.05078
e_3	x	10	15.627055	6.979769	0.22351	0.04978
e_4	x	20	22.798671	10.930078	0.21574	0.05944

TAB. 7.1: **Évaluation numérique.** Diminution de l'Erreur quadratique moyenne (EQM) des estimations h et $|\mathbf{v}(t_0)|$ pour l'assimilation d'images bruitées (expériences e_1 , e_2 , e_3 et e_4) et éparées (expériences e_3 et e_4).

Pour toutes les expériences réalisées, l'Écart Quadratique Moyen (EQM) entre l'estimation finale et la vérité terrain est systématiquement inférieur à l'Écart Quadratique Moyen entre les observations et cette même référence. Le système d'assimilation développé utilise donc l'ensemble des observations bruitées pour produire un résultat final plus proche de la réalité. De plus, avec les expériences e_3 et e_4 , ce tableau montre la capacité de la méthode à traiter des observations incomplètes, ce qui est très encourageant pour les applications réelles où les observations sont seulement disponibles sur les masques fournis par EUMETSAT.

Afin d'illustrer la capacité de la technique à reconstituer des cartes denses de pressions à partir d'observations bruitées, nous présentons dans la figure 7.4, un exemple de reconstruction d'une carte h . Cette carte ayant été initialisée comme une surface plate, on voit que la méthode a réussi à tirer le maximum des observations (colonnes b) afin de produire des estimations finales (colonne c) beaucoup plus proches de la réalité (colonne a).

7.6.2 Séquence d'image météorologique

Nous abordons maintenant l'application du système à une séquence d'images satellitaires météorologiques réelles. Ces données sont composées de 10 images fournies par un satellite METEOSAT de seconde génération (MSG), montrant la pression du haut des nuages avec la classification correspondante de ces nuages. Ces images sont de taille 1024×1024 pixels et couvrent le nord de l'océan Atlantique au court de la journée du 5 juin 2004, avec un intervalle de

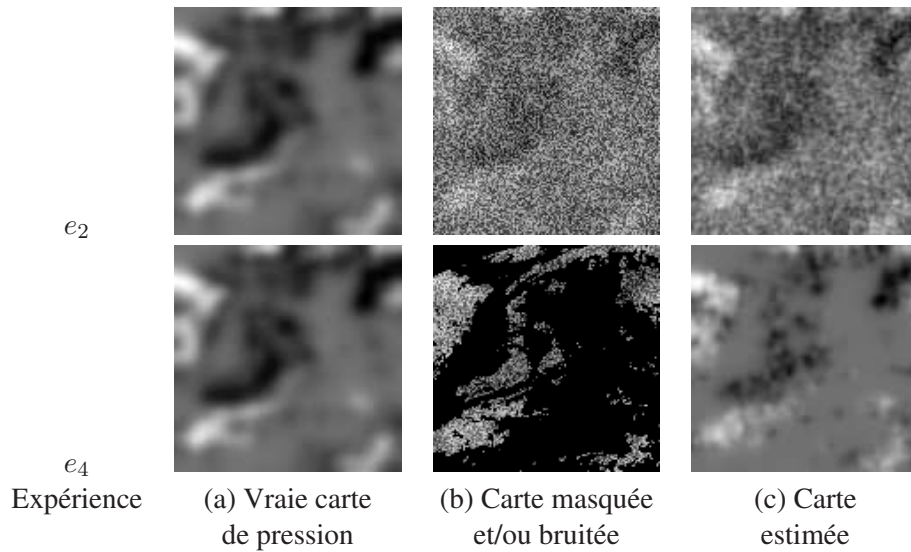


FIG. 7.4: **Séquences atmosphériques synthétiques** : Résultats pour les expériences e_2 et e_4 , où la carte de différences de pression ont été bruitée et/ou masquée .

temps d'acquisition de 15 minutes. La résolution spatiale d'un pixel est de l'ordre de 3×3 km au centre de l'image (ce n'est pas la même partout à cause du phénomène de projection de la sphère terrestre sur le plan image). La classification nuageuse fournie par EUMETSAT permet de créer 3 couches correspondant aux nuages bas, intermédiaires et hauts de l'atmosphère. Afin de rendre compatible la résolution des données et celle du modèle, les images originales ont d'abord été sous-échantillonnées pour former des images 128×128 correspondant à l'échelle de validité de notre modèle dynamique.

En appliquant la méthode proposée aux images de basse résolution, les mouvements horizontaux et les épaisseurs des 3 couches sont estimés. Les champs de vent ainsi obtenus sont surimposés aux cartes de pression originales dans la figure 7.5 pour chacune des 3 couches. Les champs de mouvement estimés pour les différentes couches sont cohérents avec les déplacements visibles des nuages au cours de la séquence. En particulier, les mouvements sont très différents entre les couches, ce qui est un résultat très réaliste que peuvent difficilement obtenir des techniques classiques d'estimation de mouvement. Dans le coin en bas à gauche des images par exemple, la couche basse montre un courant de direction nord-sud tandis que la couche intermédiaire se déplace vers le nord. Enfin, la cohérence temporelle des mouvements estimés démontre tout l'intérêt que peut avoir cette nouvelle méthode d'estimation spatio-temporelle sous contraintes physiques.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour l'estimation de champs de vents horizontaux par couches dans l'atmosphère à partir d'images satellitaires de pression du sommet des nuages. Cette technique d'assimilation, reposant sur un modèle de shallow-water par couches, a été validée sur des images synthétiques, puis testée sur une séquence réelle.

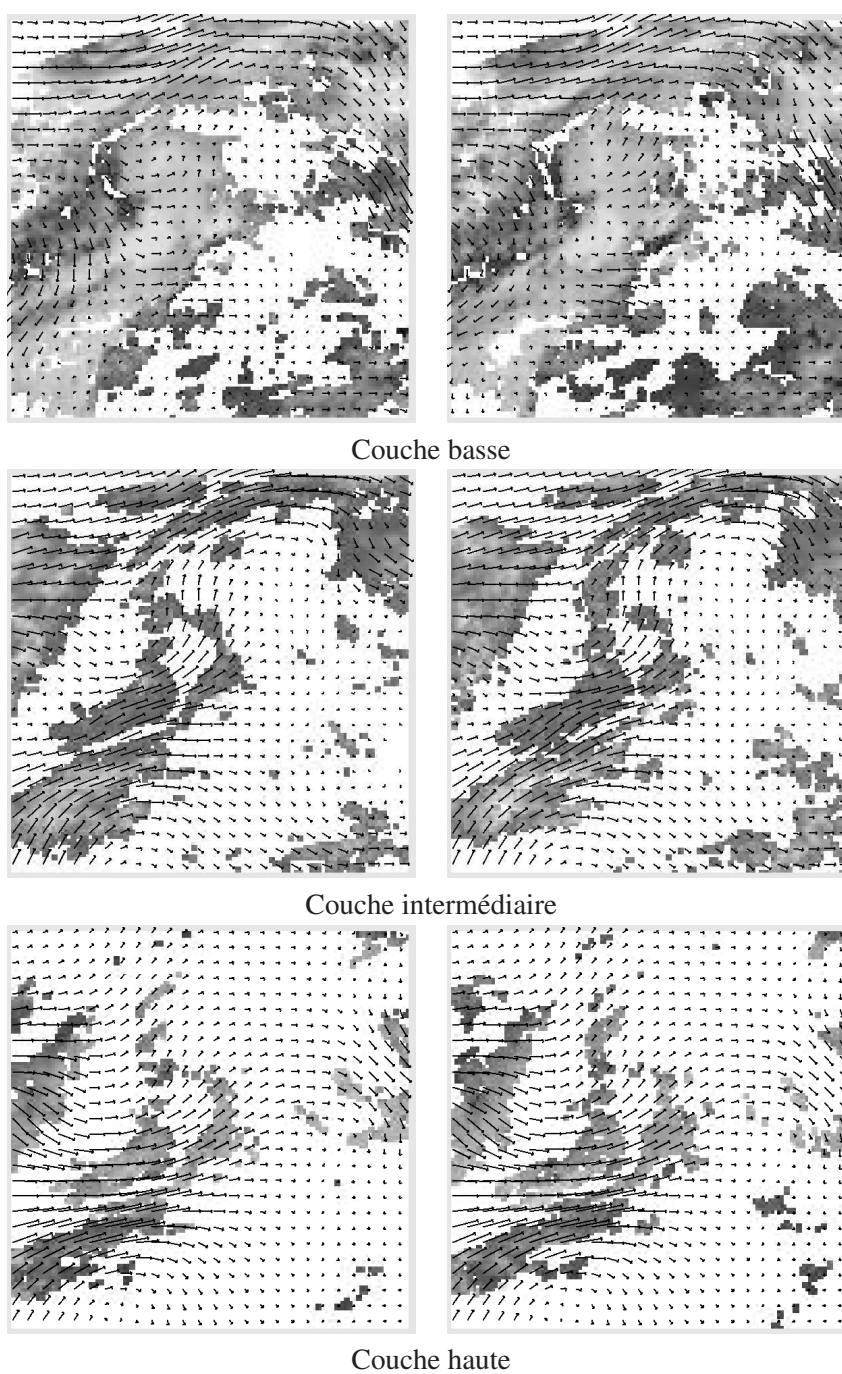


FIG. 7.5: Assimilation d'images de pression : Première (à gauche) et dernière (à droite) estimations de champs de vents horizontaux surimposés aux cartes d'observations de différences de pression

L'hypothèse d'incompressibilité du modèle dynamique est cependant une contrainte forte, il serait donc intéressant de considérer des erreurs modèles correspondant aux conditions limites entre couches.

L'intégration des données images en temps qu'observations de structures déformables dans un modèle complet 3D reste une étape encore lointaine. Il est en effet difficile de créer un opérateur d'observation liant des phénomènes physiques de grandes échelles 3D avec des images 2D de déformations de nuages qui sont parfois des traceurs passifs de phénomènes plus locaux. Citons par exemple les nuages dit lenticulaires, situés en montagne, qui restent statiques quelque soit la force du vent les traversant. L'utilisation de la pleine résolution des observations reste ainsi limitée à l'échelle de validité du modèle dynamique. Ce problème pourrait être résolu en considérant un modèles imparfait valable à l'échelle de la résolution des images.

Une autre idée pourrait être de considérer des modèles dynamiques réduits, qui s'adaptent sans doute mieux à l'interaction avec les images. Afin d'illustrer ce propos, nous allons à présent nous intéresser à la mécanique des fluides expérimentale pour voir comment, à partir d'une séquence d'image représentant un écoulement, un modèle physique simplifié de cet écoulement peut être reconstruit pour permettre de re-simuler le phénomène artificiellement.

Chapitre 8

Suivi de systèmes dynamiques d'ordre réduit

8.1 Introduction

La simulation numérique des équations de Navier-Stokes a été largement étudiée au sein de la communauté de mécanique des fluides. Avec les différents outils développés dans ce domaine, il est désormais possible de reproduire ou prédire diverses caractéristiques de certains écoulements avec précision. Le coût de calcul de ces expériences numériques devient cependant très important lorsque l'on considère des modèles turbulents ou les petites échelles des écoulements.

Depuis quelques années, plusieurs pistes de recherche visent à contourner le problème en utilisant des systèmes dynamiques d'ordre faible. Le but de ces approches est moins ambitieux qu'une simulation numérique complète. Il s'agit en effet de capturer et représenter les caractéristiques essentielles de l'écoulement. Ces méthodes cherchent donc seulement à décrire les structures cohérentes de la dynamique en sacrifiant les petites échelles et les détails de l'écoulement.

Dans les applications de contrôle d'écoulement, ces modèles simples ont un intérêt majeur. Les structures cohérentes peuvent être amplifiées en produisant d'importantes modifications des caractéristiques de l'écoulement, comme c'est le cas lors de la séparation de couches, la dislocation de vortex, la transition vers la turbulence, etc... Un autre champ d'application des systèmes dynamiques réduits concerne les problèmes d'optimisation de coût de calcul, où l'on cherche à éviter la répétition de simulations pour différentes initialisations ou pour des nombres de Reynolds légèrement différents. Travailler avec des systèmes dynamiques réduits précis et adaptés devrait permettre d'accélérer les simulations dans ces cas. Ces modèles sont très utiles en mécanique des fluides expérimentale. Ils permettent en effet d'organiser et d'interpréter des réalisations expérimentales afin d'extraire des modèles de ces données.

Une manière classique d'obtenir des systèmes dynamiques réduits est la décomposition orthogonale propre (Proper Orthogonal Decomposition, notée POD), aussi connue comme la décomposition de Karhunen-Loève, la décomposition en valeurs singulières, ou l'analyse en composante principale.

La POD a été introduite dans le contexte de la turbulence par Lumley (1967) [118]. Cette

technique a été utilisée par de nombreux auteurs (un état de l'art peut être trouvé dans [92]) pour obtenir des descriptions approchées de grandes échelles ou de structures cohérentes dans des écoulements laminaires ou turbulents.

Sans aucune hypothèse *a priori* sur le phénomène, une décomposition POD fournit une représentation de l'écoulement en terme de moyenne et de combinaison linéaire de fonctions de bases, ou modes, ordonnées de manière décroissante en fonction de leur énergie cinétique. L'estimation de la base vectorielle POD, s'appuie sur un ensemble de réalisations de champs de vitesse de l'écoulement $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ qui peuvent être obtenus par simulation ou expérimentalement à partir de séquences d'images. Dans le second cas, on utilise alors des techniques d'estimation de mouvement, telles que la PIV (pour Particle Image Velocity) ou le flot optique, pour obtenir les réalisations de l'écoulement.

La POD a ainsi été proposée pour de nombreuses situations en dynamique des fluides : les couches de cisaillement [155], les transitions aux frontières des couches [157], les frontières de couches turbulentes [9], les écoulements dans un canal [61], les écoulements autour d'un cylindre circulaire [61], les écoulements dans des cavités [40], etc. Les modèles POD extraits de mesures expérimentales sont cependant soumis à des problèmes d'instabilité numérique.

Ces instabilités proviennent principalement de l'évaluation de produits internes et de dérivées sur la grille éparse des réalisations expérimentales. Une première solution couramment utilisée consiste à rajouter des forces artificielles dissipatives [29, 30]. Une approche reposant sur l'identification polynomiale a aussi été proposée [29, 151, 152]. Les coefficients des systèmes dynamiques ne sont dans ce cas pas estimés directement par projection des données sur les fonctions de base POD, mais à l'aide d'une estimation aux moindres carrés sur les données expérimentales.

Nous proposons ici d'améliorer ce type de solution en utilisant les principes de l'assimilation de données. Dans la section suivante, nous rappelons les principes de base régissant la construction d'une représentation POD d'une série de champs de vitesse observés. L'obtention de systèmes dynamiques réduits à partir de la base POD extraite est ensuite présentée dans la section 8.3. Dans la section 8.4, nous décrivons le procédé expérimental utilisé ainsi que les premiers résultats obtenus par identification polynomiale. Deux techniques sont finalement proposées, à partir des concepts d'assimilation, pour l'identification des coefficients des systèmes dynamiques réduits dans la section 8.5. Les résultats obtenus avec ces schémas sont présentés et étudiés dans la section 8.6.

8.2 Décomposition Orthogonale Propre

8.2.1 Base orthogonale propre

La technique de décomposition orthogonale en modes propres a été utilisée par différents auteurs pour obtenir une description des grandes échelles ou des structures cohérentes d'écoulement laminaires ou turbulents. On considère un écoulement expérimental visualisé au travers d'une séquence d'images. Une séquence de champs de mouvement est extraite de ces images par une technique quelconque. En pratique, ce sont des méthodes de corrélation PIV (pour Particle Image Velocity) qui sont utilisées. Nous invitons le lecteur à se reporter à la section 5.2.1.2 pour plus de

détails.

On dispose ainsi d'un ensemble de champs de vitesse $\mathbf{v}(x, t_i), i \in [1 \cdots M]$, d'un même écoulement expérimental pour M temps discrets différents. La POD fournit alors les fonctions de bases orthogonales, ou *modes*, $\varphi_i(x)$, optimaux vis-à-vis d'une représentation de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement. Cette décomposition permet d'écrire le champ de vitesse comme une moyenne $\bar{\mathbf{v}}$ avec une fluctuation portée par un ensemble fini de modes :

$$\mathbf{v}(x, t) = \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^M a_i(t) \varphi_i(x). \quad (8.1)$$

L'énergie cinétique de ces champs est supposée finie ($\mathbf{v} \in L^2$) et le produit interne des fonctions de base, noté $(,)$ est défini dans $L^2(\Omega)$:

$$(\mathbf{v}, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \varphi d\mathbf{x}, \quad (8.2)$$

où Ω représente le domaine spatial de l'image. Chercher un sous-espace tel que la projection de $\mathbf{v}(x, t_i)$ soit optimale au sens de l'énergie cinétique moyenne de l'écoulement revient à trouver un ensemble de fonctions qui maximise :

$$\frac{\langle |(\mathbf{v}, \varphi)|^2 \rangle}{(\varphi, \varphi)},$$

où $\langle \bullet \rangle$ désigne la moyenne temporelle de l'argument \bullet . Il peut être démontré [92] que les fonctions optimales solution φ satisfont également le problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varphi_k(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (8.3)$$

où K est la matrice d'autocorrélation des vitesses :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}', t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{v}(\mathbf{x}', t_i).$$

Comme la résolution temporelle est souvent bien inférieure à la dimension spatiale, il est numériquement plus facile de suivre la méthode dite des "snapshots" proposée par Sirovich [164]. Cette technique part du fait que chaque mode spatial φ peut être construit par une superposition des champs de vitesse expérimentaux :

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_i) a_k(t_i).$$

En projetant (8.3) sur un champ instantané $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_j)$, on obtient un autre problème de valeurs propres, dont des vecteurs propres sont les modes temporels a_k :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) a_i(t) = \lambda_i a_i(t), \quad \forall i = 1 \cdots M.$$

La matrice $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ étant symétrique définie positive, toutes ses valeurs propres sont positives :

$$\lambda_i \geq 0, \forall i = 1 \dots M.$$

En classant les modes par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0,$$

les premiers modes correspondent à la plus grande contribution dans l'énergie totale de l'écoulement. Il a par ailleurs été démontré que la base POD est optimale au sens de la reconstruction de l'énergie cinétique moyenne [69]

Lorsque le champ instantané $\mathbf{v}(x, t_i)$ contient des vecteurs erronés, un post traitement des modes peut être réalisé par des techniques telles que les schémas itératifs [68] ou la Gappy POD [57, 175] pour le cas particulier des données PIV.

8.3 Formulation d'un système dynamique d'ordre réduit

À partir de la décomposition modale précédente, il est possible de considérer un modèle tronqué avec s modes pour approcher le champ de vitesse $u(x, t_i)$, avec $x \in \Omega$, $1 \leq i \leq M$ et $s \ll M$. Le choix du nombre de modes considérés est fait sur la base du pourcentage énergétique minimal α à conserver :

$$\frac{\sum_{i=1}^s \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} > \alpha.$$

Dans nos applications, un nombre réduit de modes (< 10) permet de restituer plus de 90% de l'énergie cinétique. Une projection de Galerkin permet ensuite de réécrire le système d'équations différentielles partielles (EDP) décrivant l'évolution de l'écoulement comme un système d'équations différentielles ordinaires (EDO). Cette projection permet de définir l'équation d'origine sur un sous-espace de dimension finie de l'espace des phases (le sous-espace engendré par les s premiers modes).

Afin d'avoir une expression explicite des quantités fluctuantes, les équations de Navier Stokes sont projetées sur les s premiers modes spatiaux en suivant le schéma proposé par Rajae, Karlsson et Sirovich [155] :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}' \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \nabla \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{v}' \nabla \mathbf{v}'} + \frac{\nabla p'}{\rho} - \nu \Delta (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \quad , \quad \varphi_j \right) = 0. \quad (8.4)$$

Ces équations sont obtenues en décomposant les champs de vitesse en une partie moyenne $\bar{\mathbf{v}}$ et une composante fluctuante \mathbf{v}' : $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$. En réécrivant (8.4) sous la forme d'une décomposition aux valeurs propres (8.1), l'équation résultante est une EDO quadratique d'ordre 1. Pour tout modes $j \leq s$, le système est :

$$\frac{da_k}{dt} = i_k + \sum_{i=1}^s l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=i}^s a_i c_{ijk} a_j \quad k = 1 \dots s \quad (8.5)$$

où

$$l_{ij} = \int_{\Omega} \bar{u} \nabla \varphi_i \varphi_j d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \bar{v} \varphi_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \Delta \varphi_i \varphi_j d\mathbf{x}, \quad (8.6)$$

$$c_{ijk} = \int_{\Omega} \varphi_j \nabla \varphi_i \varphi_k d\mathbf{x}, \quad (8.7)$$

$$i_k = \int_{\Omega} \nabla p' \varphi_k d\mathbf{x} - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \bar{u} \varphi_k d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^s \lambda_j \int_{\Omega} \varphi_j \nabla \varphi_j \varphi_k d\mathbf{x}. \quad (8.8)$$

La relation (8.6) décrit l'interaction entre l'écoulement moyen et le champ fluctuant et inclut le terme de viscosité. Les effets non linéaires sont portés par (8.7). Le terme indépendant (8.8) prend en compte la dissipation de l'écoulement moyen, la contribution convective des modes et l'influence des champs de pression. Les conditions aux bords et la symétrie annulent le terme de pression dans le cas particulier des écoulements de sillage. En effet, chaque fonction modale satisfait l'équation de continuité pour donner :

$$\int_{\Omega} \nabla p' \varphi_k d\mathbf{x} = \oint_C p' \varphi_k dc,$$

où C est la courbe frontière du domaine Ω . Les travaux de Deane [61] et Noack [133] démontrent que dans la configuration des écoulements de sillage, cette dernière expression est négligeable par rapport aux autres termes. Néanmoins, l'inclusion du terme p' peut être modélisée en ajoutant une expression quadratique des modes temporels $a_k(t)$, réalisée par identification polynomiale. Une version bruitée de l'équation des moments (8.5) peut aussi être considérée pour gérer le terme p' . Cette situation sera la base des travaux de couplage entre POD et assimilation décrits dans la section 8.5. Avant cela, nous allons décrire la méthode d'identification polynomiale permettant d'éviter le calcul direct des termes du système (8.5).

8.4 Gestion des observations

8.4.1 Obtention des modes

La configuration expérimentale mise en place pour ce travail consiste en un écoulement autour d'un cylindre circulaire avec un Reynolds bas, $Re = 125$. Les mesures de mouvement ont été réalisées dans un tunnel de vent à circuit fermé avec une sonde de $18 \times 18 \text{ cm}^2$. Un cylindre de 2 cm de diamètre y a été placé. Une caméra Pixelfly PCO VGA avec une résolution spatiale de 640×240 pixels et temporelle de 1/100 seconde entre chaque image a été utilisée. Comme les fréquences de disparition des vortex sont inférieures à la fréquence d'acquisition de la caméra utilisée, les données obtenues permettent donc de retrouver la dynamique de l'écoulement.

Bien que la technique ne nécessite aucune corrélation entre les données, cette condition nous permet de valider notre modèle. Un ensemble de 1000 images a alors été utilisé pour construire le modèle d'ordre réduit. Ces données ont été filtrées par la technique Gappy [57] et les champs de vitesse fluctuants ont été décomposés par POD. Comme souhaité, les premiers modes concentrent la plupart de l'énergie cinétique fluctuante. La figure 8.1 montre que les modes spatiaux extraits par la décomposition représentent les structures récurrentes de l'écoulement. On peut ainsi observer que les structures avec de plus amples fluctuations d'énergie cinétique paraissent les plus organisées en temps.

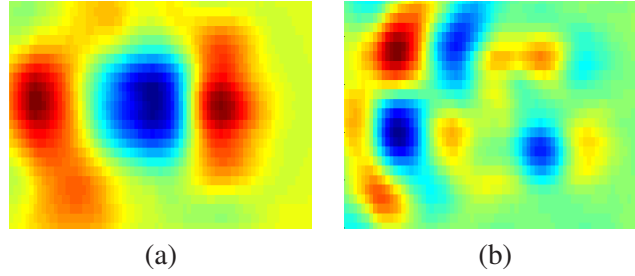


FIG. 8.1: **Représentation de la vorticité des modes spatiaux** : (a) $\varphi_1(\mathbf{x})$. (b) $\varphi_3(\mathbf{x})$. Le premier mode spatial contient de grandes structures cohérentes tandis que le troisième mode représente de plus petites échelles de l'écoulement.

8.4.2 Identification polynomiale des coefficients des systèmes dynamiques réduits

Un problème commun des modèles d'ordre réduit concerne la modélisation des modes non résolus de l'écoulement. Bien que l'on ait un modèle permettant de représenter la plupart des structures énergétiques associées aux grandes échelles, les plus petites échelles doivent aussi être incluses car elles ont un rôle important dans le processus de dissipation. Les mises en œuvres réalisées montrent que lorsque l'on néglige les petites échelles, le système (8.5) peut seulement être résolu pour un intervalle temporel court. Ce problème a été soulevé par Holmes *et al.* [92].

Trouver une trajectoire des modes temporels des systèmes dynamiques réduits sur des intervalles de temps plus longs est donc une piste de recherche très intéressante. Une première solution proposée par Braud [29, 30] consiste à estimer les coefficients polynômiaux des systèmes dynamiques réduits par régression linéaire. En disposant de chaque observation a_i et de sa dérivée \dot{a}_i , on peut écrire les coefficients I , L et C de la relation (8.5) comme les solutions d'un système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & a_i(t_1) & \cdots & a_i(t_1)a_j(t_1) & \cdots \\ & & & \cdots & & \\ & & & & & \\ 1 & \cdots & a_i(t_M) & \cdots & a_i(t_M)a_j(t_M) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \cdots & I_s \\ \cdots & & \\ L_{i1} & \cdots & L_{is} \\ \cdots & & \\ C_{ij1} & \cdots & C_{ijs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_1(t_1) & \cdots & \dot{a}_s(t_1) \\ \cdots & & \\ \dot{a}_1(t_M) & \cdots & \dot{a}_s(t_M) \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

Cette technique d'identification polynomiale présente l'avantage considérable d'éviter de calculer précisément les dérivées spatiales des fonctions de bases nécessaires à la construction du modèle projeté (8.6-8.8). On peut aussi souligner que même si les paires d'observations $a_i(t_k)$ et $a_i(t_{k+1})$ sont nécessaires au calcul des dérivées temporelles de (8.5), ces paires ne doivent pas nécessairement être corrélées [92].

À partir de cette interpolation de I , L et C et des valeurs initiales des $a_k^{obs}(t_0)$, une intégration de Runge Kutta peut être effectuée pour simuler les trajectoires des $a_k(t)$.

Premiers résultats Pour ces premières expérimentations, nous avons choisi de garder seulement $s = 2$ modes, afin de conserver 91% de l'énergie cinétique. Les coefficients de l'équation (8.5)

ont été estimés par une identification polynomiale. La solution correspondant au modèle réduit estimé est tracée sur la figure (8.2a), où l'on a également dessiné les données d'origine ayant servi à l'interpolation. Bien que ce modèle soit assez précis sur un temps court, des erreurs importantes en amplitude et en phase apparaissent rapidement. Ces erreurs augmentent avec le temps, et la solution n'est pas valide sur une période entière de l'écoulement. De plus, pour un nombre de modes plus grand, la solution ne converge plus, comme on peut le voir sur la figure (8.2b), où le résultat obtenu pour 4 modes a été tracé. Afin d'améliorer l'estimation des modes temporels, nous allons à présent utiliser les principes de l'assimilation de données.

8.5 Assimilation des systèmes dynamiques réduits

8.5.1 Assimilation des trajectoires des modes temporels

Ces premiers travaux, développés dans [58], utilisent l'assimilation de données pour améliorer l'estimation des coefficients des modèles réduits. La technique se déroule en deux étapes : les trajectoires des modes temporels sont tout d'abord assimilées. Dans un second temps les coefficients du modèle réduit sont réestimés au moyen d'une identification polynomiale sur les trajectoires assimilées. Le problème direct est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} + \mathbb{M}(a(t)) = w(t), \\ a(t_0) = a_0 + \eta. \end{cases} \quad (8.10)$$

La partie droite de la première équation décrit, à travers un opérateur différentiel \mathbb{M} , l'évolution de la variable d'état $a(t) = [a_1(t) \cdots a_s(t)]$ regroupant les modes temporels de la décomposition orthogonale propre et définis sur l'intervalle temporel $[t_0; t_f]$. L'opérateur \mathbb{M} est ainsi donné par l'équation (8.5) :

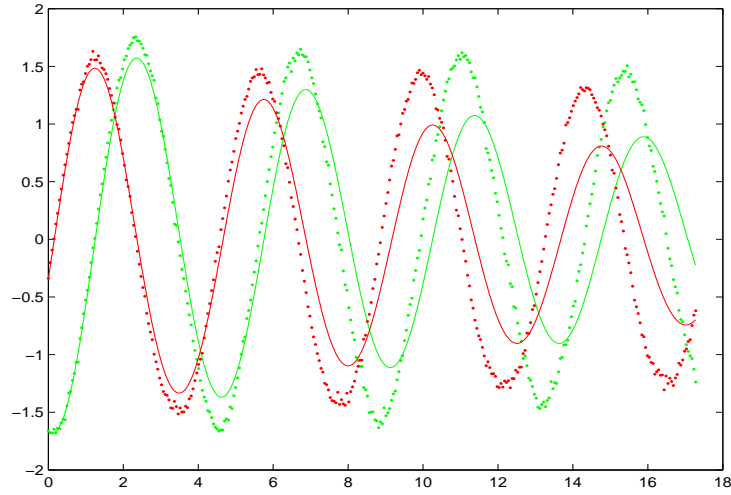
$$\frac{da_k(t)}{dt} = i_k + \underbrace{\sum_{i=1}^s l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_i c_{ijk} a_j}_{-\mathbb{M}(a_k)} + w_k(t) \quad k = 1, \dots, s. \quad (8.11)$$

On suppose ici que le modèle d'évolution est défini à une fonction de contrôle w_k près. Cette fonction va permettre de modéliser les effets des modes non résolus. Nous verrons également que l'inclusion de cette fonction d'incertitude conduit à une solution plus précise, valide sur un intervalle de temps plus long. Il s'agit donc d'un problème d'assimilation sous contrainte dynamique faible comme défini dans la section 3.2.2 du chapitre 3.

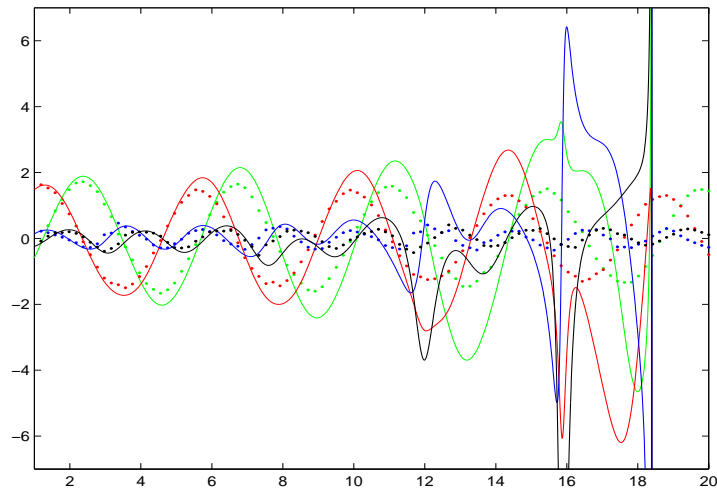
La seconde équation du système (8.10) fixe (à une fonction de norme minimale η près) la condition initiale de l'état à partir d'une initialisation a_0 donnée. A partir de ce système, on va donc chercher à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J_4(w, \eta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^s \|a_k^{obs}(t) - a_k(t, w, \eta)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^s \|w_k(t)\|_Q^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \|\eta_k\|_B^2,$$

où les mesures bruitées $a^{obs}(t)$ sont données par les modes temporels estimés à partir des champs instantanés PIV par la POD. La mesure au temps initial $a^{obs}(t_0)$ est utilisée pour fixer l'initialisa-



(a)



(b)

FIG. 8.2: **Première estimation des coefficients du système dynamique réduit.** Comparaison entre l'estimation (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. (a) Simulation avec $s = 2$ modes. (b) La solution diverge pour les systèmes tels que $s \geq 4$ modes.

tion a_0 . Le système d'optimalité associé est :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} + \mathbb{M}(a(t)) = w(t), \\ a(t_0) = a_0 + \eta, \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_a \mathbb{M})^* \lambda(t) = R^{-1}(t)(a^{obs}(t) - a(t)), \\ \partial_\eta J_4 = -\lambda(t_0) + B^{-1}(a(t_0) - a_0), \\ \partial_w J_4 = Q^{-1} \left(\frac{da(t)}{dt} + \mathbb{M}(a(t)) \right) - \lambda. \end{cases} \quad (8.12)$$

8.5.1.1 L'Opérateur tangent linéaire

La discrétisation de l'opérateur tangent linéaire du modèle dynamique considéré est obtenue en calculant $\partial_a \mathbb{M}(\theta)$ pour une petite perturbation $\theta(t) = [\theta_1(t) \cdots \theta_s(t)]^T$:

$$\partial_a \mathbb{M}(\theta_k) = - \left[\sum_{i=1}^s l_{ik} \theta_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (a_i c_{ijk} \theta_j + \theta_i c_{ijk} a_j) \right] \quad k = 1, \dots, s. \quad (8.13)$$

Finalemment :

$$\partial_a \mathbb{M}(\theta_k) = - \left[\sum_{i=1}^s l_{ik} \theta_i + 2 \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_i c_{ijk} \theta_j \right] \quad k = 1, \dots, s. \quad (8.14)$$

On obtient alors

$$\partial_a \mathbb{M}(\theta) = -(L + 2C)\theta. \quad (8.15)$$

où L et C sont des matrices ($s \times s$) :

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1s} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{s1} & l_{s2} & \cdots & l_{ss} \end{bmatrix}, \quad (8.16)$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s a_j c_{1j1} & \sum_{j=1}^s a_j c_{2j1} & \cdots & \sum_{j=1}^s a_j c_{sj1} \\ \sum_{j=1}^s a_j c_{1j2} & \sum_{j=1}^s a_j c_{2j2} & \cdots & \sum_{j=1}^s a_j c_{sj2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^s a_j c_{1js} & \sum_{j=1}^s a_j c_{2js} & \cdots & \sum_{j=1}^s a_j c_{sjs} \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Dans cette première approche, les trajectoires des modes temporels sont assimilées avec un modèle imparfait incorporant une fonction d'incertitude additive. Ce modèle permet de débruiter les observations tout en autorisant un degré de liberté supplémentaire dans la dynamique. Cette variable d'incertitude tente de pallier l'absence des modes tronqués ainsi que l'interaction non linéaire entre ces modes et les modes principaux considérés.

8.5.1.2 Nouveaux systèmes dynamiques réduits

À partir de ce débruitage des modes temporels, les matrices I , L et C peuvent être réestimées. On réalise ainsi une régression linéaire des moindres carrés sur les trajectoires assimilées des modes temporels. En effet, les observations initiales servant à calculer les coefficients des systèmes dynamiques réduits sont discrètes et très bruitées. Comme l'assimilation produit des trajectoires continues, le calcul des dérivées temporelles lors de la phase d'interpolation est bien meilleur.

Une fois les coefficients réestimés, une nouvelle simulation des modes temporels peut être réalisée. Les figures 8.3 et 8.4 présentent les résultats obtenus pour ce premier système d'assimilation de trajectoire et de réestimation des coefficients des systèmes dynamiques réduits à partir de la première estimation de la figure 8.2 (a). Les trajectoires assimilées sont ainsi de très bonne qualité (figure 8.3). Cependant, lorsque l'on réestime les coefficients des systèmes dynamiques réduits à partir de ces trajectoires assimilées et que l'on refait une simulation avec le nouveau modèle, on aperçoit un léger déphasage et un amortissement de l'amplitude au bout de quelques périodes (figure 8.4).

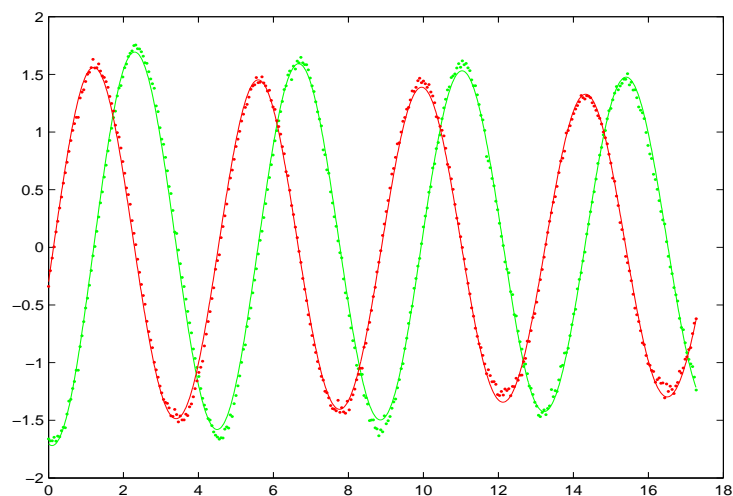


FIG. 8.3: **Assimilation des trajectoires.** Comparaison entre les trajectoires assimilées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de l'assimilation des trajectoires des 2 premiers modes.

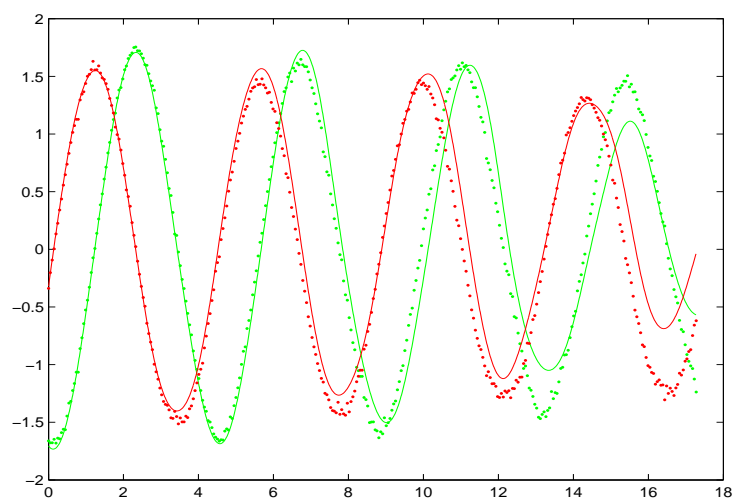


FIG. 8.4: **Réestimation des paramètres du modèle dynamique réduit.** Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de la simulation des trajectoires des deux premiers modes avec les coefficients des systèmes dynamiques réduits recalculés par régression des moindres carrés sur les trajectoires assimilées de la figure 8.3.

8.5.2 Assimilation des coefficients de modèles dynamiques d'ordre réduit

Nous allons maintenant considérer un modèle parfait et un contrôle portant sur la condition initiale $a(t_0)$ et les coefficients I_k , L_{ik} et C_{ijk} des systèmes dynamiques réduits. Le modèle dyna-

mique est désormais donné par :

$$\begin{cases} \frac{da_k(t)}{dt} = i_k + \underbrace{\sum_{i=1}^s l_{ik} a_i + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_i c_{ijk} a_j}_{-\mathbb{M}(a_k, i_k, l_{\cdot k}, c_{\cdot \cdot k})} & k = 1, \dots, s, \\ a(t_0) = a_0 + \eta. \end{cases} \quad (8.18)$$

On cherche alors à minimiser la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} J_5(\eta, I, L, C) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|a_k^{obs}(t) - a_k(t, \eta, I, L, C)\|^2 dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \|\eta_k\|_B^2 \\ &+ \frac{1}{2} \|I - I^0\|^2 + \frac{1}{2} \|L - L^0\|^2 + \frac{1}{2} \|C - C^0\|^2. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Dans ce modèle, les fonctions de contrôle sur les paramètres inconnus du modèle dynamique réduit autorisent une incertitude sur la valeur des coefficients I^0 , L^0 et C^0 obtenus soit par régression linéaire soit directement à partir des modes POD.

Dans ce cas, nous faisons face à une assimilation de données avec contrôle des paramètres du modèle, telle que décrite dans le paragraphe 3.2.1 du chapitre 3. On supposera qu'une première estimation des paramètres du modèle (I^0 , L^0 et C^0) est obtenue par la technique de régression des moindres carrés décrite précédemment. Le système adjoint correspondant est identique à l'expression (8.15). La mise à jour des variables de contrôle est telle que $\forall i, j, k \in [1 \dots s]$,

$$\begin{aligned} a_k(t_0) &= a_0 + B\lambda_k(t_0), \\ i_k &= i_k^0 + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_k(t) dt, \\ l_{ik} &= l_{ik}^0 + \int_{t_0}^{t_f} a_i(t) \lambda_k(t) dt, \\ c_{ijk} &= c_{ijk}^0 + \int_{t_0}^{t_f} a_i(t) a_j(t) \lambda_k(t) dt. \end{aligned}$$

Ce nouveau système d'assimilation permet de contrôler les coefficients du modèle réduit afin de correspondre au mieux aux observations obtenues par POD. Cette méthode présente l'avantage de donner en une seule étape la trajectoire assimilée des modes temporels et l'expression du modèle dynamique réduit.

Le système d'optimalité correspondant est donné par :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} + \mathbb{M}(a(t), I, L, C) = 0, \\ a(t_0) = a_0 + \eta, \\ \lambda(t_f) = 0, \\ -\partial_t \lambda(t) + (\partial_a \mathbb{M})^* \lambda(t) = R^{-1}(t)(a^{obs}(t) - a(t)), \\ \partial_I J_5 = I - I^0 - \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t) dt, \\ \partial_L J_5 = L - L^0 - \int_{t_0}^{t_f} a(t) \lambda(t) dt, \\ \partial_C J_5 = C - C^0 - \int_{t_0}^{t_f} a(t) a(t) \lambda(t) dt, \\ \partial_\eta J_5 = -\lambda(t_0) + B^{-1}(a(t_0) - a_0). \end{cases} \quad (8.20)$$

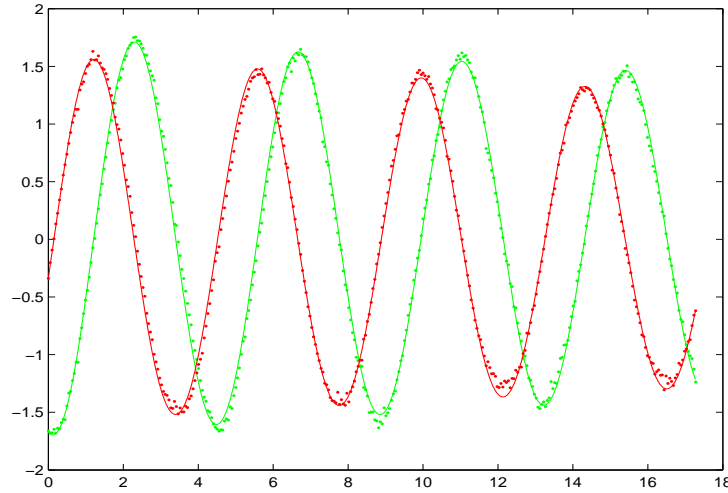


FIG. 8.5: **Assimilation des coefficients des systèmes dynamiques réduits.** Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de la simulation des trajectoires des deux premiers modes après assimilation des paramètres du modèle réduit.

La figure 8.5 présente les trajectoires des modes temporels obtenus avec un contrôle direct des coefficients du modèle dynamique. Contrairement aux résultats de la simulation réalisée après réestimation des coefficients du système dynamique réduit à partir des trajectoires assimilées des modes temporels, le résultat est ici parfaitement en phase avec les observations sur la totalité de la durée pendant laquelle l'écoulement a été observé. Il ressort de cette première expérience que le contrôle des paramètres du modèle réduit conduit à un résultat plus précis que la première méthode développée. Nous allons désormais utiliser cette technique pour des expériences plus complexes.

8.6 Résultats

8.6.1 Convergence et stabilité numérique

En se basant sur un jeu de données obtenu par PIV, la discrétisation du modèle adjoint est à présent validée grâce au test du gradient présenté précédemment dans l'équation (3.5.1) :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(a + \alpha\theta) - J(a)}{\alpha \nabla J \cdot \theta} \rightarrow 1. \quad (8.21)$$

La courbe montrant la valeur de ratio pour différentes valeurs de α est présentée dans la figure 8.6. On peut ainsi voir que la discrétisation utilisée est valide jusqu'à une variation de l'ordre de 10^{-8} . Cette borne est liée à l'accumulation d'erreurs dues aux arrondis numériques. Cette étude permet ainsi de fixer

$$\|\nabla J\| \leq \epsilon = 10^{-7}$$

comme seuil de convergence pour la méthode.

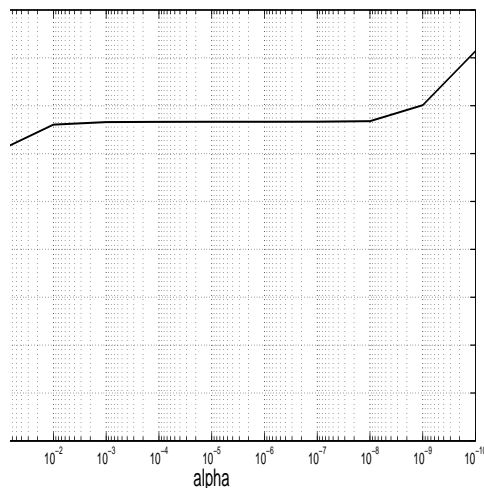


FIG. 8.6: **Test du gradient** réalisé avec $\alpha \rightarrow 0$.

8.6.2 Analyse de robustesse

Comme on a déjà pu le préciser au cours de ce document, les techniques d'assimilation de données doivent disposer d'une initialisation "acceptable" des variables d'état, puisque la fonctionnelle à minimiser est en général non convexe. Pour le cas présenté dans ce chapitre, cette initialisation correspond à un système dynamique réduit obtenu par la technique d'identification polynomiale décrite dans la section 8.4. Nous avons pu constater sur la figure 8.2 que cette méthode mène à des systèmes instables lorsque l'on considère un trop grand nombre de modes. L'introduction d'une viscosité artificielle sur le terme linéaire L (8.6) est souvent nécessaire, afin de remédier à ces instabilités. Cette technique, plus amplement détaillée dans [58], permet en effet d'amortir la solution, comme on peut le voir sur la figure 8.7.

Même si cette méthode ne permet pas d'avoir une estimation précise des modes temporels sur un cycle entier, la solution produite s'avère être une initialisation acceptable de notre système d'assimilation. Notons cependant que le choix du coefficient de viscosité artificielle est important et que des valeurs trop importantes mènent à des solutions initiales de trop mauvaises qualités.

Ainsi initialisé, le système d'assimilation conduit à une solution bien meilleure dans le temps, comme l'illustre la figure 8.8. Enfin, il est intéressant d'essayer de simuler un écoulement à long terme à partir des coefficients du système dynamique réduit obtenus par assimilation. La figure 8.9 montre que le système assimilé permet de réaliser cette simulation. La phase d'assimilation a en effet été appliquée aux 500 premiers champs PIV sur les 1000 disponibles. Les coefficients obtenus correspondants à ces 500 observations ont alors permis une simulation de l'écoulement sur un intervalle de temps deux fois plus grand. En traçant par dessus cette simulation les observations disponibles mais non utilisées, on voit que le système dynamique réduit assimilé est suffisamment précis pour relativement bien prédire ces observations.

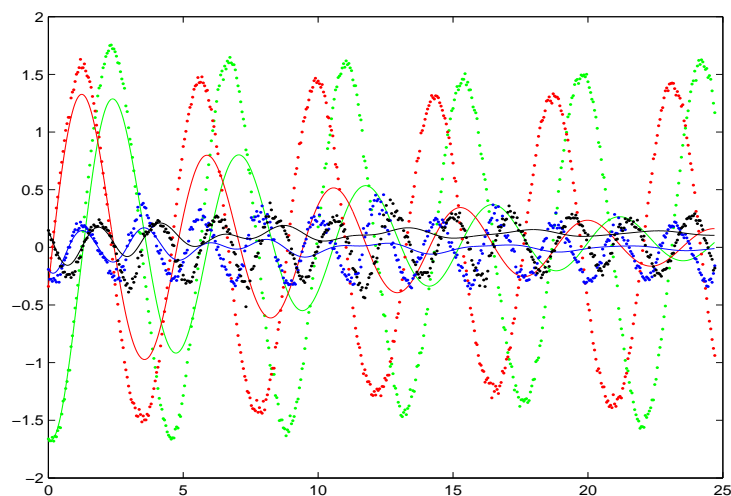


FIG. 8.7: **Solution d'un système dynamique réduit avec introduction d'une viscosité artificielle** pour $s = 4$. La solution n'explose plus mais est très amortie.

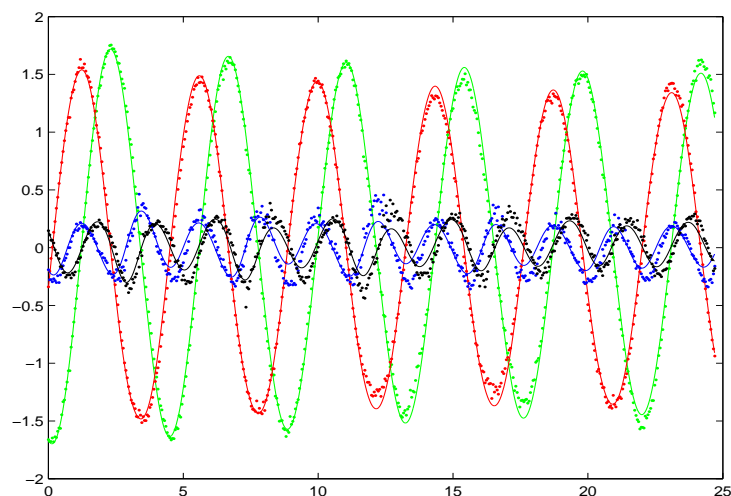


FIG. 8.8: **Trajectoires obtenues par assimilation des coefficients du système dynamique réduit** Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *).

8.6.3 Analyse de portrait de phase

Afin de préciser l'apport de l'assimilation des coefficients du système dynamique réduit, les portraits de phase des trois premiers modes temporels sont représentés dans la figure 8.10. On observe que les trajectoires sont parfaitement retrouvées à partir des observations bruitées alors que la première simulation avec les coefficients obtenus par régression linéaire des moindres carrés s'avère très rapidement imprécise. Pour illustrer la qualité de la méthode, 5 cartes de vorticité

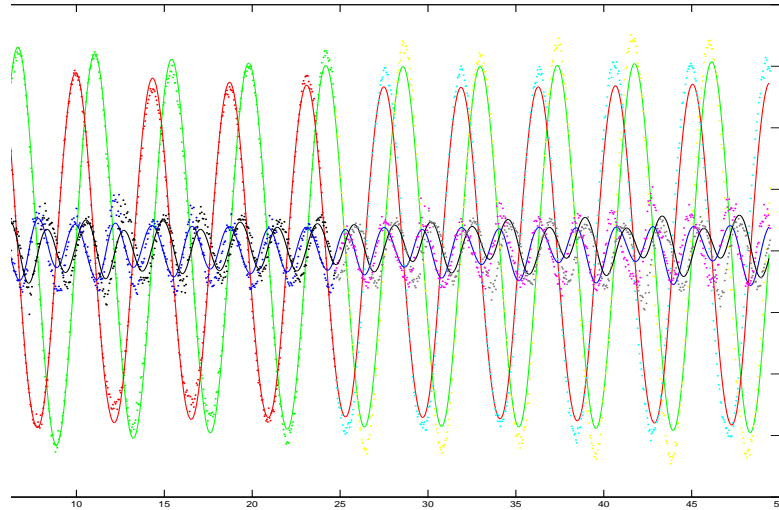


FIG. 8.9: **Comparaison de la simulation aux données non utilisées.** Les symboles * sur la seconde moitié du graphique correspondent aux données non utilisées par la phase d'assimilation.

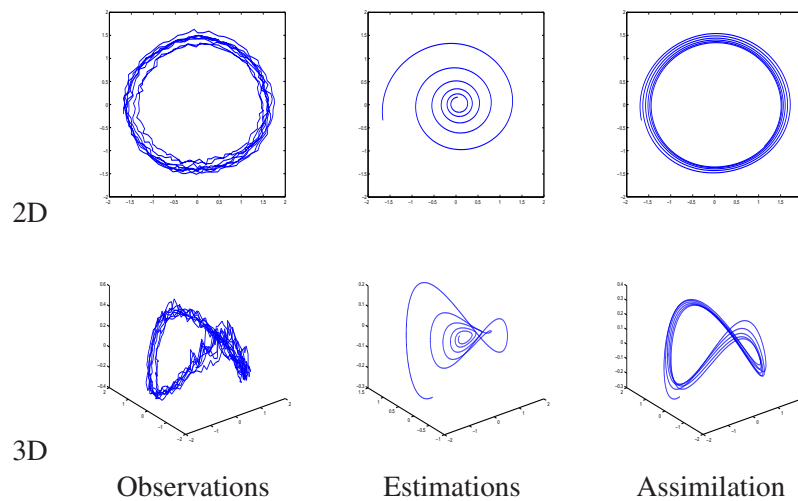


FIG. 8.10: **Portrait de phase des modes temporels**

consécutives des champs observés et reconstruits sont présentés dans la figure 8.11. La reconstruction a été réalisée avec $s = 10$ modes. On observe ainsi que les vitesses estimées sur la séquence d'images sont très bruitées, mais que le résultat obtenu après assimilation est bien plus cohérent dans le temps. Une période entière T de l'écoulement est enfin illustrée par la figure 8.12.

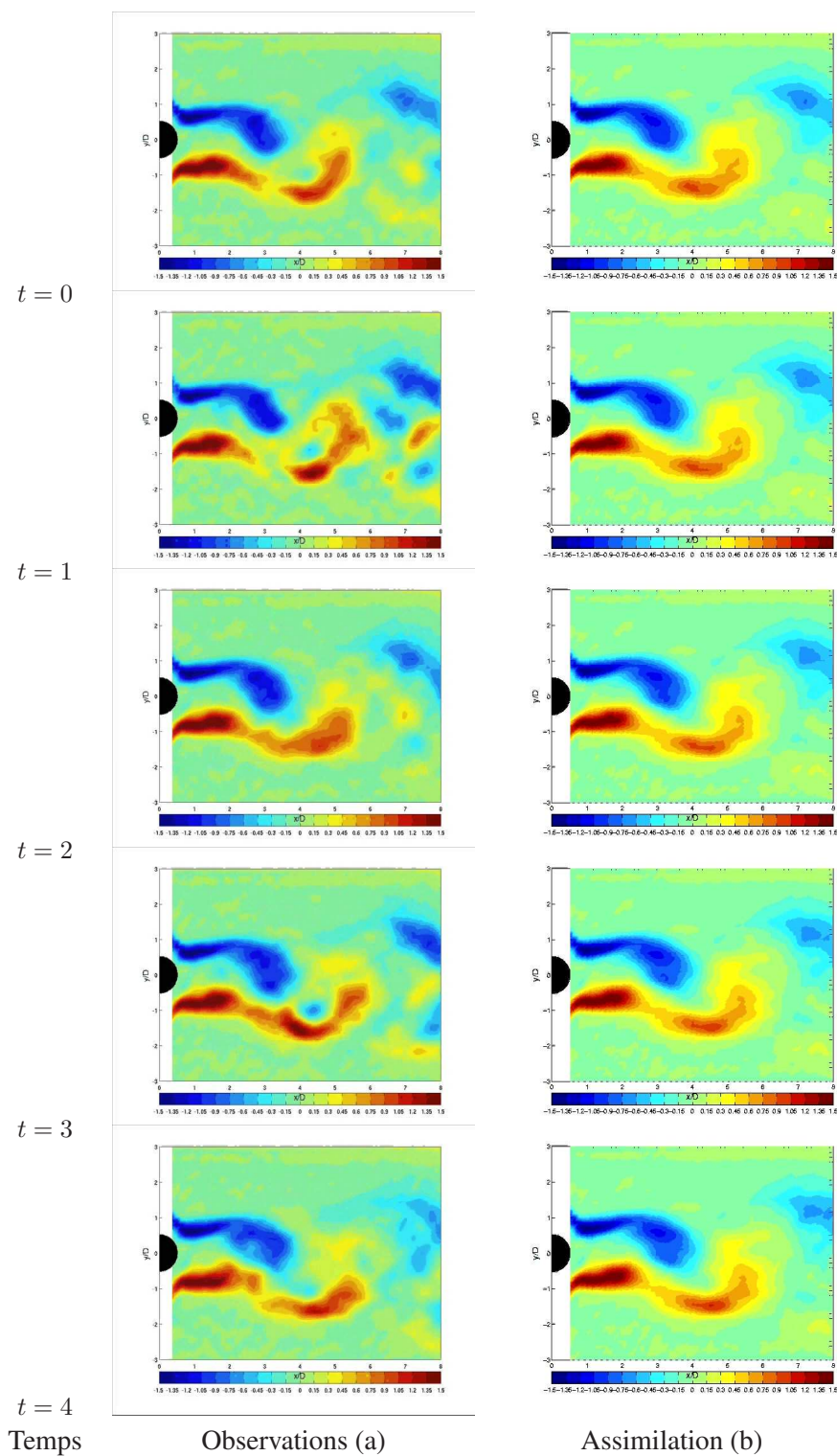


FIG. 8.11: Cinq cartes de vorticité consécutives de l'écoulement. (a) Cartes de vorticité des champs estimés sur la séquence d'image, servant de mesure au système d'assimilation. (b) Cartes de vorticité des champs reconstruits avec $s = 10$ modes.

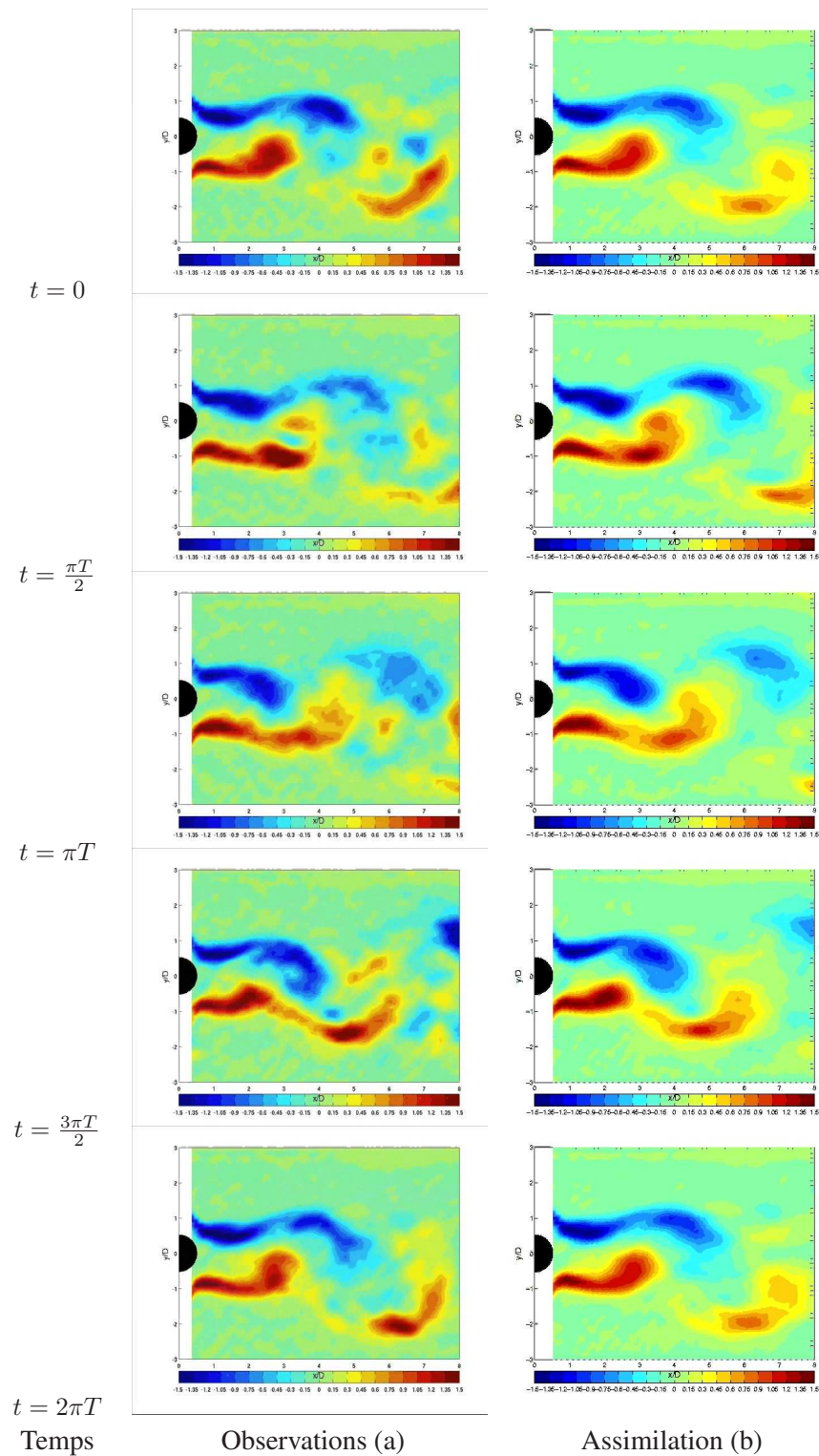


FIG. 8.12: Cartes de vorticité sur une période T de l'écoulement. (a) Cartes de vorticité des champs estimés sur la séquence d'images. (b) Cartes de vorticité des champs reconstruits avec $s = 10$ modes.

8.6.4 Analyse de la convergence

La convergence du processus d'assimilation est illustrée dans la figure 8.13. L'écart entre estimation et observation et le critère de convergence défini par (8.6.1) sont calculés expérimentalement. Chaque itération de la méthode améliore les résultats jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit rencontré. On voit ainsi que le choix $\epsilon = 10^{-7}$ est bon, puisque le critère ne franchit jamais le seuil de 10^{-8} .

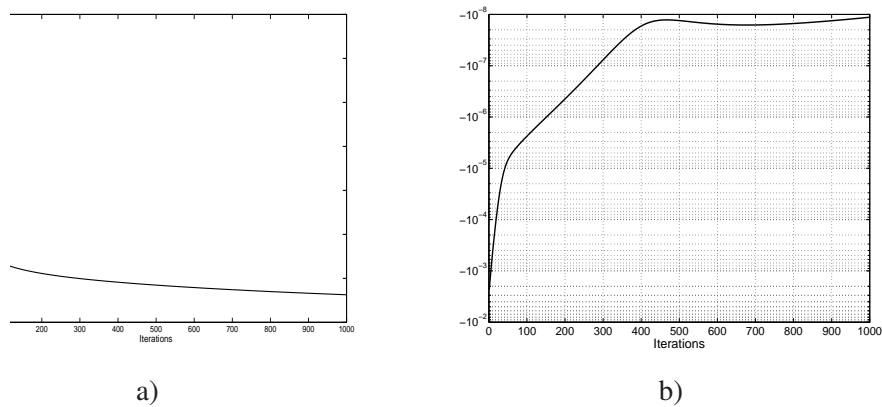


FIG. 8.13: **Étude de la convergence** : a) Évolution de l'erreur moyenne quadratique entre estimations et observations au cours des itérations de processus d'assimilation. b) Évolution du critère de convergence de l'équation (8.6.1).

Il y a en effet une erreur minimale due au bruit des observations qui ne peut pas être annulée. Cette erreur est principalement due aux observations des modes correspondant aux petites échelles. Ces modes sont en effet très bruités, comme on peut s'en apercevoir sur la figure 8.14.

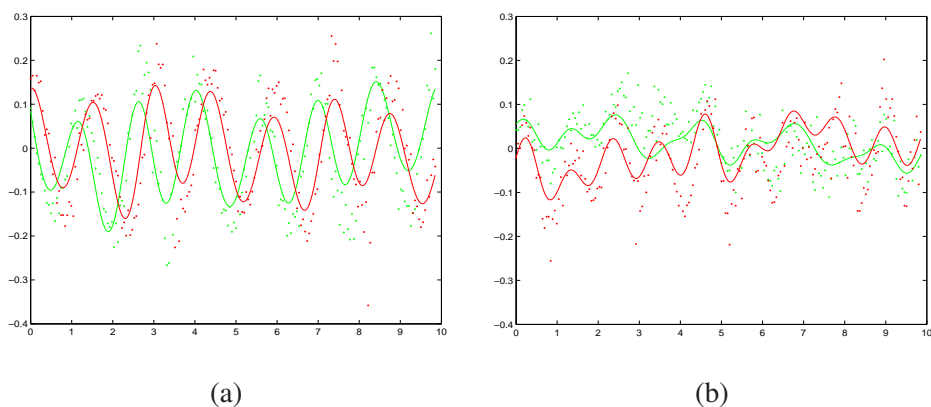


FIG. 8.14: **Trajectoires simulées des modes 5 et 6 (a) et 7 et 8 (b) après assimilation**. Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Les modes observés représentant les petites échelles sont très bruités.

8.6.5 Écoulement derrière un cylindre en rotation

On étudie à présent un nouvel écoulement situé derrière un cylindre animé d'une vitesse de rotation $g(t)$. Cette action permet d'infléchir la direction de l'écoulement sous l'effet dit de "Magnus". En appliquant une décomposition orthogonale propre et une projection de Galerkin, la loi dynamique correspondant à cet écoulement s'exprime comme suit, $\forall k \in [1 \dots M]$:

$$\dot{a}_k = I_k^1 + \sum_{i=1}^M L_{ik}^1 a_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_{ijk} a_i a_j + I_k^2 g(t) + I^3 g'(t) + \sum_{i=1}^M L_{ik}^2 g(t) a_i + I_k^4 g^2(t).$$

Les simulations initiales obtenues par régression linéaire sur les observations sont dans ce cas très mauvaises, comme l'illustre la figure 8.15. En introduisant une viscosité artificielle, les trajectoires estimées restent très mauvaises. Cette solution amortie a cependant été utilisée comme solution

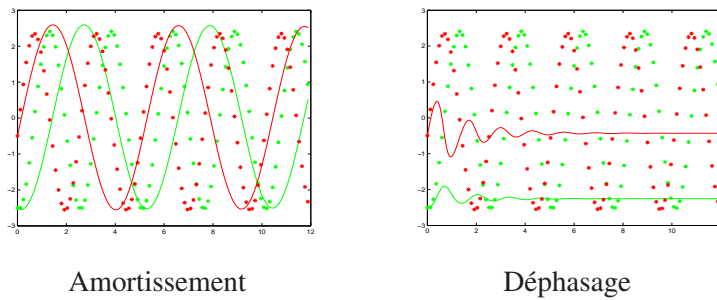


FIG. 8.15: **Premières simulations** : la qualité des premières trajectoires simulées est mauvaise.

initiale de notre système d'assimilation. Les résultats des trajectoires simulées après assimilation des coefficients du système dynamique réduit sont présentés dans la figure 8.16. On observe que les solutions finalement estimées sont également très bonnes.

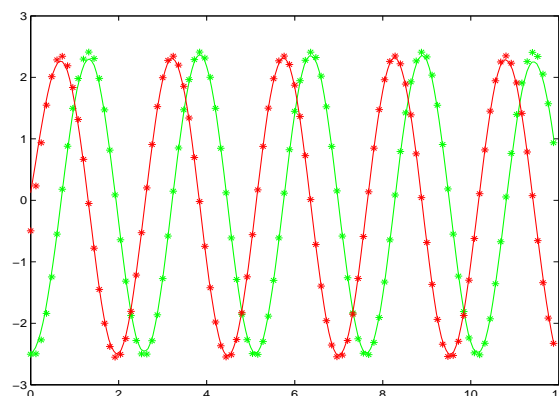


FIG. 8.16: **Trajectoires simulées après assimilation** des coefficients du système dynamique réduit.

8.6.6 Écoulement DNS 3D

Le système est à présent appliqué à un écoulement obtenu par simulation numérique directe (DNS) en 3D. Il s'agit d'un écoulement situé derrière un cylindre fixe, comme illustré par la figure 8.17. La première simulation obtenue par intégration du système dynamique réduit, dont les

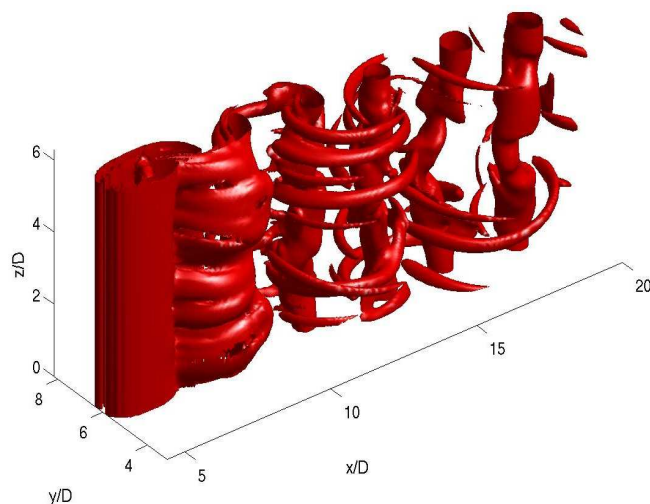


FIG. 8.17: **Module de la vorticité 3D.**

coefficients sont calculés par une régression linéaire des observations, est pr sent e dans la figure 8.18. La résolution temporelle des observations de la simulation est plus grande que dans le cas 2D, car le c ot de calcul et de stockage des données est dans ce cas gigantesque. Les résultats de

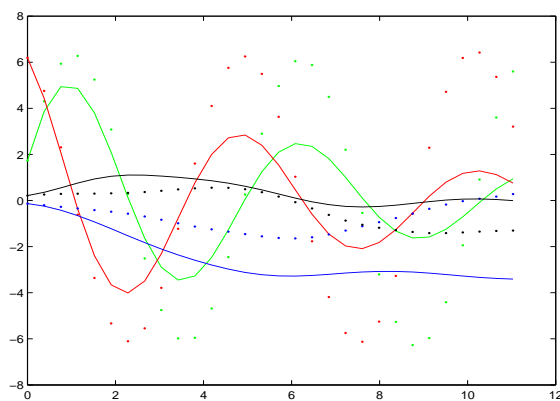


FIG. 8.18: **DNS 3D : Première simulation**   partir des coefficients du système dynamique réduit calculés par régression linéaire des observations.

la figure 8.19 montrent que le système donne toujours un système dynamique réduit de très bonne qualité.

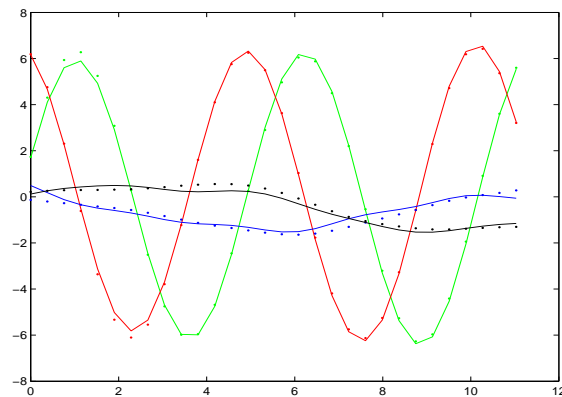


FIG. 8.19: DNS 3D : Simulation à partir des coefficients assimilés du système dynamique réduit.

8.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un système d'assimilation de données permettant d'extraire un système dynamique réduit à partir de mesures de champs de vitesse d'un écoulement. Nous avons tout d'abord assimilé les trajectoires des modes temporels de la POD, puis directement contrôlé les coefficients des systèmes dynamiques réduits. La première méthode correspond au travail publié dans [58]. Les tests réalisés sur des données PIV relativement bruitées ont démontré la robustesse et la qualité du système proposé. L'extension de la méthode au 3D a aussi été réalisée et donne des résultats prometteurs sur des données DNS 3D.

La reconstruction de systèmes dynamiques réduits précis à partir de données expérimentales est une tâche bien plus difficile que sur des données issues de simulations numériques. Contrairement aux approches définies à partir d'une identification polynomiale, l'utilisation d'un cadre d'assimilation permet la construction d'une méthode d'extraction de modèles dynamiques réduits stables et précis.

Une perspective envisageable de ces travaux est d'utiliser directement les images comme observations. Ceci permettrait en effet d'éviter les étapes coûteuses du calcul des champs de vitesse et de la décomposition POD. La décomposition en mode s'appliquerait ainsi directement aux images, et l'ensemble du modèle dynamique réduit serait calculé dans un seul et même processus d'assimilation.

Conclusion

Dans cette dernière partie, nous avons abordé des applications d'assimilation de données images à des problèmes de météorologie et de mécanique des fluides expérimentale. Concernant la météorologie, nous avons proposé une technique permettant de calculer le mouvement de couches atmosphériques à partir d'images satellitaires de pression. Cependant, d'autres types d'informations pourraient être extraits des images.

Les travaux d'estimation de mouvement sur des couches atmosphériques réalisés sont limités par la résolution des modèles physiques. On ne peut en effet considérer que les grandes échelles des écoulements et les images doivent être rééchantillonnées pour être adaptées à l'échelle de la dynamique. Des modèles dynamiques imparfaits pourraient alors être considérés afin de tirer profit de la résolution spatiale précise des images satellitaires.

Dans [94], des trajectoires de particules visualisées sur des séquences d'images sont utilisées comme observation pour contrôler un modèle de shallow-water. Il pourrait à présent être intéressant d'utiliser une information telle que la déformation des masses nuageuses pour contrôler le modèle atmosphérique par couche. Le modèle dynamique du chapitre 7 pourrait ainsi être couplé avec une représentation des nuages par un ensemble de lignes de niveau. Les informations temporelles contenues dans les séquences d'images satellitaires pourraient alors guider l'estimation des champs de vent atmosphériques.

Dans le chapitre 8, l'utilisation de l'assimilation de données pour le contrôle de systèmes dynamiques d'ordre réduit en mécanique des fluides expérimentale a été proposé. Les résultats obtenus sont très encourageants, car ils permettent de contrôler et de re-simuler un écoulement à partir d'une simple visualisation du phénomène. L'utilisation directe d'observations images permettrait de simplifier le procédé d'obtention des pseudo-observations qui est encore assez coûteux (PIV, POD, identification polynomiale).

Il sera alors nécessaire d'associer les structures cohérentes des images avec celles de l'écoulement. Pour cela, il pourra être utile de s'intéresser aux techniques de textures dynamiques développées en vision par ordinateur [18], ou à d'autres types de représentation réduite de l'écoulement comme les ondelettes [70].

Conclusion générale et perspectives

Synthèse des travaux effectués

Dans ce document, nous nous sommes intéressés aux méthodes de suivi dans des séquences d'images. Les applications développées concernent des problèmes classiques de suivi de la communauté de la vision par ordinateur ainsi que des problèmes d'estimation de champs de vitesse pour la météorologie et la mécanique des fluides expérimentale.

Les travaux réalisés se sont donc articulés autour de trois axes principaux.

Méthodes séquentielles et variationnelles de suivi

Différentes techniques de suivi ont été étudiées dans la première partie. Après un aperçu des techniques séquentielles de suivi, une extension du filtre de Kalman d'ensemble par la théorie du filtrage particulaire a été proposée. Cette technique permet de compenser les erreurs (dus principalement à des approximations gaussiennes, ou des linéarisations) des méthodes de filtrage utilisées habituellement dans les applications météorologiques ou océanographiques.

Pour gérer les problèmes de grandes dimensions, les méthodes de suivi basées sur l'assimilation variationnelle de données ont ensuite été décrites. Ces approches combinent des modèles dynamiques, habituellement supposés parfaits, avec des observations de natures diverses. Les lois dynamiques utilisées en vision par ordinateurs sont cependant souvent approchées. Afin de prendre en compte l'imperfection de nos modèles dynamiques, des fonctions d'incertitude ont été considérées dans le cadre d'une assimilation de données sous contrainte dynamique faible.

Méthodes d'assimilation de données pour la vision par ordinateur

À partir des méthodes décrites dans la première partie, des techniques de suivi pour les applications de vision par ordinateur ont ensuite été proposées. Nous avons ainsi utilisé l'assimilation de données à modèle imparfait afin de suivre des courbes et leurs champs de vitesse associés au cours de séquence d'images. Pour le suivi de courbes délimitant des objets d'intérêts dans une séquence d'images, des pseudo-observations et l'observation directe des données images ont été considérées. Nous avons ainsi défini un opérateur d'observation liant directement le contour avec l'intensité lumineuse, au moyen d'un modèle de densité de probabilités locales. L'introduction d'un cadre d'assimilation et d'un modèle de dynamique a ensuite permis de rendre le suivi robuste aux occultations partielles et totales de données.

Enfin, la dynamique des champs de vitesse fluides a été plus particulièrement étudiée et un estimateur de champ dense fluide a été proposé. Cet estimateur de champ dense lie une dynamique a

priori avec des observations images. Une nouvelle fois, des pseudo-observations de champs denses estimés par des techniques classiques ont tout d'abord été considérés, puis un opérateur d'observation liant directement le champ inconnu aux images a été développé. Les résultats obtenus montrent que, grâce à l'introduction d'un modèle de dynamique approprié, les petites échelles du mouvement peuvent être retrouvées par la méthode proposée, alors que les techniques classiques de calcul du mouvement apparent (PIV, flot optique) ne permettent d'accéder qu'aux grandes structures cohérentes d'un écoulement.

Méthodes d'assimilation de données images pour deux applications particulières

Dans la dernière partie, une méthode dédiée à l'estimation de champs de vent atmosphérique par couches pour la météorologie a été proposée. Ces travaux utilisent des données images de pression pour estimer le mouvement de systèmes physiques sous la contrainte d'un modèle dynamique parfait.

Enfin, l'assimilation de systèmes dynamiques d'ordres réduits pour la mécanique des fluides expérimentale à partir de pseudo-observations images a été réalisée. Ces derniers travaux rendent possible la re-simulation numérique d'un écoulement physique expérimental à partir d'une simple visualisation du phénomène.

Bilan

L'intégration des données images dans des systèmes d'assimilation a constitué le principal travail de cette thèse. Dans ce cadre d'étude, nous avons principalement considéré des dynamiques imparfaites. L'incertitude due à la projection de phénomènes 3D complexes sur le plan image 2D rend en effet indispensable l'utilisation de tels modèles imparfaits.

Pour guider les systèmes d'assimilation développés, nous nous sommes tout d'abord appuyé sur des pseudo-observations images fournies par des techniques classiques de vision par ordinateur (algorithmes de segmentation et d'estimation de flot optique). Nous avons ensuite systématiquement tenté de nous affranchir de l'utilisation de ces méthodes externes en créant des opérateurs de mesure permettant d'observer directement les images et leurs variations spatio-temporelles.

La mise en œuvre des méthodes proposées a nécessité de faire appel à des connaissances pluri-disciplinaires. Les techniques de vision par ordinateur utilisées (ensemble de lignes de niveaux, flot optique) ont ainsi été couplées avec des méthodes empruntées principalement au domaine de la simulation numérique d'écoulements fluides. Par ailleurs, la définition des opérateurs adjoints, indispensable à l'application de l'assimilation de données, s'accompagne parfois de quelques difficultés mathématiques. Des études physiques sur les modèles atmosphériques par couches et les représentations réduites d'écoulement ont enfin été menées.

Tous ces travaux ont été réalisés dans le cadre du Projet Européen FLUID¹ coordonné par Étienne Mémin et regroupant des équipes de recherches de mécanique des fluides (CEMAGREF), de météorologie (Laboratoire de Météorologie Dynamique) et de vision par ordinateurs (CVGPR,

¹<http://fluid.irisa.fr>

ULPGC). La collaboration entre ces différentes communautés a été source d'enseignements vis-à-vis des applications de mécanique des fluides expérimentale et de météorologie. La constitution d'une base de données images conséquente a ainsi permis de valider les méthodes proposées.

Les travaux sur les modèles réduits ont quand à eux été réalisés dans le cadre de l'Équipe Associée Fluide et Images de Mouvement entre l'équipe VISTA et le laboratoire de Fluidodinamica de la Faculté de Buenos Aires.

L'assimilation d'observation images est un sujet de recherche en pleine expansion dans plusieurs équipes de recherche françaises, notamment le projet MOISE de l'INRIA Grenoble et le projet CLIME de l'INRIA Rocquencourt. Ces travaux ont été initiés par l'Action Concertée Incitative ASSIMAGE² (désormais financé par l'Agence Nationale de la Recherche en temps que projet ADDISA³), qui a permis de rassembler des équipes de recherches d'assimilation de données et de vision par ordinateur pour le développement de nouvelles techniques combinant les connaissances des deux domaines. Cette thèse est une contribution dans cette direction, même s'il reste un long chemin à parcourir pour obtenir des systèmes industriels opérationnels.

Perspectives

Les perspectives immédiates de ces travaux de thèse portent sur un certain nombre de points, déjà évoqués dans les conclusions des parties 2 et 3.

Restauration de vidéo

Dans le domaine de la vision par ordinateur, l'assimilation de données images devrait permettre l'établissement d'un nouveau cadre méthodologique intéressant pour la restauration de films. Un plan ou une séquence serait dans ce cas utilisé dans sa globalité pour reboucher des trous causés par l'usure de pellicules. Des premiers essais rapidement réalisés et présentés dans la conclusion de la partie 2 attestent le fait qu'un lissage temporel selon une dynamique donnée par le flot optique permet de combler des zones manquantes dans des images. Ce type de technique doit également pouvoir être étendu à la reconstitution de l'arrière plan d'un scène.

Morphing

Nous avons réalisé un morphing de courbe par assimilation sur une séquence synthétique dans le chapitre 4. Nous avons aussi tenté un morphing de visage dans la conclusion de la partie 2, en assimilant chaque ligne de niveau de gris entre deux images. Ces derniers résultats ne sont pas totalement satisfaisant, car les détails sont lissés dans les visages intermédiaires créés. Notons néanmoins que les essais ont été menés sans aucun recalage préalable et que ces résultats devraient pouvoir aisément être améliorés.

Une extension de cette technique au recalage de volumes serait sans doute également intéressante à étudier.

²<http://www-rocq.inria.fr/clime/assimage>

³<http://addisa.gforge.inria.fr>

Inpainting de vidéo

Actuellement, de nombreux problèmes posés consistent à faire apparaître ou disparaître des objets ou des logos dans des images télévisées. Un post-traitement des vidéos au moyen d'une technique d'assimilation devrait pouvoir rendre possible de tels objectifs.

Certaines techniques d'inpainting ont d'ailleurs utilisé les équations physiques de Navier-Stokes pour remplir des trous de données sur une image fixe [16]. Une extension de cette approche avec la composante temporelle, dans le cas de textures dynamiques, pourrait être envisagée. L'étude de l'inpainting de textures est en effet un sujet de recherche assez récent [18]. En considérant les travaux portant sur le morphing de textures fluides [182], de nouvelles techniques devraient pouvoir voir le jour pour des applications spécifiques de textures naturelles.

Estimation de profondeur d'une scène

Les travaux réalisés sur l'estimation de mouvement à partir d'une séquence d'image peuvent ouvrir une piste de recherche assez intéressante dans le cas de scènes rigides visualisées par une caméra animée d'une dynamique simple (*i.e.* translation uniforme, rotation constante). La profondeur initiale de la scène ainsi que les paramètres dynamiques de la caméra définissent alors les paramètres du modèle dynamique que l'on va chercher à estimer par assimilation en observant la séquence d'image. Un tel modèle peut être défini en considérant les lois de projections optiques de points 3D sur une image 2D.

Bien évidemment, les zones homogènes et les objets apparaissant ou disparaissant de l'image (occultations, entrée/sortie du champ de la caméra) vont être une source de difficulté importante et devront être gérés de manière adéquate par la matrice de covariance des observations images. Nous avons réalisé quelques essais pour essayer de reconstruire la carte de profondeur de la séquence d'image Yosemite ainsi que le champ de vitesse associé. Les résultats, présentés en conclusion de la partie 2, ne sont pour le moment pas entièrement concluants et l'approche mériterait d'être plus amplement retravaillée.

Météorologie

Concernant la météorologie, l'utilisation de données images est un sujet plein de promesses. La continuation des travaux effectués porte sur deux points.

Le premier est de considérer que le modèle atmosphérique par couche, supposé parfait dans le chapitre 7, est en réalité imparfait. La gestion des erreurs du modèle devrait ainsi permettre de modéliser les échanges énergétiques entre les couches afin d'estimer les mouvements verticaux entre couches. Une équation dynamique sur ces vents verticaux sera alors nécessaire. Dans ce cadre, il faudra sans doute considérer des modèles non hydrostatique (ne négligeant pas l'échelle verticale devant l'échelle horizontale).

Le second point vise à mêler les idées du chapitre 4 sur le suivi de courbe avec celles du chapitre 7 sur l'estimation de champs de vent atmosphérique. On peut ainsi imaginer que le déplacement et les déformations de nuages visibles sur une séquence d'images satellitaires pourraient guider l'estimation de l'état d'un modèle atmosphérique.

Mécanique des fluides expérimentale

Enfin, en mécanique des fluides expérimentale, la perspective la plus immédiate consiste à essayer d'assimiler directement des systèmes dynamiques d'ordre réduit à partir de séquence d'images, sans s'appuyer sur la pseudo-observation de champs de vecteurs estimés préalablement. Cette nouvelle approche permettrait d'estimer l'ensemble des modes spatiaux et temporels de systèmes dynamiques réduits par un unique procédé d'assimilation de données images. Il faudrait pour cela mettre en parallèle les déformations de la texture de l'image et l'évolution de l'écoulement.

A cette fin, des représentations réduites différentes de la POD devraient sans doute être considérées. Nous pensons notamment aux représentations de type "ondelettes" permettant de condenser des informations. Ces méthodes sont en effet utilisées aussi bien en vision par ordinateur pour l'inpainting de textures [43] qu'en mécanique des fluides pour la représentation réduite d'écoulement [70]. Le lien entre ondelettes de texture d'images et ondelettes de structures dynamiques d'écoulement pourrait ainsi être une bonne piste d'étude.

Quelques mots pour conclure

Cette thèse s'est déroulée à la croisée de différents domaines scientifiques, les travaux réalisés et leurs perspectives sont assez variés. Je souhaite donc exprimer ma plus profonde reconnaissance à l'ensemble des personnes avec qui j'ai pu interagir durant ses trois années, et avec qui j'espère continuer de collaborer dans le futur.

Annexes

Annexe A

Équivalence filtre de Kalman et assimilation de données

On rappelle le système d'équations obtenu par les equations d'Euler-Lagrange (3.47-3.49) et (3.51-3.53) sur l'intervalle de temps $[t_0; t_f]$:

$$\lambda(\mathbf{x}, t_f) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda = \int_{\Omega, t} (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') (Y - \mathbb{H}(X)) dt' d\mathbf{x}', \quad (\text{A.2})$$

$$\lambda(\mathbf{x}, t_0) = \int_{\Omega} (B^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (X(\mathbf{x}', t_0) - X_0(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}', \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial X(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbb{M}(X(\mathbf{x}, t)) = \int_{\Omega, t} Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \lambda(\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}', \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{X}(\mathbf{x}, t_0) = X_0(\mathbf{x}), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\tilde{X}) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \delta X}{\partial t} + (\partial_{\tilde{X}} \mathbb{M}) \delta X = \int_{\Omega, t} Q(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \lambda(\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}'. \quad (\text{A.7})$$

Pour le filtre de Kalman, on considère l'intervalle de temps $[t_k; t_{k+1}]$ à la place de $[t_0; t_f]$, et l'on s'intéresse uniquement à la valeur de la variable X aux temps discrets t_k . En partant de l'état X à l'instant t_{k-1} , noté X_{k-1} , le filtre de Kalman commence par prédire $\tilde{X}(t_k)$. Cette prédiction est calculée par intégration du modèle direct :

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t_{k-1}) &= X_{k-1} \\ \partial_t \tilde{X} + \mathbb{M}(\tilde{X}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où X_{k-1} est la valeur de la condition initiale pour l'intervalle de temps $[t_{k-1}; t_k]$, avec B_{k-1} sa matrice de covariance associée. On a ainsi $\tilde{X}(t_0) = X_0$ sur le premier intervalle de temps $[t_0; t_1]$. Cette étape de prédiction fournit une solution $\tilde{X}(t)$, $\forall t \in [t_{k-1}; t_k]$. L'estimé $\tilde{X}(t_k)$ associé à la matrice de covariance \tilde{B}_k est alors corrigé par l'ensemble des observations disponibles au temps t_k , afin d'obtenir l'inconnue X_k .

Référons nous à présent à la technique d'assimilation variationnelle de données. Dans le cadre précédemment défini, la variable adjointe (3.48) au temps t_k devient :

$$-\partial_t \lambda + (\partial_X \mathbb{H})^* \lambda = \delta(t - t_k) (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(t) (Y - \mathbb{H}(X(t)))$$

Ce qui est naturellement équivalent à :

$$\lambda(t_k) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(t_k) (Y - \mathbb{H}(X_k)). \quad (\text{A.9})$$

En se servant de l'expression de la valeur de la variable adjointe au temps initial de l'intervalle d'assimilation (3.49) pour annuler le gradient de la fonction de coût, on a :

$$\lambda(t_k) = \tilde{B}_k^{-1} (X_k - \tilde{X}_{t_k}). \quad (\text{A.10})$$

En combinant (A.9) et (A.10), et en posant $R_k = R(t_k)$, on obtient :

$$\tilde{B}_k^{-1} (X_k - \tilde{X}(t_k)) = (\partial_X \mathbb{H})^* R_k^{-1} (Y - \mathbb{H}(X_k)). \quad (\text{A.11})$$

Le développement de Taylor de l'opérateur \mathbb{H} au point X_k donne alors :

$$\mathbb{H}(X_k) = \mathbb{H}(\tilde{X}(t_k)) + (\partial_X \mathbb{H})(X_k - \tilde{X}(t_k)) + o(X_k - \tilde{X}(t_k))^2.$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs à 1 (ce qui est valable dans le cas où l'opérateur \mathbb{H} est linéaire), la relation A.11 peut être réécrite :

$$\tilde{B}_k^{-1} (X_k - \tilde{X}(t_k)) = (\partial_X \mathbb{H})^* R_k^{-1} (Y - \mathbb{H}(\tilde{X}(t_k))) - (\partial_X \mathbb{H})(X_k - \tilde{X}(t_k)). \quad (\text{A.12})$$

Soit :

$$\begin{aligned} X_k &= \tilde{X}(t_k) + \left(\tilde{B}_k^{-1} + (\partial_X \mathbb{H})^* R_k^{-1} (\partial_X \mathbb{H}) \right)^{-1} (\partial_X \mathbb{H})^* R_k^{-1} (Y - \mathbb{H}(\tilde{X}(t_k))), \\ &= \tilde{X}(t_k) + K_k (Y - \mathbb{H}(\tilde{X}(t_k))), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où K_k est la matrice de Gain de Kalman :

$$K_k = \tilde{B}_k (\partial_X \mathbb{H})^* \left((\partial_X \mathbb{H}) \tilde{B}_k (\partial_X \mathbb{H})^* + R_k \right)^{-1}.$$

On retrouve donc le même résultat que dans le cadre théorique du filtre de Kalman. Il ne reste plus qu'à mettre à jour B_k à partir de \tilde{B}_k . L'équivalence entre les deux approches est donc valable pour des opérateurs linéaires.

Annexe B

Opérateur d'observation adjoint des champs fluides

La forme analytique de l'opérateur d'observation adjoint de l'équation (5.24) est ici démontrée. Dans le but d'avoir des notations plus compactes, on note $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = [\Psi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})]^T$ les *coordonnées potentielles*. Ces coordonnées sont liées aux *coordonnée div-curl*, $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}) = [\xi(\mathbf{x}), \zeta(\mathbf{x})]^T$ par la relation (5.8) :

$$\mathbf{Z} = G * \boldsymbol{\chi}, \quad (\text{B.1})$$

L'équation (5.9) s'écrit immédiatement :

$$u = \nabla^\perp \cdot \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad v = \nabla \cdot \mathbf{Z}. \quad (\text{B.2})$$

En reprenant ce qui a été fait précédemment, le champ de vecteurs \mathbf{Z} peut être décrit par la décomposition de Helmholtz comme la somme des gradients de deux fonctions scalaires. La relation (B.2) permet d'écrire les fonctions scalaires u et v comme les solutions de deux équations de Poisson. En exprimant ces solutions par le noyau de Green, le champ de vecteurs \mathbf{Z} s'écrit :

$$\mathbf{Z} = \nabla^\perp G * u + \nabla G * v = \mathbf{H}_G(\mathbf{v}). \quad (\text{B.3})$$

Notons que le même opérateur est utilisé dans les équations (5.9) et (B.3) :

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp G * \xi + \nabla G * \zeta = \mathbf{H}_G(\boldsymbol{\chi}). \quad (\text{B.4})$$

Ces notations liant la fonction de courant et le potentiel de vitesse aux vecteur vitesse, vont être utilisée pour démontrer la forme analytique de l'opérateur d'observation adjoint.

Proposition B.0.1 Soit \mathbf{v}^1 et \mathbf{v}^2 deux champs de vecteurs appartenant à $C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, où Ω est un sous ensemble borné de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\Omega$. En supposant que les composantes des champs de vecteurs admettent des conditions de Dirichlet homogènes, i.e. $u^{1,2}|_{\partial\Omega} = v^{1,2}|_{\partial\Omega} = 0$, alors $\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle = -\langle \mathbf{Z}^1, \boldsymbol{\chi}^2 \rangle = -\langle \boldsymbol{\chi}^1, \mathbf{Z}^2 \rangle$.

Preuve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle &\stackrel{(\text{B.2})}{=} \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla^\perp \cdot \mathbf{Z}^2 \\ \nabla \cdot \mathbf{Z}^2 \end{bmatrix} \\ &= u^1(\Phi_x^2 - \Psi_y^2) + v^1(\Phi_y^2 + \Psi_x^2) \\ &= -\Psi^2(v_x^1 - u_y^1) - \Phi^2(u_x^1 + v_y^1) + \underbrace{\text{Termes de bords}}_{=0} \\ &= -\langle \boldsymbol{\chi}^1, \mathbf{Z}^2 \rangle \end{aligned}$$

L'adjoint de l'opérateur tangent linéaire peut alors être exprimé comme :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle &\stackrel{(B.4)}{=} \langle \mathbf{H}_G(\boldsymbol{\chi}^1), \mathbf{v}^2 \rangle \\ &\stackrel{(5.23)}{=} \langle \partial_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{H}_G(\boldsymbol{\chi}^1), \mathbf{v}^2 \rangle \\ &\stackrel{def}{=} \langle \boldsymbol{\chi}^1, \partial_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{H}_G^*(\mathbf{v}^2) \rangle. \end{aligned} \quad (B.5)$$

La proposition B.0.1 donne :

$$\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle \stackrel{Pr}{=} - \langle \boldsymbol{\chi}^1, \mathbf{Z}^2 \rangle. \quad (B.6)$$

Finalement, en identifiant les termes des relations (B.5) et (B.6), on obtient $\partial_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{H}_G^*(\mathbf{v}^2) = -\mathbf{Z}^2 \stackrel{(B.4)}{=} -\mathbf{H}_G(\mathbf{v}^2)$, soit :

$$\partial_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{H}_G^*(\mathbf{v}) = -\mathbf{H}_G(\mathbf{v}). \quad (B.7)$$

Annexe C

Estimation du mouvement de séquences vidéo

Dans le chapitre 6, nous avons décrit l'assimilation de champs denses de mouvement pour des séquences non fluides, présentant l'évolution d'objets rigides ou déformables. Nous avons alors considéré des pseudo-observations, en utilisant des champs estimés par flot optique comme mesure. Afin de s'affranchir de cette estimation préalable du mouvement et de la même manière que pour l'estimation de mouvement fluide du chapitre 5, nous avons proposé dans [139] d'observer directement les données images.

Modèle dynamique Comme évoqué précédemment pour le suivi d'objets dans les vidéos, il est difficile de définir un modèle dynamique général décrivant l'évolution d'un objet d'intérêt dans une séquence d'images. Nous pouvons néanmoins faire l'hypothèse que, sur un petit intervalle de temps, la vitesse de chaque pixel reste constante (*i.e.* l'accélération du champ de vitesse est nulle).

En définissant le point \mathbf{x}_t comme un processus stochastique guidé par une diffusion de Ito

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}(\mathbf{x}_t) + \nu dB,$$

et en notant $g = \mathbb{E}[f(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})]$ l'espérance d'une fonction de \mathbf{x}_t connaissant \mathbf{x}_{t-1} , l'équation de Kolmogorov [135] s'écrit :

$$\partial g / \partial t = -\nabla g \cdot \mathbf{v} + 1/2\nu^2 \Delta g.$$

On considère alors le modèle dynamique suivant

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{C.1})$$

où ν est fixé, mais peut être considéré comme un paramètre de contrôle du modèle dynamique. On considère donc ici une assimilation sous contrainte dynamique forte. Cette équation fait ainsi l'hypothèse que le champ de vitesse est transporté par lui-même, à un terme d'erreur de discrétisation près. L'opérateur \mathbb{M} est alors défini par :

$$\mathbb{M}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

L'opérateur tangent linéaire au point \mathbf{v} pour une perturbation $\delta \mathbf{v}$ est donc donné par :

$$(\partial_{\mathbf{v}} \mathbb{M}) \delta \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nu \Delta \delta \mathbf{v},$$

et son adjoint $(\partial_{\mathbf{v}} \mathbb{M})^*$ est obtenu en prenant la transposée de la matrice de discrétisation correspondant à l'opérateur tangent linéaire.

Opérateur d'observation Le modèle dynamique considéré étant peu précis, nous considérons ici une équation de mesure robuste. Contrairement au modèle de mesure considéré dans le chapitre 5, où seule l'équation de contrainte du mouvement apparent était utilisée, nous ajoutons ici un terme de lissage du premier ordre. Le champ de mouvement observé \mathbf{v}_{obs} à partir de la séquence d'images $I(t)$ peut donc être exprimé par :

$$\mathbf{v}_{obs}(\mathbf{x}, t) \approx \min_{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)} \int_{\Omega} \psi_1 \left([\nabla I(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + I_t(\mathbf{x}, t)]^2 \right) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \psi_2(|\nabla \mathbf{v}_x|^2) + \psi_2(|\nabla \mathbf{v}_y|^2) d\mathbf{x}, \quad (\text{C.2})$$

où Ω représente le plan image, α un paramètre positif de lissage et ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de pénalisation robustes [21] telles que $\psi(\sqrt{y^2})$ soit concave. Une formulation quadratique pondérée de ces fonctions de coût peut être obtenue [78] :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{obs}(\mathbf{x}, t) \approx \min_{\mathbf{v}, \delta_o, \delta_u, \delta_w} \int_{\Omega} \delta_o [\nabla I(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + I_t(\mathbf{x}, t)]^2 + \psi(\delta_o) \\ + \alpha \int_{\Omega} \delta_u (|\nabla u|)^2 + \delta_w (|\nabla w|)^2 + \psi(\delta_u) + \psi(\delta_w), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où la minimisation par rapport aux variables supplémentaires (δ_{\bullet}) est explicitement donnée par la dérivée de la fonction $\psi : \hat{\delta}_{\bullet}(y) = \psi'_{\bullet}(\sqrt{y^2})$ (voir [91] pour plus de détails). Les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle précédente mènent à la relation suivante :

$$\delta_o \nabla I(\mathbf{x}, t) (\nabla I(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + I_t(\mathbf{x}, t)) - \alpha \delta_u \Delta \nabla u - \alpha \delta_w \Delta \nabla w = 0 \quad (\text{C.4})$$

L'équation de mesure du système d'estimation de mouvement est alors défini, avec $\delta_{\bullet}(x) = \psi'_{\bullet}(\sqrt{x^2})$, par :

$$\begin{aligned} Y &= -\delta_o \nabla I(\mathbf{x}, t) I_t(\mathbf{x}, t), \\ \mathbb{H}(\mathbf{v}(t), t) &= \left[\delta_o \nabla I(\mathbf{x}, t) \nabla I(\mathbf{x}, t)^T - \alpha \begin{pmatrix} \delta_u \Delta & 0 \\ 0 & \delta_w \Delta \end{pmatrix} \right] \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

L'opérateur d'observation \mathbb{H} étant linéaire par rapport à la variable d'état \mathbf{v} , l'opérateur tangent linéaire est identique : $(\partial_{\mathbf{v}} \mathbb{H}) = \mathbb{H}$. L'opérateur adjoint $(\partial_{\mathbf{v}} \mathbb{H})^*$ est donc obtenu en prenant la matrice transposée de la matrice discrétisée de l'opérateur tangent linéaire.

Le champ initial $\mathbf{v}(t_0)$ est obtenu par un algorithme multi-résolution reposant sur estimation de Horn et Schunck [125].

Résultats Cette approche a été testée sur les 10 premières images de la séquence taxi. Afin de montrer l'apport du modèle dynamique, nous avons artificiellement bruité 3 images, comme illustré dans la figure C.1(b–d). Ce type d'artéfact peut en effet apparaître lorsque l'on souhaite restaurer de vieux films. Les champs de mouvement estimés par notre approche pour les images 1, 2, 5 et 6 sont présentés sur les images (e–h). Les champs correspondant obtenus par un estimateur robuste de flot optique sans modèle dynamique [126] sont enfin présentés sur les images (i–l). On remarque que les champs estimés par notre procédé d'assimilation ne sont pas affectés par le bruit des images.

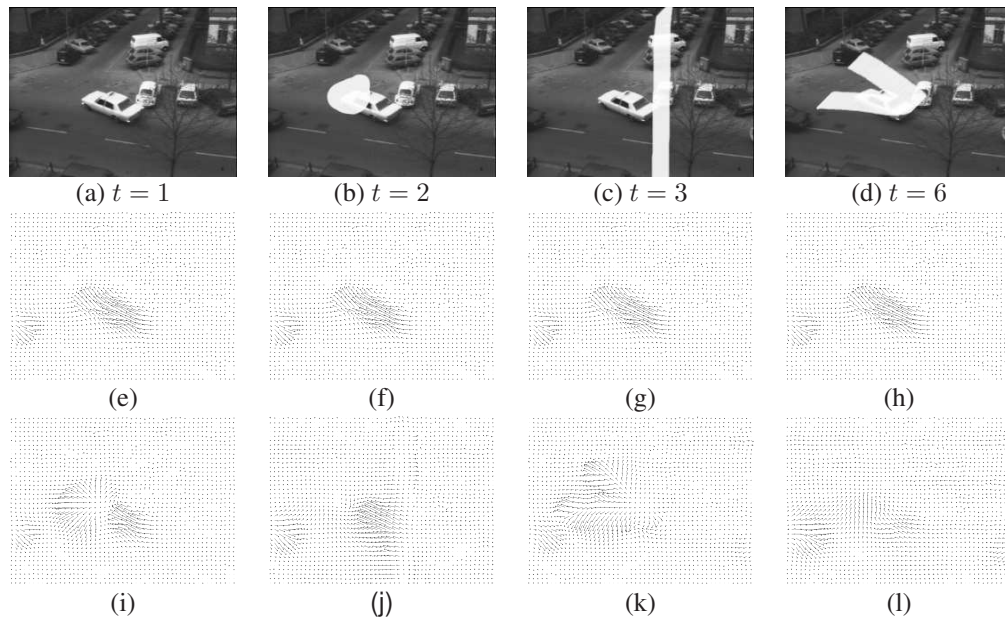


FIG. C.1: **Séquence taxi.** (a) : Image initiale. (b–d) : trois images bruitées de la séquence. Champs de vitesses entre les temps $(t = 1, t = 2)$, $(t = 2, t = 3)$, $(t = 5, t = 6)$ et $(t = 6, t = 7)$ estimés par assimilation de données images (e–h) et par flot optique sans modèle dynamique (i–l).

Annexe D

Estimation de la profondeur d'une scène

En s'appuyant la technique d'estimation de mouvement décrite dans l'annexe C, une méthode permettant de reconstruire la profondeur des scènes peut être créée. En effet, considérons une caméra mobile se déplaçant dans une scène rigide suivant un modèle dynamique simple (translation, rotation). La connaissance des paramètres de cette caméra ainsi que la distance entre la caméra et les points de la scène suffit pour calculer implicitement le flot optique de la séquence d'images. En s'appuyant sur la projection des points 3D sur une image 2D par une caméra se déplaçant à vitesse constante sur l'axe optique, le modèle dynamique de la vitesse est alors guidé par la carte de profondeur des points visualisés. Cette idée a été testée au cours de cette thèse sur la séquence Yosemite.

Modèle dynamique La séquence synthétique Yosemite a été générée par un déplacement translationnel 3D d'une caméra dans la vallée Yosemite. Dans le plan image, ce mouvement est représenté par un modèle de champ de vitesse combinant divergence et translation. Afin de modéliser précisément cette dynamique, rappelons que dans le système de coordonnées 2D \mathbf{x} , on observe $\mathbf{x} = (x, y) = (\tilde{X}/\tilde{Z}, \tilde{Y}/\tilde{Z})$, où $X = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ sont les coordonnées 3D du point correspondant. En faisant l'hypothèse d'un mouvement de translation constant de la caméra donné par le vecteur $V = (A, B, C)^T$, la vitesse $u = \dot{x}$ est donnée par

$$u = \frac{A\tilde{Z} - C\tilde{X}}{\tilde{Z}^2} = \frac{A - Cx}{\tilde{Z}}$$

et son évolution temporelle s'écrit :

$$\dot{u} = \left(\frac{A\tilde{Z} - C\tilde{X}}{\tilde{Z}^2} \right)' = \frac{(AC - CA)\tilde{Z}^2 - 2\tilde{Z}C(A\tilde{Z} - C\tilde{X})}{\tilde{Z}^4} = \frac{-2C(A - Cx)}{\tilde{Z}^2} = -\frac{2C}{\tilde{Z}}u.$$

Des calculs similaires sur la composante v mènent au modèle dynamique suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{2C}{\tilde{Z}}\mathbf{v} = 0 \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{Z}\mathbf{v} = 0, \quad (\text{D.1})$$

où $Z = 2C/\tilde{Z}$ est un paramètre de contrôle dépendant de la profondeur de la scène observée. En conséquence, le modèle dynamique est défini par

$$\mathbb{M}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), Z(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)/Z(\mathbf{x}, t),$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ représente la variable d'état du système et $Z(\mathbf{x}, t)$ est un paramètre de contrôle. En partant des conditions initiales $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0$ et $Z(\mathbf{x}, t_0) = Z_0$, le système d'assimilation va estimer l'ensemble des champs de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ et les cartes de profondeur $Z(\mathbf{x}, t)$.

Il s'agit donc d'une assimilation sous contrainte dynamique forte avec contrôle de paramètre dépendant du temps, comme on l'a défini dans la section 3.2.1.6 du chapitre 3. L'information de profondeur peut ainsi être utilisée pour des applications de reconstruction 3D.

Opérateur d'observation On fait ici l'hypothèse que l'équation de contrainte du flot optique est respectée. Le modèle de mesure est donc donné par :

$$\begin{aligned} Y &= K_n * I_t, \\ \mathbb{H}(\mathbf{v}(t), t) &= -K_n * \nabla I \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Résultats Le procédé a été initialisé avec un champ dense de mouvement \mathbf{v}_0 [48] et une surface plane Z_0 . Les résultats de l'estimation du mouvement et de la profondeur sont présentés dans la figure D.1. La gestion des zones homogènes de l'image ainsi que les occultations ou les apparitions d'objets sont néanmoins problématiques. Un effort de travail conséquent sur les matrices de covariance d'observations est encore nécessaire pour obtenir de meilleurs résultats. En effet, même si le flot optique est bien reconstruit (voir tableau D.1), la carte de profondeur (couleur noire pour les pixels les plus proches) souffre d'incohérences dues aux zones homogènes de l'image.

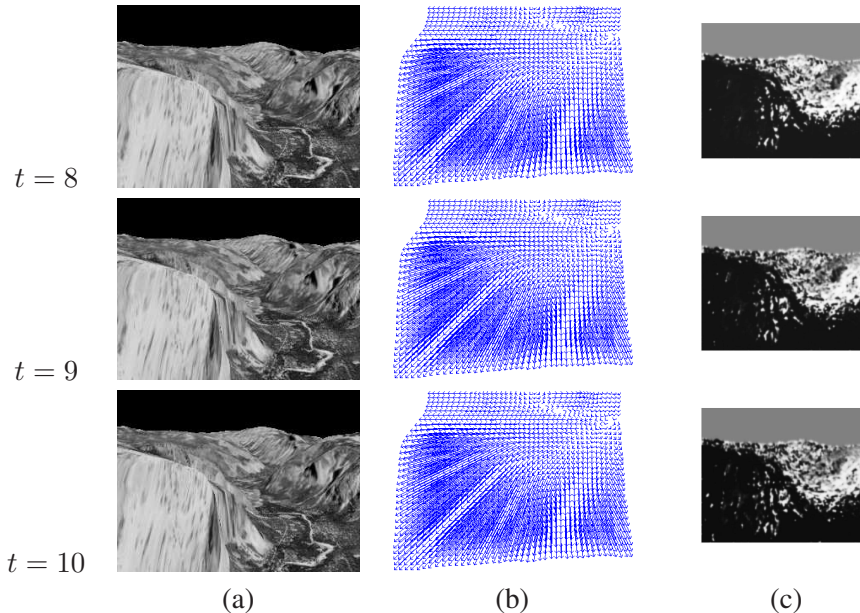


FIG. D.1: **Estimation de vitesse et profondeur.** La séquence d'images Yosemite (colonne (a)) est assimilée pour estimer simultanément le flot optique (colonne (b)) et la carte de profondeur des points (colonne (c)).

	err. #8	err. #9	err. #10
1	-	$1.99^\circ \pm 1.41^\circ$	-
2	-	$1.59^\circ \pm 1.39^\circ$	-
3	-	$1.58^\circ \pm 1.21^\circ$	-
4	-	$1.46^\circ \pm 1.50^\circ$	-
5	-	$1.14^\circ \pm 2.14^\circ$	-
6	-	$0.98^\circ \pm 1.17^\circ$	-
7	$1.23^\circ \pm 0.82^\circ$	$1.34^\circ \pm 0.89^\circ$	$1.17^\circ \pm 0.55^\circ$

TAB. D.1: **Evaluation numérique du flot optique sur la séquence synthétique Yosemite** en suivant le critère de Barron *et al* [11] pour les champs correspondants aux images (#8, #9 et #10) de la séquence. Les méthodes comparées sont : **1** : Lai & Vemuri [107]; **2** : Brox *et al* 2D [32]; **3** : Mémin & Pérez [125]; **4** : Weickert *et al* [173]; **5** : Farneäck [72]; **6** : Brox *et al* 3D [32]; **7** : Notre approche.

Annexe E

Modèle de mouvement de couches atmosphériques

Dans le but de fournir un modèle dynamique cohérent par rapport à la décomposition en couches considérée, nous nous basons sur l'approximation de shallow-water (mouvement vertical négligeable par rapport aux mouvements horizontaux) dérivé de l'hypothèse d'incompressibilité d'une couche. Cette hypothèse caractérise chaque couche $k \in [1 \dots K]$ par une densité moyenne ϱ^k . Ces densités moyennes peuvent être reliées aux pressions moyennes \bar{p}^k en intégrant verticalement la loi des gaz parfaits ($p = \varrho RT$) combinée à la relation hydrostatique ($dp = -g \int \varrho dz$), sous l'hypothèse d'un taux constant (*i.e.* une variation linéaire de la température par rapport à l'altitude : $T = T_0 + \gamma z$) où g , R , T_0 et γ sont des constantes physiques. Plus précisément, entre les altitudes z_0 et z (ou les pressions p_0 et p), on a :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = - \int_{z_0}^z \frac{g}{R(T_0 + \gamma z')} dz'. \quad (\text{E.1})$$

Cette relation mène à exprimer la densité comme une fonction de la pression [93] :

$$\varrho(p) = \frac{p_0}{RT_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma R}{g} + 1}. \quad (\text{E.2})$$

En calculant la moyenne verticale, la densité moyenne liée à la couche k s'écrit :

$$\varrho^k = \frac{1}{\bar{p}^{k+1} - \bar{p}^k} \int_{\bar{p}^k}^{\bar{p}^{k+1}} \varrho(p) dp = \frac{p_0^2}{(\bar{p}^{k+1} - \bar{p}^k) \left(\frac{\gamma R}{g} + 2 \right) RT_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma R}{g} + 2} \right]_{\bar{p}^k}^{\bar{p}^{k+1}}. \quad (\text{E.3})$$

Notons que le taux constant γ (la variation linéaire de la température par rapport à l'altitude) est une approximation forte dans la troposphère. Cependant, comme la loi de la densité est moyennée verticalement et horizontalement sur le domaine de la couche, une telle approximation devrait avoir un impact mineur sur la modélisation finale. On dérive à présent un modèle de shallow-water dédié aux couches atmosphériques. En considérant les grandes échelles de l'écoulement, les termes de friction et les termes dépendant de la courbure de la Terre peuvent être négligés [93]. Les composantes horizontales du vent seront notées (u, v) . L'approximation de shallow-water (la vitesse horizontale est très supérieure à la vitesse verticale) mène alors à l'expression suivante de la loi de conservation des moments pour des mouvements atmosphériques :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \frac{p_x}{\varrho_0} - v f^\phi = 0, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{p_y}{\varrho_0} + u f^\phi = 0, \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

où ϱ_0 et f^ϕ représentent respectivement la moyenne de densité locale et le facteur de Coriolis dépendant de la latitude ϕ .

En développant les dérivées totales dans le système de coordonnées isobarique (x, y, p) et en tenant compte du fait que l'écoulement est incompressible (divergence locale 3D nulle), l'équation (E.4) peut être reformulée :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial u\omega}{\partial p} + \frac{p_x}{\varrho_0} - v f^\phi = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v\omega}{\partial p} + \frac{p_y}{\varrho_0} + u f^\phi = 0, \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

où $\omega = \frac{dp}{dt}$ est la composante du vent vertical dans le système de coordonnées de pression. Dans le système de coordonnées isobarique (x, y, p) , la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (\text{E.6})$$

Nous souhaitons intégrer verticalement les équations (E.5) et (E.6) sur l'intervalle de pression $[p(s^{k+1}), p(s^k)]$. Pour cela, on fixe tout d'abord les conditions aux bords :

$$\begin{cases} \frac{\partial p(s^k)}{\partial t} + u(s^k) \frac{\partial p(s^k)}{\partial x} + v(s^k) \frac{\partial p(s^k)}{\partial y} = \omega(s^k) \\ \frac{\partial p(s^{k+1})}{\partial t} + u(s^{k+1}) \frac{\partial p(s^{k+1})}{\partial x} + v(s^{k+1}) \frac{\partial p(s^{k+1})}{\partial y} = \omega(s^{k+1}). \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Ces conditions de bords peuvent être interprétées comme le fait que les surfaces aux frontières des couches $(p(s^k)$ et $p(s^{k+1}))$ sont déformées par les vents verticaux $\omega(s^k)$ et $\omega(s^{k+1})$. Afin de réaliser l'intégration verticale sur l'intervalle de pression $[p(s^{k+1}), p(s^k)]$, nous employons la formule de Leibnitz. Cette formule est valide pour tout fonction $f(x, p)$ dérivable et intégrable sur tout intervalle $[a(x), b(x)]$:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} dp = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, p) dp \right) - f(x, b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x} + f(x, a(x)) \frac{\partial a(x)}{\partial x}. \quad (\text{E.8})$$

Ainsi, en utilisant les relations (E.7) et (E.8), l'intégration verticale de l'équation (E.5) sur l'intervalle de pression $[p(s^{k+1}), p(s^k)]$ mène à la loi de conservation des moments pour chaque couche atmosphérique k :

$$\frac{\partial(\mathbf{q}^k)}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{1}{h^k} \mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k \right) + \frac{1}{2\varrho^k} \nabla_{xy} (h^k)^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f^\phi \mathbf{q}^k = 0, \quad (\text{E.9})$$

avec

$$h^k = p(s^k) - p(s^{k+1}), \quad (\text{E.10})$$

$$\mathbf{v}^k = (u^k, v^k) = \frac{1}{h^k} \int_{p(s^{k+1})}^{p(s^k)} \mathbf{v} dp, \quad (\text{E.11})$$

$$\mathbf{q}^k = h^k \mathbf{v}^k, \quad (\text{E.12})$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{h^k} \mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(h^k(u^k)^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h^k u^k v^k)}{\partial y} \\ \frac{\partial(h^k u^k v^k)}{\partial x} + \frac{\partial(h^k(v^k)^2)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.13})$$

En intégrant également verticalement l'équation de continuité (E.6) sur l'intervalle de pression $[p(s^{k+1}), p(s^k)]$, la loi de conservation des moments (E.9) est ajoutée à la loi de conservation de

la masse :

$$\frac{\partial h^k}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}^k) = 0, \quad (\text{E.14})$$

et l'on obtient un système d'équations de shallow-water indépendantes pour chaque couche $k \in [1, K]$ [85] :

$$\begin{cases} \frac{\partial h^k}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}^k) = 0 \\ \frac{\partial(\mathbf{q}^k)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{h^k} \mathbf{q}^k \otimes \mathbf{q}^k\right) + \frac{1}{2g^k} \nabla_{xy}(h^k)^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f\phi \mathbf{q}^k = 0. \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

Liste des notations

Symbole	Signification
t	Indice du temps réel
$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée temporelle
$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée spatiale en x
$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$	Dérivée spatiale en y
$\nabla = [\partial_x, \partial_y]^T$	Opérateur gradient
$\nabla^T = [-\partial_y, \partial_x]^T$	Opérateur gradient orthogonal
$\text{div}(\bullet) = \nabla \cdot \bullet$	Opérateur divergence
$\text{rot}(\bullet) = \nabla^T \cdot \bullet$	Opérateur rotationnel
$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$	Opérateur de Laplace
\mathbb{M}	Opérateur différentiel de dynamique
\mathbb{H}	Opérateur différentiel d'observation
$\partial_X \mathbb{M}$ et $\partial_X \mathbb{H}$	Dérivées de Gâteaux des opérateurs
λ	Variable adjointe
η	Bruit de la condition initiale
B	Matrice de covariance de l'initialisation
ϵ	Bruit des observations
R	Matrice de covariance des observations
w	Bruit (ou contrôle) du modèle \mathbb{M}
Q	Matrice de covariance du modèle
I	Image
Φ	Ensemble de lignes de niveaux
κ	Courbure
ε	Coefficient de courbure
ρ	Histogramme de couleur
d_B	Distance de Bhattacharia
τ	Temps algorithmique
δ	Fonction de dirac
$\mathbf{1}$	Fonction caractéristique
ψ	Fonction robuste
$\mathbf{v} = [u, v]^T$	Champ de vecteur bidimensionnel
$\xi = v_x - u_y$	Vorticité
$\zeta = u_x + v_y$	Divergence
ϕ	Potentiel de vitesse
Ψ	Fonction de courant
p	Pression
h	Épaisseur d'une couche atmosphérique
\mathbf{q}	Vitesse horizontale moyennée sur une couche
ϱ	Densité moyenne d'une couche
a	Mode temporel POD
φ	Mode spatial POD

Liste des abréviations

Abréviation	Signification
ECMA	Équation de Contrainte du Mouvement Apparent
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
EDO	Équation aux Dérivées Ordinaires
ENKF	Filtre de Kalman d'ensemble
EQM	Erreur Quadratique Moyen
PIV	calcul de Vitesse à partir d'Images de Particules
POD	Décomposition Orthogonale Propre
WENKF	Filtre de Kalman d'ensemble pondéré
schéma ENO	schéma Essentiellement Non Oscillatoire
WENO	schéma Pondéré Essentiellement Non Oscillatoire

Liste des algorithmes

1	Assimilation sous contrainte dynamique forte. Le modèle dynamique est supposé parfait.	59
2	Assimilation sous contrainte dynamique faible. Le modèle dynamique est supposé imparfait.	63

Liste des figures

0.1	Évolution du nombre de données satellitaires disponibles et des données réellement utilisées. Source : European Center for Medium range Weather forecasting.	15
1.1	Principe du lissage de Kalman. On cherche à suivre la position d'un objet au cours du temps. La courbe noire indique la vraie position de l'objet. La courbe en rouge représente le filtrage obtenu par un Kalman "avant", celle en bleu le filtrage "arrière". La courbe verte est le résultat du lissage de Kalman.	31
2.1	Comparaison de l'ENKF (courbe bleue) et du WENKF (courbe rouge) en fonction du nombre de particules utilisé pour 8 scénarios linéaires. En abscisse, le nombre de particules, en ordonnée, l'écart quadratique moyen vis à vis de l'espérance de la distribution de filtrage optimale fournie par le filtre de Kalman.	41
2.2	Comparaison de l'ENKF (courbe noire) et du WENKF (courbe rouge) dans le cas non linéaire en fonction du nombre de particules utilisé pour le premier (en pointillé) et le troisième scénario (en trait plein). Nombre de particules en abscisse, distance quadratique entre la vérité terrain et la distribution de filtrage en ordonnée.	44
2.3	Comparaison ENKF/ WENKF : cartes de vortacité. (a) Carte de vortacité réelle. (b) Carte de vortacité observée. (c) Carte de vortacité reconstruite par ENKF. (d) Carte de vortacité reconstruite par WENKF.	50
2.4	Séquence d'images créées par simulation numérique de la l'équation de vortacité-vitesse.	51
2.5	Cartes de vortacité. (a) Vortacité réelle, (b) Vortacité estimée par l'algorithme de flot optique, (c) Vortacité reconstruite par le WENKF ($N = 20$ particules).	51
3.1	Algorithme d'assimilation sous contrainte dynamique faible. Cette figure donne un aperçu du principe de la méthode. Après une intégration de la condition initiale X_0 (trajectoire bleue), une intégration rétrograde de la variable adjointe est réalisée suivant les différences de mesure entre observation et estimation (trajectoire violette). Un incrément peut alors être intégré dans le temps pour donner une trajectoire corrigée (trajectoire rouge). Et ainsi de suite ...	68
4.1	Représentation d'un ensemble de lignes de niveau Φ déterminé par Γ , sa ligne de niveau 0.	82
4.2	Suivi d'une raie. Lignes du haut : Observations discrètes disponibles. Lignes du bas : Résultats des courbes continues obtenues	94
4.3	Suivi d'une dépression. Lignes du haut : Observations discrètes disponibles. Lignes du bas : Résultats des courbes continues obtenues	95

- 4.4 **Séquence lettres.** Résultats de l'assimilation, la courbe est superposée aux images observées aux temps $t = 0, 1, 2, 3$. Les déformations de la courbe entre les images constituent une déformation continue entre les lettres. 95
- 4.5 **Comparaison des deux modèles images** sur une unique image après quelques itérations. La moyenne de l'intensité lumineuse du fond est claire. Ainsi, les zones noires sont plus proches de l'objet que du fond avec le modèle d'*intensités moyennes*. Ce problème est résolu en utilisant le modèle de *densités de probabilités locales*. 96
- 4.6 **Séquence voiture.** Une seule courbe est disponible au temps initial. La forme est cohérente au cours du temps grâce au modèle de *densités de probabilités locales*. 96
- 4.7 **Séquence tigre.** Résultats de la technique d'assimilation avec le modèle de *densités de probabilités locales* 97
- 4.8 **Séquence Tigre 2.** Segmentations successives obtenues par un modèle de Chan et Vese avec un modèle de données basé sur des mesures de *densités de probabilités locales* et la distance de Bhattacharya (équations. 4.18-4.19). 97
- 4.9 **Séquence cardiaque d'Images à Résonance Magnétique.** Résultats de la technique d'assimilation avec le modèle de *densités de probabilités locales*. La courbe donnée comme initialisation est montrée sur la première image de la ligne du haut. 98
- 4.10 **Séquence cardiaque d'Images à Résonance Magnétique 2.** Segmentations successives obtenues par un modèle de Chan et Vese avec un modèle de données basé sur des mesures de densités locales et la distance de Bhattacharya (équations. 4.18-4.19). 98
- 5.1 **Décomposition de Helmholtz :** (a) champ de vecteur bidimensionnel. (b) composante divergente. (c) Composante de vorticité. (d) Composante laminaire (ici une translation). . 108
- 5.2 **Influence de la régularisation spatio-temporelle et des données de corrélation** sur l'estimation de champs de vent sur une couche de nuages de haute altitude. Première ligne : Reconstruction des trajectoires pour un schéma d'estimation de champ dense sans (gauche) et avec (droite) régularisation spatio-temporelle. Seconde ligne : Reconstruction des trajectoires pour un schéma d'estimation utilisant les données de corrélation sans (gauche) et avec (droite) régularisation spatio-temporelle. Les lignes rouges représentent les contours des côtes, les méridiens et les parallèles (tous les 10°). 112
- 5.3 **Séquence particules, simulation numérique 2D, assimilation des pseudo-observations image.** a) Séquence d'images de particules. b) Vorticité réelle. c) Vorticité du champ observé par l'estimateur de flot optique. d) Vorticité du champ assimilé. 119
- 5.4 **Séquence particules, comparaison des erreurs.** Les  rreurs Quadratiques Moyennes des champs de vitesse estimés sur les 50 images de la séquence particules sont compar es pour les 3 méthodes : vitesses obtenues par l'estimateur de flot optique (en bleu), vitesses du résultat de l'assimilation des mesures fournies par l'estimateur de flot optique (en rouge) et vitesses du résultat obtenu en assimilant directement l'intensité lumineuse des images (en vert). 120

5.5	Séquence particules, spectre de la vorticité. Les spectres des différentes vorticités obtenues à partir des images de particules sont ici comparés : vorticité réelle (en noir), vorticité obtenue par l'estimateur de flot optique (en bleu), vorticité du résultat de l'assimilation des mesures fournies par l'estimateur de flot optique (en rouge) et vorticité du résultat obtenu en assimilant directement l'intensité lumineuse des images (en vert).	120
5.6	Séquence particules, simulation numérique 2D, assimilation directe des images. <i>a)</i> Vorticité réelle. <i>b)</i> Vorticité du champ assimilé.	121
5.7	Séquence scalaires, simulation numérique 2D. <i>a)</i> Séquence d'images scalaires. <i>b)</i> Vorticité réelle. <i>c)</i> Vorticité des pseudo-observations calcul�es par flot optique. <i>d)</i> Vorticité du champ assimilé avec les pseudo-observations <i>e)</i> Vorticité du champ assimilé avec les observations image.	122
5.8	Séquence scalaire, spectre de la vorticité. Les spectres des différentes vorticités obtenues à partir des images de particules sont ici comparés : vorticité réelle (en noir), vorticité obtenue par l'estimateur de flot optique (en bleu), vorticité du résultat de l'assimilation des mesures fournies par l'estimateur de flot optique (en rouge) et vorticité du résultat obtenu en assimilant directement l'intensité lumineuse des images (en vert).	123
5.9	Séquence scalaire, comparaison des erreurs. Les courbes violette et rouge décrivent l'Erreur Quadratique Moyenne de la vorticité des 50 champs calculés par flot optique sur les séquences scalaires et particules. Les courbe verte et bleue présentent les erreurs correspondantes à la vorticité des champs obtenus par assimilation sur les mêmes séquences.	123
5.10	Cyclone Vince. <i>(a)</i> Séquence d'images. <i>(b)</i> Cartes de vorticités des pseudo-observations. <i>(c)</i> Cartes de vorticité des champs assimilés avec les pseudo-observations. <i>(d)</i> Cartes de vorticité des champs assimilés avec les observations images.	124
5.11	Cyclone Vince 2. Champs de mouvements estimés par assimilation directe des mesures de l'intensité lumineuse.	124
5.12	Suivi du Cyclone Vince de nuit. Les champs assimilés à partir des pseudo-observations calcul�es sur les images du canal visible sont superposés aux images infrarouge. Il y a donc une occultation des données du 9 octobre à 19H00 jusqu'au 10 octobre à 8H00.	126
6.1	Position finale de la courbe sur l'image 19. <i>Gauche</i> : Initialisation de la courbe sur la première image. <i>Milieu</i> : Position finale de la courbe sans assimilation de mouvement. <i>Droite</i> : Position finale de la courbe avec assimilation de mouvement.	129
6.2	Séquence du cyclone . <i>(a)</i> �chantillons des courbes observ�es. <i>(b)</i> Cartes de vorticité observ�es. <i>(c)</i> Courbes assimil�es. <i>(d)</i> Cartes de vorticité des champs de vitesse assimilés.	130
6.3	Séquence de couches de nuages. <i>Colonne de gauche</i> : �chantillon des couches observ�es. <i>Colonne de droite</i> : Résultats après assimilation. Sur la colonne de gauche, le bleu, le rouge et le vert indiquent la présence de nuages hauts, moyens et bas. Sur la droite, les résultats font apparaître de nouvelles couleurs correspondant aux intersections entre couches. Par exemple, le bleu clair indique la superposition de nuages hauts et moyens, le jaune celle de nuages moyens et bas.	131

6.4	Séquence Vince. L'initialisation est donnée par la première image, le suivi obtenu avec la méthode d'assimilation considère toutes les déformations de l'œil du cyclone.	132
6.5	Séquence du cyclone, assimilation couplée. (a) Intégration de la vorticité initiale. (b) Intégration de la courbe initiale suivant la vorticité initiale. (c) Intégration de la vorticité finale. (d) Intégration de la courbe finale suivant la vorticité finale.	133
6.6	Séquence du vortex, assimilation couplée. Le système est initialisé avec une vorticité nulle. (a) Intégration de la courbe initiale suivant la vorticité initiale. (b) Résultat intermédiaire. (c) Intégration de la courbe finale suivant la vorticité finale.	134
6.7	Séquence de voitures 2. (a) �chantillon des courbes observ�e. (b) Courbes solutions avec une matrice de covariance d'initialisation renforc�e. (c) Courbes solutions avec une matrice de covariance des observations renforc�e.	138
6.8	Séquence de main. (a) �chantillon des courbes observ�es. (b) Courbes solutions (c) Champs affines solutions.	140
6.9	Séquence de main 2. (a) Conditions initiale et finale de la courbe. (b) Courbes solutions après assimilation.	141
6.10	Surfer dans un tube. La seule courbe disponible est celle donn�e par l'initialisation. Les résultats du suivi sont présentés pour différentes images de $t=0$ à $t=21$	142
6.11	Morphing de visages. Des visages intermédiaires sont cr�es à partir de 2 photographies. Le résultat est bon pour les cheveux mais plus flou sur les détails des visages intermédiaires.	144
6.12	Restauration d'images. La séquence de 6 images <i>Avenger</i> a été artificiellement d�t�rior�e (ligne a), puis les surfaces correspondant aux images ont été assimil�es (ligne b). L'assimilation de surfaces permet de remplir les zones manquantes de données.	144
6.13	Séquence taxi. (a) : Image initiale. (b–d) : trois images bruit�es de la séquence. Champs de vitesses entre les temps $(t = 1, t = 2)$, $(t = 2, t = 3)$, $(t = 5, t = 6)$ et $(t = 6, t = 7)$ estimés par assimilation de données images (e–h) et par flot optique sans modèle dynamique (i–l).	145
6.14	Estimation de vitesse et profondeur. La séquence d'images Yosemite (colonne (a)) est assimil�e pour estimer simultanément le flot optique (colonne (b)) et la carte de profondeur des points (colonne (c)).	146
7.1	Classification des nuages. � partir de l'image satellitaire pr�sent�e en (a), le consortium EUMETSAT classe les nuages en trois couches : (b) basse, (c) intermédiaire et (d) haute.	155
7.2	Cartes de pressions. Ligne (a) : Images de pressions originales. Ligne (b) : Images de pressions r�echantillonn�es.	156
7.3	Décomposition de l'atmosphère en 3 couches de différences de pressions. Une couche k est d�limit�e par ses surfaces inférieure s^k et supérieure s^{k+1} . Pour chaque couche, on considère l'épaisseur h^k et la vitesse moyenn�e sur cette épaisseur \mathbf{v}^k	158
7.4	Séquences atmosphériques synthétiques : Résultats pour les expériences e_2 et e_4 , où la carte de différences de pression ont été bruit�e et/ou masqu�e	162
7.5	Assimilation d'images de pression : Première (� gauche) et dernière (� droite) estimations de champs de vents horizontaux surimposés aux cartes d'observations de différences de pression	163

8.1	Représentation de la vorticité des modes spatiaux : (a) $\varphi_1(\mathbf{x})$. (b) $\varphi_3(\mathbf{x})$. Le premier mode spatial contient de grandes structures cohérentes tandis que le troisième mode représente de plus petites échelles de l'écoulement.	170
8.2	Première estimation des coefficients du système dynamique réduit . Comparaison entre l'estimation (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. (a) Simulation avec $s = 2$ modes. (b) La solution diverge pour les systèmes tels que $s \geq 4$ modes.	172
8.3	Assimilation des trajectoires . Comparaison entre les trajectoires assimil�es (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de l'assimilation des trajectoires des 2 premiers modes.	174
8.4	Réestimation des paramètres du modèle dynamique réduit . Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de la simulation des trajectoires des deux premiers modes avec les coefficients des systèmes dynamiques réduits recalculés par régression des moindres carrés sur les trajectoires assimil�es de la figure 8.3.	174
8.5	Assimilation des coefficients des systèmes dynamiques réduits . Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Chaque couleur représente un mode distinct. Résultat de la simulation des trajectoires des deux premiers modes après assimilation des paramètres du modèle réduit.	176
8.6	Test du gradient réalisé avec $\alpha \rightarrow 0$	177
8.7	Solution d'un système dynamique réduit avec introduction d'une viscosité artificielle pour $s = 4$. La solution n'explose plus mais est très amortie.	178
8.8	Trajectoires obtenues par assimilation des coefficients du système dynamique réduit Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *).	178
8.9	Comparaison de la simulation aux données non utilis�es . Les symboles * sur la seconde moitié du graphique correspondent aux données non utilis�es par la phase d'assimilation.	179
8.10	Portrait de phase des modes temporels	179
8.11	Cinq cartes de vorticité consécutives de l'écoulement . (a) Cartes de vorticité des champs estimés sur la séquence d'image, servant de mesure au système d'assimilation . (b) Cartes de vorticité des champs reconstruits avec $s = 10$ modes.	180
8.12	Cartes de vorticité sur une période T de l'écoulement . (a) Cartes de vorticité des champs estimés sur la séquence d'images. (b) Cartes de vorticité des champs reconstruits avec $s = 10$ modes.	181
8.13	étude de la convergence : a) �volution de l'erreur moyenne quadratique entre estimations et observations au cours des itérations de processus d'assimilation. b) �volution du critère de convergence de l'équation (8.6.1).	182
8.14	Trajectoires simulées des modes 5 et 6 (a) et 7 et 8 (b) après assimilation . Comparaison entre les trajectoires simulées (ligne continue) et les données originales (les symboles *). Les modes observés repr�senteant les petites échelles sont très bruités.	182
8.15	Premières simulations : la qualité des premières trajectoires simulées est mauvaise.	183

8.16	Trajectoires simulées après assimilation des coefficients du système dynamique réduit.	183
8.17	Module de la vorticité 3D.	184
8.18	DNS 3D : Première simulation à partir des coefficients du système dynamique réduit calculés par régression linéaire des observations.	184
8.19	DNS 3D : Simulation à partir des coefficients assimilés du système dynamique réduit.	185
C.1	Séquence taxi. (a) : Image initiale. (b–d) : trois images bruitées de la séquence. Champs de vitesses entre les temps $(t = 1, t = 2)$, $(t = 2, t = 3)$, $(t = 5, t = 6)$ et $(t = 6, t = 7)$ estimés par assimilation de données images (e–h) et par flot optique sans modèle dynamique (i–l).	203
D.1	Estimation de vitesse et profondeur. La séquence d’images Yosemite (colonne (a)) est assimilée pour estimer simultanément le flot optique (colonne (b)) et la carte de profondeur des points (colonne (c)).	206

Liste des tableaux

2.1	Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios linéaires , avec $N = 10$ particules utilisées.	41
2.2	Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios linéaires , avec $N = 10$ particules utilisées et loi de propagation empirique.	43
2.3	Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios non linéaires , avec $N = 10$ particules utilisées.	43
2.4	Comparaison ENKF/ WENKF pour des scénarios non linéaires 2D avec 100 réalisations de chaque scénario. Le ENKF avec $N = 10$ particules est comparé avec deux WENKF composés respectivement de $N = 10$ et $N = 30$ particules.	49
2.5	Comparaison ENKF/ WENKF pour un scénario non linéaire de DNS 2D . Différents intervalles entre deux observations successives sont comparés.	52
4.1	Test du gradient . Les effets des perturbations et de la diffusion de la courbure sur le test du gradient.	93
6.1	Évaluation numérique du flot optique sur la séquence synthétique Yosemite en suivant le critère de Barron <i>et al</i> [11] pour les champs correspondants aux images (#8, #9 et #10) de la séquence. Les méthodes comparées sont : 1 : Lai & Vemuri [107]; 2 : Brox <i>et al</i> 2D [32]; 3 : Mémin & Pérez [125]; 4 : Weickert <i>et al</i> [173]; 5 : Farnebäck [72]; 6 : Brox <i>et al</i> 3D [32]; 7 : Notre approche.	147
7.1	Évaluation numérique . Diminution de l'Erreur quadratique moyenne (EQM) des estimations h et $ \mathbf{v}(t_0) $ pour l'assimilation d'images bruitées (expériences e_1 , e_2 , e_3 et e_4) et éparses (expériences e_3 et e_4).	161
D.1	Évaluation numérique du flot optique sur la séquence synthétique Yosemite en suivant le critère de Barron <i>et al</i> [11] pour les champs correspondants aux images (#8, #9 et #10) de la séquence. Les méthodes comparées sont : 1 : Lai & Vemuri [107]; 2 : Brox <i>et al</i> 2D [32]; 3 : Mémin & Pérez [125]; 4 : Weickert <i>et al</i> [173]; 5 : Farnebäck [72]; 6 : Brox <i>et al</i> 3D [32]; 7 : Notre approche.	207

Bibliographie

- [1] E.H. Adelson et J.Y.A. Wang. Representing moving images with layers. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 5(3) :625–638, 1994.
- [2] ADIFOR. *Tool for the automatic differentiation of Fortran 77 programs*. <http://www.mcs.anl.gov/adifor/>.
- [3] ADOL-C. A. Griewank's packages for programs in C/C++, forward and reverse mode. <http://www.math.tu-dresden.de/adol-c/>.
- [4] R. Adrian. Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Annal Rev. Fluid Mech.*, 23 :261–304, 1991.
- [5] L. Alvarez, J. Weickert, et X. Sanchez. Reliable estimation of dense optical flow fields with large displacements. *Int. J. Comput. Vis.*, 39(1) :41–56, 2000.
- [6] B.D.O. Anderson et J. Moore. *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1979.
- [7] E. Arnaud. *Méthodes de filtrage pour du suivi dans des séquences d'images - Application au suivi de points caractéristiques*. PhD thesis, Université de Rennes I, Novembre 2004.
- [8] E. Arnaud et E. Memin. Partial linear gaussian models for tracking in image sequences using sequential monte carlo methods. *Int. J. Comput. Vis.*, 74(1) :75–102, 2007.
- [9] N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley, et E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mechanics*, 192 :115–173, 1988.
- [10] S. Ayer et H.S. Sawhney. Layered representation of motion video using robust maximum-likelihood estimation of mixture models and Mdl encoding. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'95*, pages 777–784, 1995.
- [11] J. Barron, D. Fleet, et S. Beauchemin. Performance of optical flow techniques. *Int. J. Comput. Vis.*, 12(1) :43–77, 1994.
- [12] A. Bartesaghi et G. Sapiro. Tracking of moving objects under severe and total occlusions. In *Proc. Int. Conf. Image Processing, ICIP'05*, volume 1, pages 301–304, 2005.
- [13] A.F. Bennet. *Inverse Methods in Physical Oceanography*. Cambridge University Press, 1992.
- [14] A. Bensoussan. *Filtrage optimal des systèmes linéaires*. Dunod, 1971.
- [15] J.R. Bergen, P.J. Burt, R. Hingorani, et S. Peleg. A three-frame algorithm for estimating two-component image motion. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 14(9) :886–895, 1992.
- [16] M. Bertalmío, A. Bertozzi, et G. Sapiro. Navier-stokes, fluid dynamics, and image and video inpainting. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'01*, volume 1, pages 355–362, 2001.

- [17] M. Bertalmío, G. Sapiro, et G. Randall. Morphing active contours. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 22(7) :733–737, 2000.
- [18] M. Bertalmío, L. Vese, G. Sapiro, et S. Osher. Simultaneous structure and texture image inpainting. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'03*, volume 2, pages 707–712, 2003.
- [19] L. Bertino, G. Evensen, et H. Wackernagel. Sequential data assimilation techniques in oceanography. *Int. Statist. Rev.*, 71(2) :223–241, 2003.
- [20] A. Betser, P. Vela, et A. Tannenbaum. Automatic tracking of flying vehicles using geodesic snakes and kalman filtering. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, CDC'04*, volume 2, pages 1649–1654, 2004.
- [21] M. Black. Recursive non-linear estimation of discontinuous flow fields. In *Proc. Europ. Conf. Comput. Vis., ECCV'94*, pages 138–145, 1994.
- [22] M. Black et P. Anandan. The robust estimation of multiple motions : Parametric and piecewise-smooth flow fields. *Comput. Vis. and Image Understanding*, 63(1) :75–104, 1996.
- [23] A. Blake et M. Isard. *Active contours*. Springer-Verlag, London, England, 1998.
- [24] E. Blayo. Modélisation numérique et assimilation de données en océanographie. Habilitation à Diriger des Recherches, 2002.
- [25] M. Bocquet. Introduction aux principes et méthodes de l'assimilation de données en géophysique. *Notes de cours de l'école Nationale Supérieure des Techniques Avancées*, 2006.
- [26] A. Borzi, K. Ito, et K. Kunisch. Optimal control formulation for determining optical flow. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(3) :818–847, 2003.
- [27] P. Boutheymy et E. Francois. Motion segmentation and qualitative dynamic scene analysis from an image sequence. *Int. J. Comput. Vis.*, 10(2) :157–182, 1993.
- [28] F. Bouttier et P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. *ECMWF Meteorological Training Course Lecture Series*, 1999.
- [29] C. Braud. *Étude de la dynamique d'un écoulement à cisaillements croisés : interaction couche de mélange - sillage*. PhD thesis, Université de Poitiers, Décembre 2003.
- [30] C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, L. Perret, J. Delville, et J.P. Bonnet. Low-dimensional analysis, using pod, for two mixing layer-wake interactions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 25(3) :351–363, 2004.
- [31] M. Brewer, R. Malladi, G. Pankiewicz, B. Conway, et L. Tarassenko. Methods for large scale segmentation of cloud images. In *Meteorological Satellite Data Users' Conference*, pages 131–138, 1997.
- [32] T. Brox, A. Bruhn, N. Papenberger, et J. Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In *Proc. Europ. Conf. Comput. Vis., ECCV'04*, pages 25–36, 2004. Springer-Verlag.
- [33] A. Bruhn, J. Weickert, C. Feddern, T. Kohlberger, et C. Schnörr. Variational optical flow computation in real-time. *IEEE Trans. Image Processing*, 14(5) :608–615, 2005.
- [34] A. Bruhn, J. Weickert, et C. Schnörr. Lucas/kanade meets horn/schunck : Combining local and global optic flow methods. *Int. J. Comput. Vis.*, 61(3) :211–231, 2005.

- [35] A. Bugeau et P. Pérez. Detection and segmentation of moving objects in highly dynamic scenes. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'07*, 2007.
- [36] G. Burger, P. J. van Leeuwen, et G. Evensen. Analysis scheme in the ensemble kalman filter. *Mon. Weather Rev.*, 126 :1719–1724, 1998.
- [37] J. Carlier et B. Wieneke. Report on production and diffusion of fluid mechanics images and data. Technical report, Fluid Project deliverable 1.2, 2005.
- [38] V. Caselles, R. Kimmel, et G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'95*, pages 694–699, 1995.
- [39] V. Caselles, R. Kimmel, et G. Sapiro. Geodesic active contours. *Int. J. Comput. Vis.*, 22(1) :61–79, 1997.
- [40] W. Cazemier, R. W. C. P. Verstappen, et A. E. P. Veldman. Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows. *J. of Physics Fluids*, 10 :1685–1699, 1998.
- [41] T. Chan et L. Vese. Active contours whitout edges. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(2) :266–277, 2001.
- [42] T. Chan et L. Vese. A multiphase level set framework for image segmentatiOn using the mumford ans shah model. *Int. J. Comput. Vis.*, 50(3) :271–293, 2002.
- [43] T. F. Chan, J. Shen, et H-M. Zhou. Total variation wavelet inpainting. *J. Math. Imaging and Vision*, 25(1) :107–125, 2006.
- [44] A. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57 :785–796, 1973.
- [45] I. Cohen et I. Herlin. Tracking meteorological structures through curve(s) matching using geodesic paths. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'98*, pages 396–401, 1998.
- [46] I. Cohen et I. Herlin. Non uniform multiresolution method for optical flow and phase portrait models : Environmental applications. *Int. J. Comput. Vis.*, 33(1) :29–49, 1999.
- [47] L. Cohen. On active contour models and balloons. *Comput. Vision, Graphics, Image Proc. : Image Understanding*, 53(2) :211–218, 1991.
- [48] T. Corpetti, E. Mémin, et P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 24(3) :365–380, 2002.
- [49] G.-H. Cottet et P. Koumoutsakos. *Vortex methods : theory and practice*. Cambridge University Press, 2000.
- [50] P. Courtier et O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the direct and adjoint shallow-water equations. *Tellus*, 42 :531–549, 1990.
- [51] D. Cremers. A variational framework for image segmentation combining motion estimation and shape regularization. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'03*, volume 1, pages 53–58, 2003.
- [52] D. Cremers et S. Soatto. Motion competition : A variational framework for piecewise parametric motion segmentation. *Int. J. Comput. Vis.*, 62(3) :249–265, 2005.
- [53] D. Cremers, F. Tischhäuser, J. Weickert, et C. Schnoerr. Diffusion snakes : introducing statistical shape knowledge into the Mumford-Shah functional. *Int. J. Comput. Vis.*, 50(3) :295–313, 2002.

- [54] A. Cuzol, P. Hellier, et E. Mémin. A low dimensional fluid motion estimator. *Int. J. Comput. Vis.*, 75(3) :329–349, 2007.
- [55] A. Cuzol et E. Mémin. A stochastic filter for fluid motion tracking. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'05*, volume 1, pages 396–402, 2005.
- [56] A. Cuzol et E. Mémin. Vortex and source particles for fluid motion estimation. *Proc. Int. Conf. on Scale-Space and PDE methods in Comput. Vis., Scale-Space'05*, pages 254–266, April 2005.
- [57] J. D'Adamo. *Modelos reducidos para el control de flujos con actuadores EHD*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, March 2007.
- [58] J. D'Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, et G. Artana. Variational assimilation of pod low-order dynamical systems. *J. of Turbulence*, 8, 2007.
- [59] S. Dambreville, Y. Rathi, et A. Tannenbaum. Tracking deformable objects with unscented kalman filtering and geometric active contours. In *American Control Conf., ACC'06*, 2006.
- [60] A.J.C. de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 73 :147–154, 1871.
- [61] A. Deane, I. Kevrekidis, G. Karniadakis, et S. Orszag. Low-dimensional models for complex geometry flows : Application to grooved channels and circular cylinders. *J. of Physics Fluids*, 3 :2337–2354, 1991.
- [62] F.X. Le Dimet. Une application des méthodes de contrôle, optimal à l'analyse variationnelle. *Rapport Scientifique LAMP, Université Blaise-Pascal, 63170, Aubière Cedex*, 1982.
- [63] A. Doucet, S. Godsill, et C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3) :197–208, 2000.
- [64] W. Enkelmann. Investigation of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences. *Comp. Vision Graph. and Image Proces.*, 43 :150–177, 1988.
- [65] G. Evensen. Sequential data assimilation with a non linear quasigeostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99(C5) :10,143–10,162, 1994.
- [66] G. Evensen. The ensemble kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53(4) :343–367, 2003.
- [67] G. Evensen. *Data Assimilation : The Ensemble Kalman Filter*. Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
- [68] R. Everson et L. Sirovich. The karhunen-loeve procedure for gappy data. *J. Opt. Soc. Am.*, 12 :1657–1664, 1995.
- [69] M. Fahl. *Trust-Region methods for flow control based on Reduced Order Modeling*. PhD thesis, Universität Trier, 2001.
- [70] M. Farge, K. Schneider, G. Pellegrino, A. A. Wray, et R. S. Rogallo. Coherent vortex extraction in 3d homogeneous isotropic turbulence : comparison between cvs and pod decompositions. *J. of Physics Fluids*, 15(10) :2886–2896, 2003.
- [71] G. Farneback. Fast and accurate motion estimation using orientation tensors and parametric motion models. In *Proc. Int. Conf. Pat. Rec., ICPR'00*, volume 1, pages 1135–1139, 2000.

- [72] G. Farneback. Very high accuracy velocity estimation using orientation tensors, parametric motion, and simultaneous segmentation of the motion field. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'01*, volume 1, pages 171–177, 2001.
- [73] B. Faugeras. *Assimilation variationnelle de données dans un modèle couplé océan-biogéochimie*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Octobre 2002.
- [74] R. Feghali et A. Mitiche. Image sequence processing - spatiotemporal motion boundary detection and motion boundary velocity estimation for tracking moving objects with a moving camera : A level sets pdes approach with concurrent camera motion compensation. *IEEE Trans. Image Processing*, 13(11) :1473–1490, 2004.
- [75] R.A. Fisher. On the interpretation of x^2 from contingency tables, and the calculation of p. *J. Roy. Statistical Soc.*, 85(1) :87–94, 1922.
- [76] D. Fleet et A. Jepson. Computation of component image velocity from local phase information. *Int. J. Comput. Vis.*, 5(1) :77–104, 1990.
- [77] D. Freedman et T. Zhang. Motion detection and estimation - active contours for tracking distributions. *IEEE Trans. Image Processing*, 13(4) :518–526, 2004.
- [78] D. Geman et G. Reynolds. Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 14(3) :367–383, 1992.
- [79] R. Goldenberg, R. Kimmel, E. Rivlin, et M. Rudzsky. Fast geodesic active contours. *IEEE Trans. Image Processing*, 10(10) :1467–1475, 2001.
- [80] N.J. Gordon, A. Doucet, et J.F.G. De Freitas. *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer-Verlag, 2001.
- [81] N.J. Gordon, D.J. Salmond, et A.F.M. Smith. Novel approach to non-linear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEEE Processing-F*, 140(2) :107–113, April 1993.
- [82] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, et S. R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, 111. *J. of Comput. Phys.*, 71(2) :231–303, 1987.
- [83] P. Héas, E. Mémin, et N. Papadakis. Dense estimation of layer motions in the atmosphere. In *Proc. Int. Conf. Pat. Rec., ICPR'06*, volume 3, pages 1–4, 2006.
- [84] P. Héas, E. Mémin, N. Papadakis, et A. Szantai. Layered estimation of atmospheric mesoscale dynamics from satellite imagery. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, 2007.
- [85] P. Héas, N. Papadakis, et E. Mémin. Time-consistent estimators of 2d/3d motion of atmospheric layers from pressure images. Research Report 6292, INRIA, September 2007.
- [86] D.J. Heeger. Optical flow using spatiotemporal filters. *Int. J. Comput. Vis.*, 1(4) :279–302, 1988.
- [87] F. Heitz et P. Bouthemy. Multimodal estimation of discontinuous optical flow using Markov random fields. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 15(12) :1217–1232, 1993.
- [88] I. Herlin, E. Huot, J-P. Berroir, F-. Le Dimet, et G. Korotaev. Estimation of a motion field on satellite images from a simplified ocean circulation model. In *Proc. Int. Conf. Image Processing, ICIP'06*, pages 1077–1080, 2006.
- [89] G. Hermosillo, C. Chefd'hotel, et O. Faugeras. Variational methods for multimodal matching. *Int. J. Comput. Vis.*, 50(3) :329–343, 2002.

- [90] E. V. Hólm. Lecture notes on assimilation algorithms, 2003.
- [91] P. Holland et R. Welsch. Robust regression using iteratively reweighted least-squares. *Commun. Statis.-Theor. Meth.*, A6(9) :813–827, 1977.
- [92] P. Holmes, J. L. Lumley, et G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, symmetry and dynamical systems*. Cambridge University Press, 1996.
- [93] J.R. Holton. *An introduction to dynamic meteorology*. Academic press, 1992.
- [94] M. Honnorat, F.-X. Le Dimet, et J. Monnier. On a river hydraulics model and Lagrangian data assimilation. In *Proc. Int. Conf. on Adaptive Modeling and Simulation, ADMOS'05*, 2005.
- [95] B. Horn et B. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [96] E. Huot, T. Isambert, I. Herlin, J.P. Berroir, et G. Korotaev. Data assimilation of satellite images within an oceanographic circulation model. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2006.
- [97] J. Jackson, A. Yezzi, et S. Soatto. Tracking deformable moving objects under severe occlusions. *IEEE Conference on Decision and Control*, December 2004.
- [98] B. Jähne. *Spatio-temporal image processing*, volume 751 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1993.
- [99] R. E. Kalman et R. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. of the ASME – J. of Basic Engineering*, 83(D) :93–108, 1961.
- [100] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. of the ASME – J. of Basic Engineering*, pages 35–45, 1960.
- [101] M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'87*, pages 259–268, 1987.
- [102] G. A. Kivman. Sequential parameter estimation for stochastic systems. *Nonlinear Processes in Geophys.*, 10 :253–259, 2003.
- [103] T. Kohlberger, E. Mémin, et C. Schnörr. Variational dense motion estimation using the helmholtz decomposition. In *Proc. Int. Conf. on Scale-Space and PDE methods in Comput. Vis., Scale-Space'03*, pages 432–448, 2003.
- [104] A. Kong, J. S. Liu, et W. H. Wong. Sequential imputations and bayesian missing data problems. *J. Am. Stat. Assoc.*, 89(425) :278–288, 1994.
- [105] A. Kurganov et D. Levy. A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(4) :1461–1488, 2000.
- [106] A. Kurganov et E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. of Comput. Phys.*, 160(1) :241–282, 2000.
- [107] S. Lai et B. Vemuri. Reliable and efficient computation of optical flow. *Int. J. Comput. Vis.*, 29(2) :87–105, 1998.
- [108] F.-X. Le Dimet et J. Blum. Assimilation de données pour les fluides géophysiques. *MATA-PLI, Bulletin de la SMAI*, 67 :35–55, 2002.
- [109] F.-X. Le Dimet et O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38(A) :97–110, 1986.

- [110] A. Leonard. Vortex methods for flow simulation. *J. of Comput. Phys.*, 37 :289–335, 1980.
- [111] M. Leventon, E. Grimson, et O. Faugeras. Statistical shape influence in geodesic active contours. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'00*, 2000.
- [112] D. Levy, G. Puppo, et G. Russo. A third order central weno scheme for 2d conservation laws. *Appl. Num. Math. : Trans. of IMACS*, 33(1–4) :415–421, 2000.
- [113] D. Levy et E. Tadmor. Non-oscillatory central schemes for the incompressible 2-D euler equations. *Math. Res. Let.*, 4 :321–340, 1997.
- [114] Z. Li et I. M. Navon. Optimality of 4d-var and its relationship with the kalman filter and kalman smoother. *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 127(572) :661–683, 2001.
- [115] J. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [116] J.L. Lions. *Optimal control of systems governed by PDEs*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [117] B. Lucas et T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereovision. In *Int. Joint Conf. on Artificial Intel. (IJCAI)*, pages 674–679, 1981.
- [118] J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulence. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, 1967.
- [119] R. Malladi, J.A. Sethian, et B.C. Vemuri. Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 17(2) :158–175, 1995.
- [120] A.R. Mansouri. Region tracking via level set PDEs without motion computation. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 24(7) :947–961, 2003.
- [121] A.R. Mansouri, A. Mitiche, et M. Aron. Pde-based region tracking without motion computation by joint space-time segmentation. In *Proc. Int. Conf. Image Processing, ICIP'03*, pages 113–116, 2003.
- [122] P. Martin, P. Réfrégier, F. Goudail, et F. Guéroult. Influence of the noise model on level set active contours segmentation. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 26(6) :799–803, 2004.
- [123] S.P. McKenna et W.R. McGillis. Performance of digital image velocimetry processing techniques. *Experiments in fluids*, 32 :106–115, 2002.
- [124] D. McKenzie. Ensemble kalman filters bring weather models up to date. *SIAM News*, 36(8), 2003.
- [125] E. Mémin et P. Pérez. Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(5) :703–719, 1998.
- [126] E. Mémin et P. Pérez. Hierarchical estimation and segmentation of dense motion fields. *Int. J. Comput. Vis.*, 46(2) :129–155, 2002.
- [127] A. Mitiche, R. Feghali, et A. Mansouri. Motion tracking as spatio-temporal motion boundary detection. *Robotics and Autonomous Systems*, 43(1) :39–50, 2003.
- [128] D. Mumford et J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 42 :577–685, 1989.
- [129] H. Nagel et W. Enkelmann. An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 8 :565–593, 1986.

- [130] H. Nessyahu et E. Tadmor. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. of Comput. Phys.*, 87(2) :408–463, 1990.
- [131] M. Niethammer et A. Tannenbaum. Dynamic geodesic snakes for visual tracking. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'04*, 2004.
- [132] T. Nir, A.M. Bruckstein, et R. Kimmel. Over parameterized optical-flow. Technical Report CIS-2006-05, Technion - Israel Institute of Technology, 2006.
- [133] B.R. Noack, K. Afanasiev, M. MorzyDski, G. Tadmor, et F. Thiele. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *J. of Fluid Mech.*, 497 :335–363, 2003.
- [134] J.-M. Odobez et P. Bouthemy. Robust multiresolution estimation of parametric motion models. *J. of Visual Communication and Image Representation*, 6(4) :348–365, 1995.
- [135] B. Oksendal. *Stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1998.
- [136] S. Osher et N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [137] S. Osher et J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *J. of Comput. Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [138] PALM. *Projet d'assimilation par logiciel multi-methodes*. <http://www.cerfacs.fr/palm/>.
- [139] N. Papadakis, T. Corpetti, et É. Mémin. Dynamically consistent optical flow estimation. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'07*, 2007.
- [140] N. Papadakis et É. Mémin. A variational framework for spatio-temporal smoothing of fluid motions. In *Proc. Scale Space and Variational Methods, SSVM'07*, pages 603–615, 2007.
- [141] N. Papadakis et É. Mémin. Variational optimal control technique for the tracking of deformable objects. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'07*, 2007.
- [142] N. Papadakis, E. Mémin, et F. Cao. A variational approach for object contour tracking. *Variational, Geometric and Level Set Methods, VLSM'05*, 3752 :259–270, 2005.
- [143] N. Papadakis, É. Mémin, et T. Corpetti. Variational estimation of 2d time consistent dense motion from image sequence. In *European Geoscience Union, Nonlinear processes in geophysics, Data assimilation in the presence of nonlinearities, EGU'07*, 2007.
- [144] N. Papadakis et P. Héas É. Mémin. Image assimilation for motion estimation of atmospheric layers with shallow-water model. In *Proc. Asian Conf. Comput. Vis., ACCV'07*, 2007.
- [145] N. Papenberg, A. Bruhn, T. Brox, S. Didas, et J. Weickert. Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping. *Int. J. Comput. Vis.*, 67(2) :141–158, 2006.
- [146] C. Papin. *Analyse spatio-temporelle d'images satellitaires météorologiques : détection et suivi de structures nuageuses critiques*. PhD thesis, Université de Rennes I, Décembre 1999.
- [147] N. Paragios. A level set approach for shape-driven segmentation and tracking of the left ventricle. *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 22(6) :773–776, 2003.
- [148] N. Paragios et R. Deriche. A PDE-based level set approach for detection and tracking of moving objects. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'98*, pages 1135–1139, 1998.

- [149] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 22 :266–280, 2000.
- [150] N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions : a new framework to deal with frame partition problems in computer vision. *J. of Visual Communication and Image Representation*, 13 :249–268, 2002.
- [151] L. Perret. *Étude du couplage instationnaire calculs expériences en écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Poitiers, France, Décembre 2004.
- [152] L. Perret, E. Collin, et J. Delville. Polynomial identification of pod based low-order dynamical system. *J. of Turbulence*, 7(17) :1–15, 2006.
- [153] N. Peterfreund. Robust tracking of position and velocity with Kalman snakes. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.*, 21(6) :564–569, 1999.
- [154] D. T. Pham. Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Mon. Weather Rev.*, 129 :1194–1207, 2001.
- [155] M. Rajaei, S. Karlson, et L. Sirovich. Low-dimensional description of free shear flow coherent structures and their dynamical behavior. *J. of Fluid Mechanics*, 258 :1401–1402, 1994.
- [156] Y. Rathi, N. Vaswani, A. Tannenbaum, et A. J. Yezzi. Particle filtering for geometric active contours with application to tracking moving and deforming objects. In *Proc. IEEE Comput. Vis. and Pat. Rec. CVPR'05*, volume 2, pages 2–9, 2005.
- [157] D. Rempfer. Investigations of boundary layer transition via galerkin projection of empirical eigenfunctions. *J. of Physics Fluids*, 8 :175–188, 1996.
- [158] P. Ruhnau, T. Kohlberger, H. Nobach, et C. Schnörr. Variational optical flow estimation for particle image velocimetry. *Exp. Fluids*, 38(1) :21–32, 2005.
- [159] P. Ruhnau, A. Stahl, et C. Schnörr. Variational estimation of experimental fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. *Meas. Sci. Technol.*, 18(3) :755–763, 2007.
- [160] J. Schmetz, K. Holmlund, J. Hoffman, B. Strauss, B. Mason, V. Gaertner, A. Koch, et L. V. De Berg. Operational cloud-motion winds from meteosat infrared images. *J. of Appl. Meteorology*, 32(7) :1206–1225, 1993.
- [161] J.A. Sethian. *Level set methods*. Cambridge University-Press, 1996.
- [162] C.-W. Shu. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations, Lecture Notes in Mathematics*, volume 1697, chapter Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws, pages 325–432. Springer Berlin, 1998.
- [163] E. Simoncelli. *Distributed representation and analysis of visual motion*. PhD thesis, MIT, 1993.
- [164] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part i-iii. *Quarterly of Appl. Math.*, 45(3) :561–590, 1987.
- [165] B. Sportisse et F.-X. Le Dimet, editors. *Data Assimilation for Geophysical Flows*. Springer, 2002.
- [166] G. Sundaramoorthi, A. Yezzi, et A.C. Mennucci. New possibilities with sobolev active contours. In *Proc. Scale Space and Variational Methods, SSV'07*, pages 153–164, 2007.

- [167] TAF. *Automatic generation of adjoint code*.
<http://www.fastopt.com/>.
- [168] O. Talagrand. *Variational assimilation. Adjoint equations*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [169] O. Talagrand et P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 113 :1311–1328, 1987.
- [170] TAPENADE. *Source-to-source f77 Automatic differentiation*.
<http://www-sop.inria.fr/tropics/tapenade.html>.
- [171] P. J. Van Leeuwen. A variance-minimizing filter for large-scale applications. *Mon. Weather Rev.*, 131 :2071–2084, 2003.
- [172] P-A. Vidard. *Vers une prise en compte de l'erreur modèle en assimilation de données 4D-variationnelle*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Décembre 2001.
- [173] J. Weickert, A. Bruhn, et C. Schnörr. Lucas/kanade meets horn/schunck : Combining local and global optic flow methods. *Int. J. Comput. Vis.*, 61(3) :211–231, 2005.
- [174] J. Weickert et C. Schnörr. Variational optic-flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J. Math. Imaging and Vision*, 14(3) :245–255, 2001.
- [175] K. Willcox. Unsteady flow sensing and estimation via the gappy proper orthogonal decomposition. *Computers and fluids*, 35(2) :208–226, January 2005.
- [176] Z. Xu et C-W. Shu. Anti-diffusive finite difference weno methods for shallow water with transport of pollutant. *J. Comput. Math.*, 24(3) :239–251, 2006.
- [177] H. Yahia et J.P. Berroir. Segmentation of deformable templates with level sets characterized by particle systems. In *Proc. Int. Conf. Pat. Rec., ICPR'98*, pages 1421–1423, 1998.
- [178] J. Yuan, C Schnörr, et E. Mémin. Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *J. Math. Imaging and Vision*, 28(1) :67–80, 2007.
- [179] A.L. Yuille et N.M. Grzywacz. The motion coherence theory. In *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis., ICCV'88*, pages 344–353, 1988.
- [180] X. Zeng, L. H. Staib, R. T. Schultz, et J. S. Duncan. Segmentation and measurement of the cortex from 3-d mr images using coupled-surfaces propagation. *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 18(10) :927–937, 1999.
- [181] H. Zhao, T. Chan, B. Merriman, et S. Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *J. of Comput. Phys.*, 127 :179–195, 1996.
- [182] L. Zhu, Y. Yang, S. Haker, et A. Tannenbaum. An image morphing technique based on optimal mass preserving mapping. *IEEE Trans. Image Processing*, 16(6) :1481–1495, 2007.
- [183] S. Zimeras, T. Corpetti, E. Mémin, et P. Pérez. Motion estimation using satellite data. In *19th Leeds Annual Statistical Research (LASR) Workshop "The Statistics of Directions, Shapes and Images"*, 2000.

Liste des publications

Journaux

- J. D'adamo, N. Papadakis, É. Mémin et G. Artana – **Variational assimilation of POD low-order dynamical systems** – *Journal of Turbulence*, volume 8, 2007.
- P. Héas, É. Mémin, N. Papadakis et A. Szantai – **Layered estimation of atmospheric mesoscale dynamics from satellite imagery** – *accepté pour publication dans IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing*.
- N. Papadakis et É. Mémin – **A variational technique for time consistent tracking of curves and motion** – *soumis à Journal of Mathematical Imaging and Vision*.
- N. Papadakis et É. Mémin – **An optimal control technique for fluid motion estimation** – *soumis à SIAM Journal on Imaging Sciences*.
- N. Gengembre, N. Papadakis et É. Mémin – **Data assimilation with the Weighted Ensemble Kalman Filter** – *soumis à IEEE transactions on Signal Processing*.

Rapport de recherche

- N. Papadakis et É. Mémin – **A variational method for joint tracking of curve and motion** – Rapport de Recherche INRIA, numéro 6283, Septembre 2007.
- P. Héas, N. Papadakis et É. Mémin – **Time-consistent estimators of 2D/3D motion of atmospheric layers from pressure images** – Rapport de Recherche INRIA, numéro 6292, Septembre 2007.

Conférences internationales

- N. Papadakis, P. Héas et É. Mémin – **Image assimilation for motion estimation of atmospheric layers with shallow-water model** – *Asian Conference on Computer Vision, ACCV'07*, Tokyo, Japon, Novembre 2007.
- N. Papadakis et É. Mémin – **Variational optimal control technique for the tracking of deformable objects** – *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV'07*, Rio de Janeiro, Brésil, Octobre 2007.

- N. Papadakis, T. Corpetti et É. Mémin – **Dynamically consistent optical flow estimation** – *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV'07*, Rio de Janeiro, Brésil, Octobre 2007.
- N. Papadakis, P. Héas et É. Mémin – **Motion estimation of 2D atmospheric layers with variational assimilation techniques** – *EUMETSAT/AMS Conference*, Amsterdam, Netherlands, Septembre 2007.
- A. Szantai, A. Cuzol, P. Héas, N. Papadakis, E. Mémin, B. Wieneke, L. Alvarez, F. Becker and P. Lopes – **Comparison of MSG atmospheric motion vector fields produced by different methods** – *EUMETSAT/AMS Conference*, Amsterdam, Netherlands, Septembre 2007.
- T. Corpetti, N. Papadakis et É. Mémin – **Dense estimation of motion fields on Meteosat Second Generation images using a dynamical consistency** – *IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symp, IGARSS '07*, Barcelona, Spain, Juillet 2007.
- N. Papadakis et E. Mémin – **A variational framework for spatio-temporal smoothing of fluid motions** – *Scale Space and Variational Methods, SSVN'07*, Ischia, Italie, Mai 2007.
- P. Héas, É. Mémin et N. Papadakis – **A consistent spatio-temporal motion estimator for atmospheric layers** – *Scale Space and Variational Methods, SSVN'07*, Ischia, Italie, Mai 2007.
- N. Papadakis, É. Mémin et T. Corpetti – **Variational estimation of 2D time consistent dense motion from image sequence** – *European Geoscience Union, Nonlinear processes in geophysics, Data assimilation in the presence of nonlinearities, EGU'07*, Vienne, Autriche, Avril 2007.
- P. Héas, É. Mémin et N. Papadakis – **Dense estimation of layer motions in the atmosphere** – *International Conference on Pattern Recognition, ICPR'06*, Hong-Kong, Août 2006.
- N. Papadakis, É. Mémin and F. Cao – **A variational approach for object contour tracking** – *Workshop on Variational and Level Set Methods of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision, VLSSM'05*, Pékin, Chine, Octobre 2005.

Conférences nationales

- N. Papadakis et É. Mémin – **Estimation variationnelle et cohérente en temps de mouvements fluides** – *16ème Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, RFIA'08*, Amiens, France, Janvier 2008.
- N. Papadakis, T. Corpetti et É. Mémin – **Estimation de champs de mouvement denses cohérents en temps à partir de séquences d'images** – *Colloque Météosat Seconde génération*, Dijon, Septembre 2007.

-
- N. Papadakis, É. Mémin, J. D'adamo et G. Artana – **Assimilation variationnelle de systèmes dynamiques d'ordre faible** – *3ème Congrès national de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI 2007)*, Grenoble, Juin 2007.
 - N. Papadakis, A. Cuzol et É. Mémin – **Suivi du mouvement fluide : approche stochastique et variationnelle** – *In Journées Activités Universitaires de Mécanique, AUM'06*, La Rochelle, France, Septembre 2006.
 - N. Papadakis, É. Mémin et F. Cao – **Une approche variationnelle pour le suivi de contours** – *15ème Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, RFIA'06*, Tours, France, Janvier 2006.

Résumé

Cette thèse traite de l'utilisation de méthodes séquentielles et variationnelles pour des problèmes de suivi dans des séquences d'images. Ces méthodes cherchent à estimer l'état d'un système à partir d'un modèle d'évolution dynamique et d'un ensemble d'observations bruitées et généralement incomplètes de l'état. Les méthodes séquentielles, largement utilisées par la communauté de vision par ordinateur, sont souvent limitées à des variables d'état de faibles dimensions. En météorologie et en océanographie, les approches d'assimilation de données sont plus communément employées. Ces techniques permettent de traiter des variables de grandes dimensions.

Afin de considérer l'imperfection de dynamiques complexes visualisées sur le plan image (projection 3D/2D), nous avons aussi abordé des problèmes d'assimilation de données où la loi d'évolution du système est imparfaite. Dans nos applications, les observations de l'état sont obtenues directement ou indirectement par les mesures image.

En considérant une modélisation imparfaite de la dynamique, ces techniques sont tout d'abord appliquées à divers problèmes de vision par ordinateur : le suivi de courbe, l'estimation de champs de mouvement fluide et le suivi couplé de courbe et de champs de vecteurs. Nous montrons comment l'assimilation de données permet de gérer des occultations totales pendant le suivi d'objets d'intérêt sur une séquence d'images.

Nous traitons enfin des problèmes de suivi pour deux applications particulières où une modélisation plus précise de la dynamique peut être utilisée. Nous nous intéressons ainsi à l'estimation de mouvement de couches atmosphériques à partir d'images satellitaires, puis étudions l'estimation de coefficients associés à des systèmes dynamiques réduits associés à la visualisation d'écoulements expérimentaux.

Mots-clés : Contrôle optimal, filtrage de Kalman, principes variationnels, assimilation de données, traitement d'image, vision par ordinateur, suivi de courbes, mouvement fluide, estimation du mouvement, suivi de couches atmosphériques, modèles dynamiques réduits.

Abstract

This thesis presents the use of sequential and variational methods for tracking applications in image sequences. These techniques aim at estimating a system state from a dynamical model and a set of noisy and sparse observations. Sequential methods are usually used in computer vision community but limited to small dimensional state spaces. In meteorology or oceanography, data assimilation methods are often considered. These approaches enable to deal with high dimensional state spaces.

In order to consider the imperfection of complex dynamics visualised in image plane (due to 3D/2D projection), we study the use of imperfect modeling in data assimilation. In our applications, the observations are obtained directly or indirectly from images.

We first apply these methods to various tracking problems of computer vision (with an imperfect modelisation of the dynamical model) : curve tracking, fluid motion estimation and joint tracking of curve and motion. We thus show that data assimilation enables to deal with complete data occlusions.

Two particular applications where an accurate modelisation of the dynamic can be considered are finally studied : atmospheric layer motion estimation from satellite imagery and control of low order dynamical system from experimental visualisation.

Keywords : Control theory, Kalman filtering, variational principles, data assimilation, image processing, computer vision, curve tracking, fluid motion, motion estimation, atmospheric layer tracking, low order dynamical systems.