

N° d'ordre : 3440

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention : Mathématiques et applications

par

Anne Cuzol

Équipe d'accueil : VISTA (IRISA, RENNES)

École doctorale : Mathématiques, Informatique, Signal, Électronique et
Télécommunications

Composante Universitaire : IFSIC, Université de Rennes 1

Titre de la thèse :

**Analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images :
estimation de champs de vitesses et suivi temporel par filtrage
stochastique non linéaire.**

Soutenue le 12 décembre 2006, devant la commission d'examen

Composition du jury :

M. François	LE GLAND	Président
M. Georges-Henri	COTTET	Rapporteurs
M. Pierre	DEL MORAL	
M. Patrick	BOUTHÉMY	Examineurs
M. Étienne	MÉMIN	
M. Christoph	SCHNÖRR	

Remerciements

Je remercie François Le Gland pour avoir présidé mon jury de thèse, et j'adresse mes remerciements à Georges-Henri Cottet et Pierre Del Moral pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux. J'exprime également ma reconnaissance à Christoph Schnörr et Patrick Bouthemy pour leurs rôles d'examineurs. Merci à l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à remercier Etienne Mémin pour son encadrement remarquable durant ces années. Un grand merci (parmi tant d'autres) pour sa confiance et son enthousiasme permanent et communicatif.

Merci aux membres passés et présents du projet VISTA pour leur soutien et ce cadre de travail très agréable.

Merci aux proches pour leurs encouragements, d'ici ou de loin.

Table des matières

Introduction générale	9
I Estimation de champs de vitesses en imagerie fluide	13
Introduction	15
1 Rappels généraux	17
1.1 Champs de vecteurs bidimensionnels	17
1.1.1 Vorticité et divergence	17
1.1.2 Décomposition de Helmholtz	18
1.1.3 Loi de Biot-Savart	18
1.2 Relations fondamentales	19
1.2.1 Équation de continuité	19
1.2.2 Équation de Navier-Stokes	20
2 Estimation du mouvement : approches existantes	21
2.1 Méthodes de corrélation	21
2.2 Estimateurs denses dédiés aux fluides	22
2.2.1 Cadre général	22
2.2.2 Modèles de données adaptés aux fluides	24
2.2.3 Terme de régularisation adapté aux fluides	26
2.2.4 Extensions	26
2.3 Représentation paramétrique du mouvement	28
2.3.1 Modèles de transformation	28
2.3.2 Méthodes d'estimation	28
2.4 Synthèse	30
3 Méthode d'estimation paramétrique	33
3.1 Modèle de particules de vortex	33
3.1.1 Paramétrisation de la vorticité	33
3.1.2 Expression du champ de vecteurs	34
3.2 Représentation paramétrique du champ	35
3.2.1 Fonction de lissage	35
3.2.2 Composante solénoïdale	35
3.2.3 Extension à la composante irrotationnelle	36
3.2.4 Représentation complète	36

3.3	Problème d'estimation	37
3.4	Méthode d'estimation	38
3.4.1	Estimation incrémentale	38
3.4.2	Problème de minimisation	39
3.4.3	Gradient conjugué non linéaire	40
3.4.4	Ajustement des positions	40
3.4.5	Méthode de déplacement des positions	42
3.4.6	Schéma global d'estimation	45
3.5	Estimation à partir d'un champ	45
3.6	Conclusion	46
4	Validation expérimentale	47
4.1	Exemples synthétiques	47
4.1.1	Particules de vortex et de source	47
4.1.2	Turbulence 2D derrière un sillage	50
4.1.3	Autre exemple de turbulence 2D	53
4.2	Application en météorologie	57
4.2.1	Canal infrarouge du satellite Météosat	57
4.2.2	Canal vapeur d'eau de Météosat	58
4.3	Application en mécanique des fluides expérimentales	59
4.4	Application en imagerie médicale	60
	Conclusion	63
II	Suivi temporel de champs de vitesses d'écoulements fluides par filtrage non linéaire	65
	Introduction	67
5	Suivi de structures fluides : approches existantes	69
5.1	Suivi de structures caractéristiques	69
5.1.1	Points singuliers	69
5.1.2	Évolution de contours	71
5.2	Suivi de champs denses de vitesses	71
5.2.1	Régularisation spatio-temporelle	71
5.2.2	Suivi variationnel	72
5.2.3	Filtrage séquentiel	74
5.3	Synthèse	74
6	Problème de filtrage stochastique	77
6.1	Modèles à espace d'état	77
6.1.1	Cas discret	77
6.1.2	Cas continu-discret	78
6.1.3	Cas continu	79
6.2	Exemples d'applications	79
6.3	Modélisations existantes en analyse d'images	80

6.4	Filtrage optimal	81
6.4.1	Cas discret	81
6.4.2	Cas continu-discret	81
6.4.3	Cas continu	82
6.5	Résolution du filtre optimal	82
6.5.1	Filtre de Kalman	82
6.5.2	Extensions	84
6.5.3	Filtrage particulaire	85
6.6	Synthèse	91
7	Suivi de champs de vitesses par filtrage stochastique non linéaire	93
7.1	Construction du modèle de filtrage	93
7.1.1	Représentation réduite de l'état	93
7.1.2	Modélisation de l'évolution temporelle du fluide	94
7.1.3	Interprétation probabiliste de l'équation de Navier-Stokes	97
7.1.4	Modèle d'évolution de l'état	98
7.1.5	Modèle de mesures	99
7.2	Mise en place du filtrage	101
7.3	Réduction de dimension du problème de filtrage	103
7.3.1	Directions d'instabilité d'un système	103
7.3.2	Réduction de dimension dans le cadre du filtrage particulaire continu-discret	104
7.4	Conclusion	105
8	Validation expérimentale	107
8.1	Séquence synthétique de particules de vortex	107
8.2	Séquence synthétique de turbulence 2D	113
8.3	Application en mécanique des fluides expérimentales	118
8.4	Applications en météorologie	121
	Conclusion	125
	Conclusion générale et perspectives	127
	Liste des figures	130
	Bibliographie	134

Introduction générale

L'analyse des écoulements fluides à partir d'images est liée à de nombreuses applications dans le domaine des sciences environnementales (météorologie, climatologie, océanographie), de la mécanique des fluides expérimentale ou de l'imagerie médicale. En météorologie, l'intérêt se porte sur la détection et la prédiction de situations critiques liés à des phénomènes particuliers (dépressions, tornades), et sur l'observation du climat dans sa globalité. En océanographie, les applications concernent l'étude de l'évolution des courants marins ou la dérive d'entités passives (icebergs, nappes de pollution). La mécanique des fluides expérimentale s'intéresse au contrôle et à la compréhension d'écoulements particuliers tels que les écoulements turbulents, et à l'amélioration de la modélisation des phénomènes physiques. Les applications sont très nombreuses et ont un impact industriel considérable dans le domaine des transports, dans le secteur pharmaceutique ou encore dans le secteur agro-alimentaire. L'analyse des écoulements fluides intervient également dans le domaine de la microfluidique ou en imagerie médicale, où l'application concernée est l'étude de l'écoulement des biofluides.

Pour toutes les applications concernées, la connaissance de l'information de mouvement est primordiale afin d'analyser et de comprendre les écoulements observés. Dans le domaine de la météorologie, l'objectif principal est la reconstruction des champs de vent. En mécanique des fluides expérimentale, la description et l'analyse de l'écoulement s'effectuent à partir des quantités relatives à son mouvement (vitesse, vorticité, divergence).

Une information quantitative sur le mouvement peut directement être obtenue par des systèmes de mesure physiques traditionnels. Dans le contexte de la mécanique des fluides expérimentale, la vitesse peut ainsi être mesurée par un dispositif placé dans l'écoulement observé (anémométrie à fil chaud par exemple). Dans le domaine des sciences géophysiques, les capteurs *in situ* tels que les ballons sonde, les bouées, les stations au sol ou les capteurs situés sur des avions ou des bateaux permettent également de fournir des données sur la vitesse et l'orientation du vent ou des courants marins. Cependant, les données provenant de ce type de capteurs sont éparées, coûteuses et obtenues de manière intrusive.

Avec le développement des techniques de visualisation, l'intérêt s'est naturellement porté sur l'information pouvant être apportée par les images. Dans le cadre de l'étude expérimentale des écoulements fluides, l'utilisation de caméras modernes associées à des nappes laser permet désormais l'enregistrement de séquences d'images à très haute résolution. Dans le domaine des sciences environnementales, les capteurs des satellites bénéficient également des développements techniques (caméras rapides, lasers de haute puissance). L'imagerie satellitaire fournit ainsi une information plus globale que les capteurs, avec une résolution spatiale des données plus fine. La quantité d'information spatio-temporelle disponible augmente régulièrement et devient quasi-continue.

L'information apportée par les séquences d'images est complète et précieuse, cependant elle est plus difficile à exploiter que des mesures *in situ*. L'information sur les phénomènes observés doit en effet être extraite des données de luminance. Ce problème est délicat puisque généralement, l'information recherchée n'est pas une fonction simple des données brutes de l'image.

Dans le cas d'images décrivant des écoulements fluides, l'extraction de l'information de mouvement est un problème particulièrement complexe. Outre le problème de la perte de dimension due à la projection d'un mouvement tridimensionnel dans le plan image et le fait que les images soient parfois peu contrastées, les images d'écoulements fluides présentent des distorsions spatiales et temporelles importantes de la fonction de la luminance. De plus, les mouvements associés à un écoulement fluide sont caractérisés par la présence de zones tourbillonnaires ou de divergence. Cette spécificité fait que l'utilisation des techniques classiques d'estimation de mouvement issues de la communauté de vision par ordinateur n'est pas adaptée. Ces techniques ont en effet été développées pour des mouvements quasi-rigides, et s'appuient sur des caractéristiques spatio-temporelles stables de la fonction de luminance.

Le développement de nouvelles techniques d'extraction ou d'analyse de champs de vitesses d'écoulements fluides à partir de séquences d'images constitue donc un domaine de recherche aux applications nombreuses et cruciales. Le travail présenté ici s'inscrit dans ce contexte et s'articule autour de deux axes principaux : l'estimation de champs de vitesses et leur suivi temporel.

Dans le domaine de la vision par ordinateur, le problème de l'estimation de mouvement est ancien et son étude a donné lieu à un très grand nombre de contributions. Le cas particulier de l'imagerie fluide a attiré l'attention de la communauté il y a quelques années. Il a alors été proposé d'adapter les techniques génériques d'estimation en incorporant des contraintes physiques adaptées aux phénomènes étudiés. Cette approche a conduit au développement de nouvelles méthodes d'analyse du mouvement. Les méthodes proposées offrent une alternative aux techniques traditionnellement utilisées dans les domaines de la météorologie et de la mécanique des fluides expérimentale, en permettant l'extraction d'une quantité d'information plus importante.

Le problème de suivi de champs denses de vitesses n'a quant à lui jamais été traité dans le domaine de la vision. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans les applications usuellement traitées (suivi d'objets, de personnes), il est très rare de disposer d'une information sur la loi d'évolution des éléments à suivre. Le suivi peut par contre s'appuyer sur des caractéristiques informatives des objets, qui restent stables dans le temps. Les méthodes de suivi s'intéressent donc généralement au suivi d'éléments de taille réduite (points d'intérêt, courbes). Dans le cas des images décrivant des écoulements fluides, la situation est différente. Il est possible de s'appuyer sur une connaissance des lois d'évolution du fluide, mais on ne dispose pas de descripteurs simples pouvant être aisément suivis dans le temps. Le suivi du champ de vitesses dans son ensemble conduit alors à un problème de suivi de très grande dimension, difficile à traiter. Lorsque le suivi est formulé dans un cadre probabiliste, cette dimension élevée est d'autant plus problématique et nécessite le développement de méthodes appropriées.

La première partie du document portera sur le problème de l'estimation du mouvement

à partir d'images décrivant l'évolution d'un écoulement fluide. Un chapitre préliminaire présentera quelques rappels de définitions et propriétés relatives aux champs de vecteurs plans et à la mécanique des fluides. La synthèse des travaux existants dans le domaine de l'estimation de mouvement mettra en avant qu'aucune des méthodes ne permet d'obtenir une représentation compacte des champs de vitesses estimés. Cette observation nous conduira à proposer une méthode d'estimation paramétrique dédiée aux mouvements fluides, fournissant une solution de faible dimension. Une validation expérimentale de la méthode sera enfin proposée sur différents types d'images, provenant de divers domaines d'applications.

La deuxième partie traitera du problème de suivi temporel de champs de vitesses à partir de séquences d'images. L'état de l'art mettra en avant que le problème de suivi de points caractéristiques ou de courbes a été abordé précédemment, mais qu'aucune de ces méthodes n'intègre l'information disponible sur l'évolution temporelle du phénomène observé et ne garantit une cohérence temporelle des estimations. La synthèse des travaux existants indiquera également que le suivi de champs de vitesses reste un problème de recherche ouvert, et que les rares contributions dans ce domaine sont actuelles. Nous proposerons dans cette deuxième partie de formuler le problème de suivi de champs de vitesses d'écoulements fluides comme un problème de filtrage bayésien. Cette approche permettra d'introduire un modèle simple sur la dynamique de l'écoulement dans le processus d'estimation. La représentation de taille réduite des champs de vitesses proposée dans la première partie du document sera alors cruciale pour construire le modèle de filtrage. La méthode de suivi qui en découlera permettra de prédire et d'estimer les champs de déplacements sur toute la séquence d'images, en garantissant la cohérence temporelle des estimations. Les résultats obtenus par cette technique seront présentés et discutés dans le dernier chapitre.

Première partie

Estimation de champs de vitesses en
imagerie fluide

Introduction

La première partie de ce document traite de l'estimation d'un mouvement apparent communément appelé "flot optique" à partir d'une séquence d'images décrivant des phénomènes fluides. Ce mouvement apparent consiste en la projection d'une scène tridimensionnelle dans le plan image. Dans le domaine de la mécanique des fluides expérimentales, les images sont acquises dans un plan laser après avoirensemencé l'écoulement par des traceurs (particules, fumée). La mesure du déplacement de ces particules permet d'obtenir des données de vitesses empiriques de l'écoulement dans le plan de visualisation. Ces données peuvent ensuite être comparées à des modèles théoriques. Dans le cas d'écoulements complexes, ces données constituent un moyen de comprendre l'écoulement. Dans le domaine des sciences environnementales telles que la météorologie ou l'océanographie, les images sont fournies par les satellites en orbite autour du globe terrestre, et il s'agit de mesurer le déplacement des courants atmosphériques ou océaniques.

L'estimation d'un champ de vitesses à partir d'images est difficile puisque les variations d'intensité de l'image sont les seules données disponibles pour remonter au mouvement. Dans le domaine de la vision par ordinateur, ce problème est ancien et a donné lieu à de nombreux travaux. Néanmoins, ces méthodes ont été bâties pour des objets rigides ou peu déformables, et sous une hypothèse de conservation de la luminance d'un point 3D le long de sa trajectoire. Dans le cas particulier des écoulements fluides, le développement de méthodes d'estimation de mouvement spécifiques est nécessaire et de nombreux problèmes restent ouverts. Cette première partie a pour but de situer et de présenter la contribution que nous proposons dans ce domaine.

Le premier chapitre présente des définitions et propriétés relatives aux champs de vecteurs bidimensionnels. Quelques rappels de mécanique des fluides sont également proposés, en se restreignant aux notions utilisées dans la suite du document.

Une synthèse des travaux relatifs à l'estimation du mouvement à partir d'images est présentée dans le chapitre 2. L'accent est mis sur les méthodes usuellement utilisées dans les domaines d'application concernés par les fluides, ainsi que sur les méthodes de flot optique adaptées aux mouvements fluides, récemment proposées dans le domaine de la vision par ordinateur. Un rappel des modélisations paramétriques existantes est enfin effectué, en étendant l'état de l'art au contexte non rigide.

Le chapitre 3 décrit la méthode d'estimation paramétrique que nous proposons. Celle-ci s'appuie sur une modélisation issue du domaine de la simulation numérique d'écoulements fluides. La nature paramétrique de l'estimateur conduit à une représentation compacte du champ de vecteurs estimé.

Des résultats expérimentaux relatifs à divers domaines d'applications sont exposés et

analysés dans le dernier chapitre. La méthode est testée sur des exemples synthétiques où la vérité terrain est connue, ainsi que sur des exemples correspondant à des situations réelles.

Chapitre 1

Rappels généraux

Ce chapitre présente un ensemble de rappels sur les champs de vecteurs bidimensionnels, ainsi que quelques propriétés issues de la mécanique des fluides. Un ouvrage d'introduction à la mécanique des fluides tel que [38] pourra fournir au lecteur un exposé complet et détaillé. Nous nous concentrons ici sur les notions utilisées dans la suite du document. Les liens fondamentaux entre les quantités caractéristiques des mouvements fluides (telles que la vorticité et la divergence) et les champs de vecteurs sont expos es. Des équations de conservation et d'évolution spécifiques aux écoulements de nature fluide sont ensuite présentées.

1.1 Champs de vecteurs bidimensionnels

Un champ de vecteurs bidimensionnel \mathbf{w} est une application définie sur un ensemble born e Ω de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Nous le notons $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^T$, où $\mathbf{x} = (x, y)$ et x et y sont les coordonnées spatiales. Chaque composante du champ de vecteurs est supposée deux fois continûment différentiable : $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.

1.1.1 Vorticité et divergence

Soit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ l'opérateur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x et y . La *divergence* et la *vorticité* du champ de vecteurs sont définies respectivement par :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \cdot \mathbf{w}^\perp, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{w}^\perp = (v, -u)$ est l'orthogonal de \mathbf{w} .

La vorticité rend compte de la présence d'un mouvement tourbillonnaire, alors que la divergence est reliée à la présence de puits ou de sources. Un champ de vecteurs à divergence nulle en tout point est dit *solénoïdal*. Inversement, un champ à vorticité nulle est dit *irrotationnel*.

1.1.2 Décomposition de Helmholtz

Tout champ de vecteurs s'annulant à l'infini peut être décomposé en somme d'une composante irrotationnelle notée \mathbf{w}_{irr} et d'une composante solénoïdale \mathbf{w}_{sol} . Cette décomposition est connue sous le nom de *décomposition de Helmholtz* :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{irr} + \mathbf{w}_{sol}. \quad (1.3)$$

La figure 1.1 illustre la décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs sur un exemple trivial.

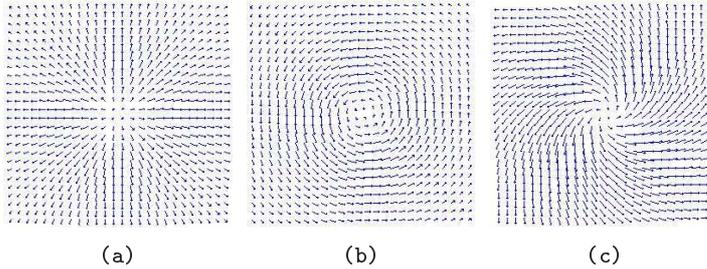


FIG. 1.1: Décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs. (a) Composante irrotationnelle ; (b) Composante solénoïdale ; (c) Somme des deux composantes.

Lorsqu'on ne dispose pas de conditions nulles au bord, une nouvelle composante harmonique (à divergence et vorticité nulles) doit être ajoutée à a la décomposition. Cette dernière est appelée composante de *transport* et notée \mathbf{w}_{tra} . La décomposition du champ de vecteurs s'écrit alors :

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{irr} + \mathbf{w}_{sol} + \mathbf{w}_{tra}. \quad (1.4)$$

Un résultat connu stipule que tout champ irrotationnel est associé à une fonction scalaire ϕ , appelée *potentiel de vitesse*, telle que $\mathbf{w} = \nabla\phi$. De la même manière on peut montrer qu'il existe une fonction scalaire ψ telle que $\mathbf{w}^\perp = \nabla\psi$. C'est la *fonction de courant*.

La décomposition de Helmholtz peut être réécrite en termes de fonctions de potentiel :

$$\mathbf{w} = \nabla\phi + \nabla^\perp\psi. \quad (1.5)$$

1.1.3 Loi de Biot-Savart

En calculant successivement la divergence et la vorticité du champ \mathbf{w} décrit par (1.5), les fonctions de potentiel définies précédemment peuvent être exprimées comme solutions de deux équations de Poisson :

$$\Delta\phi = \text{div } \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \Delta\psi = \text{curl } \mathbf{w}, \quad (1.6)$$

avec $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ opérateur Laplacien.

Ces solutions s'écrivent comme un produit de convolution de la manière suivante :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = G * \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (1.7)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \operatorname{curl} \mathbf{w}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = G * \operatorname{curl} \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (1.8)$$

où G est la fonction de Green associée au Laplacien bidimensionnel :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x}\|). \quad (1.9)$$

Ces dernières relations permettent d'exprimer les fonctions de potentiel ϕ et ψ à partir de la divergence et de la vorticité du champ. Les champs de vecteurs \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} s'écrivant respectivement comme le gradient et le gradient orthogonal de ces fonctions de potentiel, les équations (1.7) et (1.8) deviennent :

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) = K * \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) = K^\perp * \operatorname{curl} \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (1.11)$$

avec K gradient du noyau de Green :

$$K(\mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi\|\mathbf{x}\|^2}. \quad (1.12)$$

L'équation (1.11) est connue sous le nom d'*intégrale de Biot-Savart*. Ces relations sont cruciales puisqu'elles permettent de reconstruire la composante irrotationnelle du champ de vecteurs à partir de la divergence, et la composante solénoïdale à partir de la vorticité. Il est ainsi possible de retrouver le champ complet à partir des quantités scalaires de vorticité et de divergence.

1.2 Relations fondamentales

1.2.1 Équation de continuité

L'équation de continuité de la mécanique des fluides provient directement de l'hypothèse de la conservation de la masse. Dans un milieu continu en mouvement, soit m la masse d'un fluide de densité ρ , contenue dans un volume V à l'instant t :

$$m(t) = \int_{V(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.13)$$

À partir de l'hypothèse de conservation de la masse ($\frac{dm}{dt} = 0$) on peut alors écrire :

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV(t) = 0, \quad (1.14)$$

où $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ est ici le champ de vitesses tridimensionnel. Cette équation étant vérifiée pour tout volume V , on en déduit l'*équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.15)$$

qui s'écrit encore :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.16)$$

Cette équation relie une variation de la densité ρ du fluide à la variation de son volume.

1.2.2 Équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes décrit l'évolution temporelle d'un fluide en mouvement. Elle est obtenue en appliquant la seconde loi de Newton au fluide. Le bilan des forces exercées sur le fluide (gravité, pression, viscosité) est ainsi égal au produit de sa masse et de l'accélération qu'il subit.

Dans le cas d'un fluide incompressible (tel que $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$), l'équation de Navier-Stokes en dimension 2 s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{w}, \quad (1.17)$$

où p est la pression et ν est le coefficient de viscosité du fluide.

L'équation peut être reformulée en termes de vorticité et de vitesse. En effet, en appliquant l'opérateur curl à (1.17) et en utilisant la contrainte $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ on obtient, en notant ξ la vorticité du fluide :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \xi = \nu \Delta \xi. \quad (1.18)$$

Cette formulation *vorticité-vitesse* de l'équation de Navier-Stokes présente l'avantage de ne plus inclure le terme de pression p . Notons qu'en dimension 3 un terme essentiel de déformation $\zeta \cdot \nabla \mathbf{u}$ apparaît dans l'équation :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta - \zeta \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \Delta \zeta, \quad (1.19)$$

où ζ est le rotationnel du champ de vecteurs $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$. Le rotationnel est défini en dimension 3 par $\zeta = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$:

$$\zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.20)$$

Chapitre 2

Estimation du mouvement : approches existantes

Nous portons notre attention dans ce chapitre sur les méthodes d'estimation du mouvement à partir d'images consécutives. Le problème général d'estimation de mouvement a conduit à de nombreux travaux, avec de multiples applications dans le domaine de la vision par ordinateur. Nous nous intéressons au cas particulier des images décrivant des phénomènes de nature fluide. Nous évoquons les méthodes basées sur des techniques de corrélation, traditionnellement appliquées en météorologie ou en mécanique des fluides expérimentale. L'accent sera ensuite mis sur les méthodes dites de "flot optique", visant à fournir une estimation dense du mouvement (un vecteur vitesse en chaque pixel de l'image). Les contributions récentes apportées dans ce domaine sont présentées. Ces méthodes ont en commun d'inclure des hypothèses sur la nature ou le mouvement des phénomènes observés, contrairement aux estimateurs génériques. Enfin, une partie sera consacrée à la présentation des méthodes d'estimation conduisant à une représentation paramétrique du champ de vecteurs.

2.1 Méthodes de corrélation

Un estimateur de mouvement défini sur la base d'une technique de corrélation consiste à estimer un champ \mathbf{w} localement constant sur des fenêtres $\mathcal{W}(\mathbf{x})$ centrées en différents points de l'image. La recherche s'effectue sur un espace d'états discrets :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{w} \in \{-u, \dots, u\} \times \{-v, \dots, v\}} \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} \mathcal{C}(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{w}), I_1(\mathbf{r})). \quad (2.1)$$

La fonction de similarité \mathcal{C} permet de comparer les deux images I_1 et I_2 à l'intérieur du domaine $\mathcal{W}(\mathbf{x})$. Elle peut être construite à partir de la valeur absolue ou du carré de la *différence inter-images déplacée* (DID) :

$$I_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Le critère de similarité peut également être défini au moyen de la fonction de corrélation :

$$C(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{w}), I_1(\mathbf{r})) = -I_2(\mathbf{r} + \mathbf{w})I_1(\mathbf{r}), \quad (2.3)$$

ou plus usuellement sa forme centrée et normalisée :

$$C(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{w}), I_1(\mathbf{r})) = \frac{(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{w}) - \bar{I}_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}))(I_1(\mathbf{r}) - \bar{I}_1(\mathbf{x}))}{\sigma_{I_2}(\mathbf{x} + \mathbf{w})\sigma_{I_1}(\mathbf{x})}, \quad (2.4)$$

où $\bar{I}(\mathbf{x})$ et $\sigma_I^2(\mathbf{x})$ désignent les moyenne et variance empiriques de la luminance I sur la fenêtre $\mathcal{W}(\mathbf{x})$.

Les techniques de corrélation peuvent être implémentées dans le domaine de Fourier et fournissent ainsi une méthode d'estimation du mouvement très rapide et simple à mettre en oeuvre. Ces méthodes sont de plus robustes aux changements d'illumination et localement robustes au bruit. Néanmoins, elles peuvent être mises en échec dans des zones de forte variabilité. Le résultat fourni ne correspond alors plus à la solution dense souhaitée. De plus, leur nature locale conduit à de fortes variations spatiales qu'il peut être nécessaire de corriger. Un post-traitement est alors nécessaire pour détecter et supprimer les vecteurs erronés. Enfin, l'estimation est réalisée sans tenir compte du contexte spatial ou temporel. D'ailleurs, aucune connaissance *a priori* sur la structure spatiale et temporelle de l'écoulement ne peut être facilement exploitée dans ce type de techniques. L'inclusion de contraintes cinématiques ou dynamiques est dès lors difficilement envisageable.

Les méthodes d'estimation basées sur la corrélation sont utilisées dans le domaine de la mécanique des fluides pour la visualisation d'écoulements fluides. Ces techniques sont connues sous le nom de PIV (Particle Image Velocimetry) et visent à estimer le mouvement du fluide à partir d'images de particules. Nous renvoyons le lecteur à [1] ou [136] pour des bibliographies récentes et étendues sur le sujet. Une autre application liée aux mouvements fluides concerne l'extraction de champs de vents en imagerie météorologique [144]. Dans ce dernier cas, les nuages jouent le rôle de traceurs dans les images.

2.2 Estimateurs denses dédiés aux fluides

2.2.1 Cadre général

La majorité des méthodes d'estimation dense du mouvement sont basées sur la minimisation d'une fonctionnelle composée d'une somme de deux termes.

Le premier terme exprime la conservation de la luminance d'un point le long de sa trajectoire. Cette conservation peut être traduite par la différence d'images déplacées (équation (2.2)), conduisant à la fonctionnelle suivante portant sur un déplacement \mathbf{d} :

$$J_1(I, \mathbf{d}) = \int_{\Omega} \phi_1 (I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (2.5)$$

où Ω est le domaine image et la fonction ϕ_1 est généralement la norme L_2 mais peut être remplacée par une fonction robuste atténuant le rôle des données déviant trop du modèle [24].

Lorsque la conservation de la luminance est exprimée sous forme différentielle par l'équation de contrainte du mouvement apparent (ECMA), la fonctionnelle porte sur la vitesse \mathbf{w} :

$$J_1(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \phi_1 \left(\nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} \right) d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Le deuxième terme est un terme de régularisation imposant des contraintes spatiales à la solution. Ces contraintes formulent en général une continuité *a priori* sur la solution. Elles portent sur des dérivées d'un certain ordre du champ de déplacements solution :

$$J_2(\mathbf{d}) = \alpha \int_{\Omega} \phi_2 \left(\mathbf{d}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}^k}, \dots \right) d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

ou de manière similaire sur le champ des vitesses :

$$J_2(\mathbf{w}) = \alpha \int_{\Omega} \phi_2 \left(\mathbf{w}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^k}, \dots \right) d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

où α est un paramètre contrôlant l'importance de la régularisation par rapport à l'adéquation aux données.

Lorsque le modèle de données est l'ECMA associé à une régularisation portant sur les gradients des vitesses et des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 quadratiques, on retrouve l'approche fondatrice de Horn et Schunck [78]. Le champ dense est estimé en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$J(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left(\nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$

De multiples contributions ont depuis été apportées dans le développement des méthodes de flot optique. De nombreux travaux portent sur l'amélioration du terme de données. L'hypothèse de conservation de la luminance formulée à travers la DID ou l'ECMA peut facilement être mise en défaut dans des situations où l'illumination varie, en présence de bruit ou d'occultations. Plusieurs méthodes visant à robustifier ce terme de données ont donc été proposées [24, 74, 99, 116]. Certains auteurs proposent également de définir la fonctionnelle d'énergie dans le cadre d'une représentation multirésolution des données [24, 58, 74, 98, 116]. Ceci permet de contourner le fait que l'ECMA ne soit valide que pour des petits déplacements. Les grands déplacements sont dans ce cas estimés de manière incrémentale, à chaque niveau de hiérarchie des données [30]. La DID ou l'ECMA sont aussi parfois remplacées par un terme de similarité entre l'image I_1 et l'image déplacée $I_2(I_d + \mathbf{w})$. Cette similarité peut par exemple être exprimée par l'information mutuelle [75] ou une fonction de corrélation [76].

L'autre axe principal d'amélioration des méthodes d'estimation dense a concerné le terme de régularisation. Le terme de lissage tel que proposé par Horn et Schunck ne permet pas de préserver les discontinuités spatiales du champ de vecteurs. Il est possible de remplacer la norme sur le gradient du champ de vecteurs par une norme L_1 (pénalisation de la variation totale) qui estimera mieux les discontinuités du champ [39, 140]. La régularisation peut également être modifiée afin de guider le lissage, dans une direction perpendiculaire au gradient photométrique par exemple (i.e. le long des

contours) [3, 122]. Des fonctions de coût robustes permettant de localiser les discontinuités peuvent également être utilisées. La régularisation peut être couplée à une approche de segmentation au sens du mouvement [118]. Le lissage est alors adapté localement grâce à la modélisation explicite des discontinuités du champ. Enfin, il est possible d'étendre la régularisation spatiale à une régularisation spatio-temporelle [156]. Ce point sera abordé dans la deuxième partie de ce document.

L'état de l'art sur les méthodes d'estimation du flot optique dans un cadre général est très riche. Nous n'avons présenté ici que les principales idées et renvoyons le lecteur à des présentations plus complètes [15, 115]. Les contributions apportées dans le cadre particulier des mouvements fluides sont présentées plus en détails dans la section à suivre.

2.2.2 Modèles de données adaptés aux fluides

Dans le cas de phénomènes de type fluide, l'hypothèse de conservation de la luminance n'est particulièrement pas respectée. La présence de phénomènes divergents provoque en effet d'importantes variations locales de la fonction de luminance. Ces zones de variation peuvent correspondre au centre de phénomènes associés à des mouvements tridimensionnels transversaux par rapport au plan de visualisation. Ceci se traduit par une apparition ou une disparition de matière dans le plan image. Notons que ces fortes variations ne peuvent être corrigées par un estimateur robuste tel que ceux évoqués dans la section précédente. Ces fonctions robustes ne permettent en effet que de corriger des écarts au modèle dus à des occultations locales, des changements d'illumination ou un bruit modéré.

L'estimation des mouvements divergents apparaissant dans ces zones est importante puisque cette composante divergente du champ peut avoir une influence importante sur le profil global du champ de vitesses. C'est pourquoi il peut être intéressant dans certains cas de remplacer le modèle de conservation de la luminance par un modèle adapté aux mouvements fluides.

Equation de continuité

Il est possible de construire un modèle de luminance dédié aux fluides à partir de l'équation de continuité de la mécanique des fluides présentée dans la section 1.2.1 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.10)$$

Sous certaines hypothèses décrites ci-après, cette équation peut être adaptée à l'image en remplaçant le vecteur vitesse 3D \mathbf{u} par la vitesse 2D \mathbf{w} , et la densité ρ par la luminance I :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \operatorname{div}(I \mathbf{w}) = 0, \quad (2.11)$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{dI}{dt} + I \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0. \quad (2.12)$$

La relation (2.12) ne concernant que des vitesses instantanées, il est nécessaire de travailler avec une version intégrée de cette contrainte pour estimer des mouvements de grande amplitude entre deux images. En supposant les vitesses constantes entre deux instants, l'équation (2.12) est vue comme une équation différentielle du premier ordre qui peut être intégrée [44]. Le modèle de luminance intégré s'écrit alors :

$$I_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.13)$$

Le terme $\exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ traduit une perte ou un gain d'intensité lumineuse accompagnant un mouvement divergent. Notons que dans le cas d'un mouvement à divergence nulle, le modèle se ramène à la DID.

Validité

L'utilisation de cette équation repose sur deux hypothèses fortes. La première hypothèse est l'existence d'une relation directe entre la fonction de luminance observée dans l'image et une quantité passive transportée par le fluide. La seconde revient à considérer que l'équation de continuité valide dans un domaine tridimensionnel peut être appliquée au mouvement 2D apparent dans les images. Cette hypothèse a été démontrée dans le cas d'images de transmittance [62], mais ne se vérifie pas aisément pour tous les types d'images. Une démonstration théorique est par exemple plus difficile à obtenir dans le cas des images météorologiques.

Plusieurs auteurs ont considéré cette équation comme une alternative intéressante à l'hypothèse classique de conservation de la luminance. Des méthodes d'estimation bâties sur un tel modèle de données ont été proposées en imagerie satellitaire météorologique [19, 44, 161], en imagerie médicale pour l'étude des déformations cardiaques ou du flot sanguin [4, 150] et en mécanique des fluides expérimentales [157].

Cas particulier

Un modèle de données dédié spécifiquement à la méthode Schlieren a récemment été proposé [11]. La technique Schlieren est utilisée en mécanique des fluides expérimentales pour la visualisation d'écoulements fluides à l'aide d'un système optique. Pour ce type d'images, il est connu que la luminance observée est liée au gradient de la densité du fluide par la relation suivante :

$$I(\mathbf{x}) = K \int \left(\frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial y} \right) dz, \quad (2.14)$$

où K est une constante connue, liée au système optique mis en place.

Dans ce cas, il est possible de construire un modèle de luminance exact, parfaitement adapté à la nature des images traitées :

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{2}I \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.15)$$

2.2.3 Terme de régularisation adapté aux fluides

Un terme de régularisation portant sur les dérivées au premier ordre du champ de vitesses n'est pas adapté aux phénomènes fluides puisque ce terme va avoir tendance à pénaliser les zones de divergence et de vorticité du champ. Les mouvements fluides étant justement caractérisés par une vorticité ou une divergence importante, il est préférable d'utiliser une régularisation au second ordre [71, 151, 158, 159] du type :

$$J_2(\mathbf{w}) = \alpha \int_{\Omega} \phi_2 (\|\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \|\nabla \operatorname{curl} \mathbf{w}\|^2) d\mathbf{x}. \quad (2.16)$$

Cette régularisation *div-curl* va favoriser les solutions présentant des amas de divergence et de vorticité. La résolution du problème de minimisation associé à une telle contrainte du second ordre peut être approchée et simplifiée en introduisant deux variables auxiliaires ζ_1 et ζ_2 [44] :

$$J_2(\mathbf{w}, \zeta_1, \zeta_2) = \alpha \int_{\Omega} \left((\operatorname{div} \mathbf{w} - \zeta_1)^2 + \lambda \phi_2 (\|\nabla \zeta_1\|^2) + (\operatorname{curl} \mathbf{w} - \zeta_2)^2 + \lambda \phi_2 (\|\nabla \zeta_2\|^2) \right) d\mathbf{x}. \quad (2.17)$$

Les fonctions auxiliaires ζ_1 et ζ_2 approchent respectivement la divergence et la vorticité du champ de vecteurs, tout en étant soumises à une régularisation du premier ordre qui va mettre en avant une solution présentant des zones à vorticité et divergence continues par morceaux.

2.2.4 Extensions

Estimation des fonctions de potentiel

La connaissance des fonctions de potentiel ϕ et ψ est d'un grand intérêt puisque leurs gradients permettent de reconstruire les composantes irrotationnelle et solénoïdale du champ de vitesses (section 1.1.2). D'autre part, le calcul de leurs Laplaciens donne accès à la divergence et à la vorticité du champ. Leurs lignes de niveaux permettent d'extraire directement les lignes de courant et les courbes équipotentielles du potentiel de vitesse. Enfin, les extrema de ces fonctions correspondent aux points singuliers tels que les vortex, les puits ou les sources, qui apportent une information cruciale sur le mouvement.

Si le champ de vecteurs est connu, les fonctions de potentiel peuvent être estimées à partir de ses composantes irrotationnelle et solénoïdale. Dans ce cas, leur estimation se fait par intégration [45]. Les fonctions de potentiel peut également être estimées directement à partir des données de luminance de l'image [96, 158, 159]. La méthode se base alors sur la décomposition de Helmholtz du champ (éq. (1.5)), en supposant la composante de transport estimée au préalable [96] ou donnée par une contrainte spécifique sur les bords de l'image [158, 159]. La fonctionnelle à minimiser est alors composée d'un terme de données :

$$J_1(I, \phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(I_2(\mathbf{x} + \nabla \phi(\mathbf{x}) + \nabla \psi^\perp(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

et d'un terme de régularisation du type div-curl du second ordre, qui conduit à une régularisation d'ordre 3 :

$$J_2(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi_2 \left(\|\nabla \operatorname{div} \nabla \phi\|^2 + \|\nabla \operatorname{curl} \nabla \psi^\perp\|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (2.19)$$

Le terme de données (2.18) peut être découpé en deux fonctionnelles couplées, après deux linéarisations distinctes suivant $\nabla \phi$ et $\nabla \psi^\perp$:

$$J_{1,\phi}(I, \phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla I_{\psi^\perp}^T \nabla \phi + \partial I_{\psi^\perp} \right)^2 d\mathbf{x}, \quad (2.20)$$

et :

$$J_{1,\psi}(I, \phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\nabla I_\phi^T \nabla \psi^\perp + \partial I_\phi \right)^2 d\mathbf{x}, \quad (2.21)$$

où $\nabla I_f(\mathbf{x}) = \nabla I_2(\mathbf{x} + \nabla f)$ et $\partial I_f = I_2(\mathbf{x} + \nabla f) - I_1(\mathbf{x})$. Ces deux fonctionnelles sont à minimiser selon ϕ et ψ respectivement.

Le terme de régularisation (2.19) peut aussi être approché en introduisant des variables auxiliaires intermédiaires de manière similaire à (2.17) [96]. Il est également possible de discrétiser l'intégrale (2.19) directement à partir de schémas de discrétisation "mimétiques" [82, 158, 159]. Ces schémas permettent de garantir la préservation des propriétés classiques des opérateurs continus après discrétisation.

Estimation par couches

Sur le même principe d'estimation dense du mouvement, il est possible de s'intéresser à l'estimation de champs de vitesses sur des couches stratifiées [73]. Une application importante est la reconstruction de champs de vent sur des couches atmosphériques à partir d'images satellitaires. Les observations associées à cette problématique sont en général clairsemées et mettent alors facilement en échec les différentes méthodes d'estimation.

Les couches de nuages étant supposées indépendantes, elles ne doivent pas se mêler durant le processus d'estimation. Une méthode d'estimation dense du mouvement fluide du type [44] peut facilement prendre en compte cette hypothèse en incluant une contrainte explicite au modèle de données. Les différentes couches C_i ayant été séparées à partir des données de température [124], un masque spatial est inclus au modèle de données :

$$J_1(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \phi \left(I_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - M_{\mathbf{x} \in C_i}(I_1(\mathbf{x})) \right) d\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

où $M_{\mathbf{x} \in C_i}$ est l'opérateur identité si le pixel \mathbf{x} appartient à la couche C_i , et renvoie sinon un nombre en dehors de la gamme de valeurs prises par la fonction de luminance I . En choisissant une fonction ϕ robuste, l'estimation du champ dense sur une couche donnée ne va alors prendre en compte que les données correspondant à cette couche.

2.3 Représentation paramétrique du mouvement

2.3.1 Modèles de transformation

Les modèles décrits par une simple transformation affine sont dédiés aux mouvements rigides et ne sont pas adaptés au type de déformations qui nous intéressent. Dans le cas de mouvements fluides (ou plus généralement non rigides), un modèle de transformation global ne permet pas de décrire le mouvement. Il est alors nécessaire de décrire localement les déformations.

Il est par exemple possible de décrire la transformation par des fonctions de base radiales. Ces fonctions sont non linéaires et définies par des centres et des coefficients. La transformation est alors complètement décrite par une partie linéaire et une partie non linéaire :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b} + \sum_{j=1}^m c_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{q}_j\|), \quad (2.23)$$

où (A, \mathbf{b}) représente une transformation affine et les c_j et \mathbf{q}_j sont respectivement les coefficients et les centres des fonctions de base. Les fonctions de base radiales présentent une description globale du mouvement tout en étant capables de traiter des déformations locales. Des exemples de fonctions de base radiales sont les fonctions gaussiennes, multi-quadratiques, de Wendland (à support compact), ou les fonctions splines radiales.

La transformation peut aussi être décrite à l'aide de déformations de formes libres telles les *B-splines* [103], fonctions polynomiales par morceaux.

Enfin, citons le modèle de Rankine [125], qui est un des modèles les plus simples pour décrire un champ de vitesses provenant d'un écoulement fluide. Le mouvement résultant d'un vortex est supposé linéaire et à vorticité constante à l'intérieur d'un disque centré en un point singulier correspondant au centre du vortex. À l'extérieur de ce disque, la vitesse décroît en fonction de l'inverse du carré de la distance au point singulier. Le champ correspondant modélisé par p vortex de force α_j sur des disques de taille ϵ_j s'écrit :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\perp}{2\pi\epsilon_j^2} \mathbb{I}_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq \epsilon_j} + \sum_{j=1}^p \alpha_j \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\perp}{2\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2} \mathbb{I}_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| > \epsilon_j}. \quad (2.24)$$

Notons qu'on retrouve dans ce modèle l'expression du gradient du noyau de Green (éq. (1.12)) associé à l'intégrale de Biot-Savart (éq. (1.11)). La modélisation peut être étendue de la même manière à la composante irrotationnelle du champ de vecteurs, les points singuliers correspondant alors aux puits et sources de l'écoulement [45].

2.3.2 Méthodes d'estimation

Nous présentons dans cette section les différents types de méthodes d'estimation d'une représentation paramétrique du mouvement. Certains modèles nécessitent d'être estimés à partir d'une première connaissance du champ de vecteurs : c'est le cas du modèle de Rankine. D'autres modèles sont traditionnellement estimés par mise en correspondance de points de contrôle et interpolation. Enfin, certaines représentations sont estimées de manière directe, à partir des données de luminance de l'image.

Estimation à partir d'un champ dense

Le modèle de Rankine que nous venons de présenter présente l'avantage d'être simple et de conduire à une représentation très compacte du mouvement. Néanmoins l'estimation d'un tel modèle est délicate puisqu'il est nécessaire de connaître le champ de vecteurs pour retrouver les points critiques (centres des vortex, puits et sources). Ces points peuvent être identifiés grâce aux extrema des fonctions de potentiel. Les paramètres du modèle (forces associées aux points singuliers et taille des disques) sont ensuite estimés itérativement par maximum de vraisemblance [45]. Si le champ de vecteurs n'est pas connu, il est possible d'utiliser des techniques basées sur une estimation alternée du champ dense et des paramètres du modèle de Rankine [117].

Estimation par interpolation à partir de points de contrôle

Une représentation du type (2.23) peut être utilisée pour interpoler un champ de déplacements entre des *points de contrôle* donnés. Ces points de contrôle correspondent à des caractéristiques qui ont été mises en correspondance entre les deux images. Ces caractéristiques peuvent être des points, des lignes, des coins ou des contours, définies manuellement ou de manière automatique.

Un champ de déplacement décrit par des splines plaque mince de la forme $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 \log \mathbf{r}$ avec $\mathbf{r} = \|\mathbf{x} - \mathbf{q}_j\|$ est un exemple de représentation paramétrique traditionnellement estimée à partir de correspondances. Une spline plaque mince est solution de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie dite *énergie de flexion* [27] définie par :

$$J(f) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) d\mathbf{x}, \quad (2.25)$$

sous contraintes :

$$f(\mathbf{p}_j) = \mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (2.26)$$

où \mathbf{p}_j et \mathbf{q}_j sont les points de contrôle dans l'image source et l'image cible. Le problème de minimisation se ramène à un système linéaire sur les paramètres du modèle (paramètres associés à la partie affine et paramètres associés aux splines).

Cette méthode d'estimation est bien adaptée au problème de recalage non rigide en imagerie médicale. Dans ce type d'images, il est en effet possible d'isoler et d'extraire des points de contrôle dans les deux images en se basant sur des caractéristiques anatomiques. La connaissance exacte des vecteurs de déplacement en ces points permet alors d'interpoler le champ sur toute l'image.

Dans le cas de l'imagerie fluide, les points de contrôle ne peuvent pas être extraits directement puisqu'on ne dispose pas de caractéristiques visuelles directement accessibles. Néanmoins, il est parfois possible de définir judicieusement les points où l'on dispose d'une estimation fiable du mouvement. Une telle méthode a été proposée [84], en sélectionnant les points dans l'image initiale vérifiant l'équation de conservation de la luminance (1.15). Dans cette méthode, le champ \mathbf{w} recherché est obtenu par minimisation de la fonctionnelle imposant la régularité div-curl du second ordre sur l'image :

$$J(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \alpha \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{curl} \mathbf{w}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}, \quad (2.27)$$

avec la contrainte sur les points de contrôle $\mathbf{p}_j \quad j = 1, \dots, m$:

$$\nabla I \cdot \mathbf{w}(\mathbf{p}_j) + I \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{p}_j) = -I_t(\mathbf{p}_j). \quad (2.28)$$

Le champ de vecteurs solution de (2.27-2.28) s'exprime à partir des dérivées de fonctions radiales splines plaque mince de la forme $f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^4 \log r$, et d'une composante de forme polynomiale. Les paramètres du modèle sont estimés en résolvant un système linéaire. Notons qu'une telle approche présente l'avantage de garantir que la solution vérifiera l'équation de continuité sur tous les points de contrôle.

Estimation directe

Dans une approche dite directe, les paramètres du modèle de transformation sont estimés à partir des données de luminance des images. L'étape de mise en correspondance de points caractéristiques n'est plus nécessaire. Ceci est intéressant dans le cas où ces points sont difficiles à extraire.

Une telle méthode a été appliquée à un problème de recalage dans des séquences d'images de surfaces se déformant de manière non rigide [16]. Le déplacement est décrit par des splines plaque mince dont les paramètres sont estimés par minimisation d'une fonctionnelle construite à partir de la DID.

Dans le contexte de l'imagerie médicale, un exemple d'estimation directe d'un modèle de déformation non rigide est donné par un modèle de B-splines auquel a été ajouté une transformation globale affine [141]. L'estimation est appliquée au problème de recalage non rigide d'images de mammographie. Les paramètres de la partie affine et les coefficients des B-splines sont estimés par maximisation d'un critère de similarité entre l'image source et l'image cible recalée, basé sur l'*information mutuelle*. L'information mutuelle est définie pour un couple de variables aléatoires \mathbf{X} et \mathbf{Y} par :

$$IM(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})}, \quad (2.29)$$

et mesure la dépendance statistique de ces variables.

2.4 Synthèse

De nombreuses contributions ont été apportées dans le domaine de l'estimation du mouvement à partir de séquences d'images décrivant des écoulements fluides. L'ajout d'hypothèses portant sur la nature spécifique des phénomènes étudiés a permis le développement de nouvelles méthodes denses dédiées à ce type d'images. La qualité de l'estimation fournie par ces méthodes est comparable à celle obtenue par les méthodes basées sur la corrélation, avec l'avantage de fournir une solution en tout point de l'image.

Une telle solution dense est attrayante puisqu'elle fournit une quantité d'information maximale sur le champ de vecteurs. Cependant, la taille de la solution fournie par des méthodes denses d'estimation est de très grande dimension puisqu'elle correspond à la taille de l'image. Il peut être souhaitable pour certaines applications d'obtenir une représentation plus compacte du champ de déplacements.

Dans le cas de phénomènes non rigides (déformations observées en imagerie médicale par exemple), de nombreux modèles paramétriques de transformation ont été proposés, basés sur une décomposition du champ de vecteurs en fonctions de base. L'estimation est alors réalisée par la mise en correspondance de points de contrôle et l'interpolation du champ de vecteurs entre ces points, ou directement à partir des données de luminance de l'image. Ces modèles ne sont cependant pas adaptés au cas particulier des mouvements fluides, car ils ne sont pas en mesure de décrire des transformations si complexes, ou alors avec un nombre de paramètres rédhibitoire.

Une représentation paramétrique du champ de vecteurs peut être obtenue par la méthode des splines dédiée aux fluides [84]. Cependant la solution obtenue n'est pas compacte. Le nombre de paramètres est en effet donné par le nombre de points de contrôle. Or ces points de contrôle sont nombreux puisqu'ils correspondent dans ce cas à tous les points où l'équation de conservation de la luminance est valide. Notons que l'objectif de cette méthode n'était pas de construire une représentation compacte du champ, mais plutôt d'améliorer la qualité de l'estimation grâce à ces points de contrôle.

Enfin, une estimation du modèle de Rankine fournit une représentation compacte du champ de vecteurs et une description de la solution en termes des points singuliers caractéristiques de l'écoulement fluide (vortex, puits, sources). Néanmoins, l'estimation d'une telle représentation n'est pas directe puisqu'elle nécessite la connaissance du champ de déplacements [45, 117].

Chapitre 3

Méthode d'estimation paramétrique

Les estimateurs denses développés pour l'imagerie fluide fournissent une solution de très grande dimension, qui n'est pas toujours aisément manipulable. Ce chapitre décrit une méthode d'estimation conduisant à une représentation compacte du champ de vecteurs. Le modèle que nous construisons est basé sur une discrétisation de la vorticité, couramment utilisée par les méthodes dites de vortex [47] visant à simuler des écoulements fluides. Une paramétrisation similaire de la divergence du champ de vecteurs est construite, et l'estimation du modèle est réalisée à partir des données de l'image, sur la base d'un modèle de conservation de la luminance dédié aux mouvements fluides.

Après avoir présenté le principe de paramétrisation de la vorticité issu de la méthode de vortex, la représentation complète du champ en termes de fonctions de bases est décrite. Le problème de minimisation construit à partir des images est détaillé, ainsi que la méthode d'estimation des différents types de paramètres du modèle.

3.1 Modèle de particules de vortex

3.1.1 Paramétrisation de la vorticité

La première simulation d'écoulements fluides incompressibles basée sur une discrétisation de la vorticité a été calculée à la main [139] à partir de p vortex ponctuels :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (3.1)$$

où \mathbf{x}_j est la position du vortex j , γ_j est sa force, et δ est la fonction de Dirac.

Cette discrétisation de la vorticité permet de calculer la composante solénoïdale du champ de vecteurs \mathbf{w}_{sol} à partir de l'intégrale de Biot-Savart présentée section 1.1.3 et que nous rappelons ici :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) = K^\perp * \text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

avec K gradient du noyau de Green associé à l'opérateur Laplacien bidimensionnel :

$$K(\mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi \|\mathbf{x}\|^2}. \quad (3.3)$$

Cependant, la discrétisation par des vortex ponctuels induit des singularités dans le calcul du champ de vecteurs lorsque $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ tend vers 0, en raison de la singularité du noyau K . Un lissage de la fonction Dirac a donc été proposé [36] permettant de lisser le noyau K . Le lissage est effectué par une fonction appelée *cut-off* ou *blob*. Les vortex ponctuels sont alors remplacés par des *particules de vortex*, obtenues en étalant la vorticité transportée par un vortex ponctuel sur une certaine surface. La discrétisation régularisée de la vorticité s'écrit :

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j f_{\epsilon_j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (3.4)$$

Les fonctions blob peuvent être définies de plusieurs manières. Soit f_ϵ une telle fonction mise à l'échelle par un paramètre ϵ : $f_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right)$. La version lissée du noyau K est alors définie par $K_\epsilon = K * f_\epsilon$. L'importance du lissage est caractérisée par le paramètre ϵ . Notons que si ϵ tend vers zéro, f_ϵ tend vers la fonction Dirac et K_ϵ tend vers K .

L'erreur induite par le lissage peut être réduite en choisissant une fonction qui satisfait des propriétes sur les moments. En effet, si la fonction de lissage satisfait :

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 1, \\ \int \mathbf{x}^i f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0 \quad i \leq r - 1, \\ \int \|\mathbf{x}\|^r |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &< \infty, \end{aligned} \quad (3.5)$$

alors elle est dite *d'ordre r* et partage les propriétes sur les moments de la fonction Dirac jusqu'à la puissance $r - 1$.

Un point de départ possible pour construire une fonction blob est de choisir une fonction à symétrie radiale f , à support infini mais dont la masse est concentrée dans un disque de rayon ϵ . Pour certains choix judicieux de f , la propriéte de symétrie radiale peut alors conduire à une forme explicite pour le noyau liss e K_ϵ . Il est en effet possible d'écrire [47] :

$$K_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \int_0^{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{s} f_\epsilon(\mathbf{s}) ds. \quad (3.6)$$

Si le calcul de l'intégrale conduit à une expression analytique, on en déduit directement l'expression de K_ϵ . Notons qu'il est possible de construire de manière systématique des fonctions blob d'ordre  lev e conduisant à une forme explicite [17, 47].

3.1.2 Expression du champ de vecteurs

La composante solénoïdale \mathbf{w}_{sol} du champ de vecteurs s'écrit à partir de l'intégrale de Biot-Savart en remplaçant le noyau K par la version lissée K_ϵ :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j^{sol} K^\perp * f_{\epsilon_j^{sol}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{sol}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j^{sol} K_{\epsilon_j^{sol}}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{sol}). \quad (3.7)$$

3.2 Représentation paramétrique du champ

3.2.1 Fonction de lissage

Le choix d'une fonction de lissage gaussienne $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \exp(-\|\mathbf{x}\|^2)$ présente l'avantage de conduire à une expression analytique simple. L'expression pour le noyau K_ϵ qui en découle est la suivante :

$$K_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi\|\mathbf{x}\|^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\epsilon^2}\right) \right). \quad (3.8)$$

La fonction gaussienne vérifie en outre les deux premières propriétés du type (3.5) relative à la perte de précision due au lissage. Elle offre donc un bon compromis entre une forme analytique simple et une certaine précision du lissage. La figure 3.1 présente l'effet de ce lissage gaussien sur le module du noyau K et illustre le fait que $K_\epsilon \rightarrow K$ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

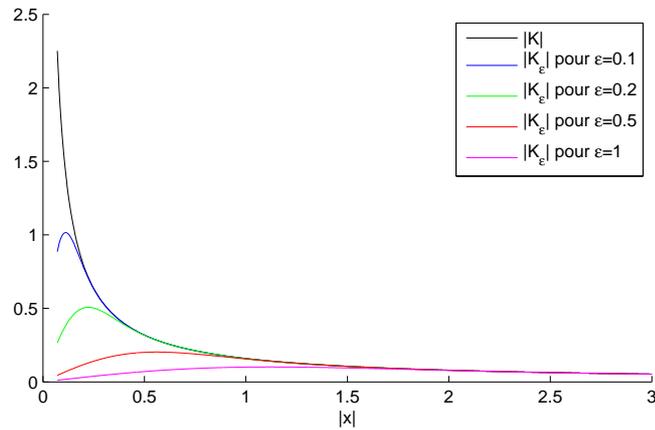


FIG. 3.1: Comparaison entre le module du noyau K original et sa version K_ϵ lissée par une gaussienne pour des valeurs d' ϵ proches de 0.

3.2.2 Composante solénoïdale

En insérant la forme (3.8) du noyau lissé par la fonction gaussienne dans l'expression (3.7), une représentation paramétrique de la composante solénoïdale du champ de vecteurs est obtenue :

$$\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j^{sol} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{sol})^\perp}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{sol}\|^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{sol}\|^2}{\epsilon_j^{sol2}}\right) \right). \quad (3.9)$$

Le champ de vecteurs \mathbf{w}_{sol} est approché par une somme pondérée de fonctions de base entièrement définies par la position de leur centre \mathbf{x}_j^{sol} et leur domaine d'influence (relatif au paramètre ϵ_j^{sol}).

3.2.3 Extension à la composante irrotationnelle

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'extension de la méthode de vortex aux fluides incompressibles. La dilatation du fluide est alors prise en compte dans le champ des vitesses en utilisant des *particules de source* qui cohabitent avec les particules de vortex. Le champ complet est obtenu à partir de la décomposition de Helmholtz. Cette méthode a été appliquée à un problème de simulation d'écoulement fluide 2D compressible afin d'étudier notamment la génération du son [57] ou encore la combustion, en conjonction avec un algorithme de propagation de flammes [66].

Cependant, contrairement à ces travaux où la dilatation des éléments du fluide est directement associée à la présence de vorticité, nous ne forçons pas les particules de source à cohabiter avec les particules de vortex. Notons $\mathbf{X}^{sol} = \{\mathbf{x}_j^{sol}\}_{j=1:p}$ l'ensemble des particules de vortex et $\mathbf{X}^{irr} = \{\mathbf{x}_j^{irr}\}_{j=1:q}$ l'ensemble des particules de source. Ces deux ensembles peuvent être disjoints dans notre modèle. Nous souhaitons en effet modéliser les phénomènes divergents perçus dans l'image, or ces phénomènes ne sont pas toujours associés à une zone de vorticité.

De manière similaire à la discrétisation liss e de la vorticité, la décomposition discrète de la divergence s'écrit à partir de q particules de source :

$$\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^q \gamma_j^{irr} f_{\epsilon_j^{irr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}), \quad (3.10)$$

où \mathbf{x}_j^{irr} est la position du centre de la particule j , γ_j^{irr} sa force et ϵ_j^{irr} le paramètre relatif à son domaine d'influence.

  partir de la relation liant la composante irrotationnelle du champ de vecteurs à la divergence (intégrale de Biot-Savart li e à la divergence, pr sent e section 1.1.3) :

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) = K * \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

conduisant à :

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^q \gamma_j^{irr} K * f_{\epsilon_j^{irr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}) = \sum_{j=1}^q \gamma_j^{irr} K_{\epsilon_j^{irr}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}), \quad (3.12)$$

une représentation paramétrique est obtenue pour le choix particulier d'une fonction de lissage f gaussienne :

$$\mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^q \gamma_j^{irr} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}\|^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{irr}\|^2}{\epsilon_j^{irr2}}\right) \right). \quad (3.13)$$

3.2.4 Représentation complète

La décomposition de Helmholtz pr sent e section 1.1.2 fournit une représentation complète du champ de vitesses :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{irr}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_{tra}(\mathbf{x}), \quad (3.14)$$

avec \mathbf{w}_{irr} et \mathbf{w}_{sol} donnés respectivement par les formes paramétriques (3.13) et (3.9).

Dans la suite de ce document, la composante de transport \mathbf{w}_{tra} est supposée connue. Cette composante peut être approchée en utilisant l'estimateur de Horn et Schunck [78] décrit dans la section 2.2.1, en imposant une valeur très élevée au paramètre contrôlant l'importance du terme de régularisation. Le lissage portant sur les gradients du champ de vitesses, la solution obtenue correspond à un champ à divergence et vorticité très faibles.

La figure 3.2 présente un exemple d'un champ de vecteurs décrit par 15 particules de vortex et 5 particules de source. Le champ complet est donc décrit par un ensemble de 80 paramètres. La complexité du mouvement peut être appréciée en observant les cartes de vorticité et de divergence associées.

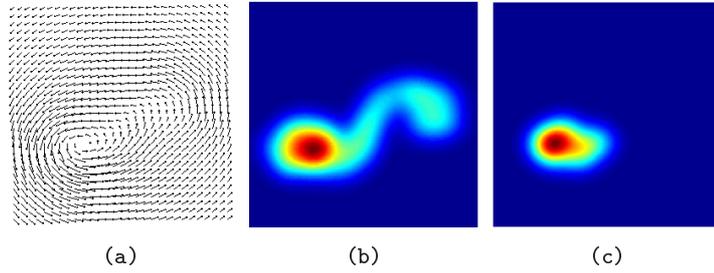


FIG. 3.2: Exemple de représentation paramétrique d'un mouvement fluide. (a) Champ de vecteurs décrit par une combinaison de particules de vortex et de source ; (b) Carte de vorticité correspondante ; (c) Carte de divergence correspondante.

3.3 Problème d'estimation

Un modèle de données adapté aux fluides a été présenté dans la section 2.2.2. Ce modèle, construit à partir de l'équation de continuité de la mécanique des fluides, est une alternative à l'hypothèse de conservation de la luminance classiquement utilisée pour les problèmes d'estimation de mouvement. Nous rappelons la forme de ce modèle de continuité :

$$\frac{dI}{dt} + I \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0, \quad (3.15)$$

ainsi que sa version intégrée permettant de prendre en compte des mouvements de grande amplitude (écoulements rapides ou long intervalle de temps entre deux images comme en météorologie) :

$$I_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.16)$$

En considérant ce modèle valide sur le domaine image et en choisissant comme fonction de pénalité la norme L_2 , le problème d'estimation du champ de vecteurs \mathbf{w} peut s'exprimer comme la recherche du minimum de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} [I_2(\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x})) \exp(\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x})]^2 dx. \quad (3.17)$$

La composante de transport \mathbf{w}_{tra} étant supposée connue, le problème d'estimation ne concerne que les composantes solénoïdale et irrotationnelle. L'image I_2 intervenant dans 3.17 est liée à l'image originale I_2^o par : $I_2(\mathbf{x}) = I_2^o(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{tra}(\mathbf{x}))$.

Dans notre modèle, le champ \mathbf{w} est entièrement décrit par un ensemble de particules de vortex et de source. Le problème d'estimation consiste donc à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \mathcal{F}(I, \mathbf{w}(\beta)), \quad (3.18)$$

avec $\beta = \left(\left\{ \mathbf{x}_j^{sol}, \gamma_j^{sol}, \epsilon_j^{sol} \right\}_{j=1:p}, \left\{ \mathbf{x}_j^{irr}, \gamma_j^{irr}, \epsilon_j^{irr} \right\}_{j=1:q} \right)$. Nous rappelons que la variable \mathbf{x} fait référence aux positions des particules, tandis que γ et ϵ représentent le coefficient de force et le domaine d'influence.

3.4 Méthode d'estimation

3.4.1 Estimation incrémentale

La fonction de coût non linéaire (3.17) peut être vue comme une fonction de coût de différence pondérée d'images déplacées. La majorité des estimateurs de mouvement basés sur une telle formulation non linéaire considère un cadre de minimisation incrémental afin de contourner la non linéarité du problème. Ce schéma incrémental est similaire aux techniques de Gauss-Newton permettant de résoudre des problèmes aux moindres carrés non linéaires. L'approche incrémentale est généralement formulée dans un cadre multirésolution.

Soit $\tilde{\mathbf{w}}$ une première estimation du champ de vecteurs décrit par des particules de vortex et de source, obtenue à partir d'une première estimation de l'ensemble des paramètres. Par un développement de Taylor autour de $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}$, une nouvelle fonctionnelle peut être construite à partir de la contrainte (3.16) linéarisée. Cette fonctionnelle porte sur un champ de vecteurs incrémental correctif \mathbf{h} :

$$\mathcal{F}(I, \mathbf{h}) = \int_{\Omega} \left[\exp(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}) \left\{ \left(\tilde{I} \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{I} \right)^T \mathbf{h} + \tilde{I} \right\} - I \right]^2 d\mathbf{x}, \quad (3.19)$$

où $\tilde{I}(\mathbf{x})$ représente la deuxième image compensée par le champ $\tilde{\mathbf{w}}$: $\tilde{I}(\mathbf{x}) \triangleq I_2(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}})$.

La minimisation de cette fonctionnelle conduit à l'estimation de l'incrément \mathbf{h} . Ce champ incrémental est la somme d'une composante solénoïdale \mathbf{h}_{sol} et d'une composante irrotationnelle \mathbf{h}_{irr} . Il est décrit lui aussi par un ensemble de particules de vortex et de source. Cet incrément va s'ajouter à l'estimation précédente $\tilde{\mathbf{w}}$ et affiner l'estimation.

En pratique, ce type de schéma incrémental est associé à une représentation multirésolution pyramidale des images [30]. Une telle représentation est obtenue par filtrage passe-bas et sous-échantillonnage. À un niveau donné de la pyramide, le champ estimé connu $\tilde{\mathbf{w}}$ résulte de la projection du champ estimé au niveau précédent. Au niveau le plus haut (résolution la plus grossière), le champ initial $\tilde{\mathbf{w}}$ est fixé nul.

3.4.2 Problème de minimisation

Le schéma d'estimation incrémental transforme le problème d'optimisation non linéaire initial (3.18) en une succession de problèmes de minimisation plus simples.

La fonctionnelle (3.19) relative à l'incrément \mathbf{h} peut être dérivée par rapport aux différentes inconnues :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial \gamma_j} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r}_j}{\pi \|\mathbf{r}_j\|^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_j\|^2}{\epsilon_j^2} \right) \right) \mathbf{y} [\mathbf{y}^T \mathbf{h}(\gamma_j) + z] d\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_j = \frac{1}{\epsilon_j}} = \int_{\Omega} \frac{2\gamma_j}{\pi \epsilon_j} \frac{\mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_j\|^2} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_j\|^2}{\epsilon_j^2} \right) \mathbf{y} [\mathbf{y}^T \mathbf{h}(\epsilon_j) + z] d\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{F}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial y_j} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

où :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{h})}{\partial x_j} = \int_{\Omega} -\frac{1}{\pi \|\mathbf{r}_j(\mathbf{x})\|^4} \frac{2}{\epsilon_j^2} \|\mathbf{r}_j\|^2 r_j^2(x) + \left(\|\mathbf{r}_j\|^2 + r_j^2(x) \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_j(\mathbf{x})\|^2}{\epsilon_j^2} \right) \right) \mathbf{y} [\mathbf{y}^T \mathbf{h}(x_j) + z] d\mathbf{x}. \quad (3.23)$$

Dans ces expressions \mathbf{r}_j , \mathbf{y} et z sont respectivement des fonctions vectorielles et scalaire de \mathbf{x} définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_j(\mathbf{x}) &= (r_j(x), r_j(y))^T = \mathbf{x} - \mathbf{x}_j(\text{partie irr.}) \text{ ou } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\perp(\text{partie sol.}), \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \exp(\text{div } \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})) \left(\tilde{I}(\mathbf{x}) \nabla \text{div } \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \nabla \tilde{I}(\mathbf{x}) \right), \\ z(\mathbf{x}) &= \exp(\text{div } \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x})) \tilde{I}(\mathbf{x}) - I(\mathbf{x}, t). \end{cases} \quad (3.24)$$

Ces équations conduisent à trois problèmes différents. Le premier, lié aux coefficients de force γ_j , est linéaire. Le second, relatif aux domaines d'influence ϵ_j , est quant à lui non linéaire. Aucune minimisation sous contrainte n'étant nécessaire dans les deux cas, une technique de descente de gradient peut être employée pour estimer ces inconnues. Pour le problème d'estimation des positions, une contrainte supplémentaire doit être imposée pour restreindre les centres des particules au domaine image. Un tel problème sous contrainte associé à la non linéarité conduit à une minimisation difficile. De plus, si nous supposons que dans certains cas nous n'avons aucune idée sur la position initiale des particules, nous devons permettre aux particules de se déplacer loin de leur position initiale. Une descente de gradient n'autoriserait pas une telle exploration de l'espace.

Nous avons donc décidé de découper la résolution du problème selon les types d'inconnues. Les coefficients de force et le domaine d'influence des particules vont être estimés par une méthode de gradient conjugué non linéaire décrite dans la section 3.4.3, pour des positions fixées des particules. Les positions seront modifiées à leur tour par une procédure statistique de type *mean shift* décrite dans la section 3.4.4.

3.4.3 Gradient conjugué non linéaire

Une méthode de gradient conjugué non linéaire consiste en une extension non linéaire des algorithmes de gradient conjugué standards. La méthode a prouvé son efficacité pour résoudre des problèmes généraux de minimisation de grande échelle.

À partir d'un estimé $\Theta_k = \{\gamma_k^{sol}, \epsilon_k^{sol}, \gamma_k^{irr}, \epsilon_k^{irr}\}$ et d'une direction de descente \mathbf{d}_k , une minimisation linéaire (par rapport à α_k) est réalisée le long de \mathbf{d}_k :

$$\mathcal{F}(\Theta_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) = \min_{\alpha > 0} \mathcal{F}(\Theta_k + \alpha \mathbf{d}_k), \quad (3.25)$$

et conduit à $\Theta_{k+1} = \Theta_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$. La direction de descente \mathbf{d}_{k+1} est générée récursivement :

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\nabla \mathcal{F}(\Theta_{k+1}) + \mu_k \mathbf{d}_k, \quad (3.26)$$

avec :

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 1, \\ \frac{\|\nabla \mathcal{F}(\Theta_{k+1})\|^2}{\|\nabla \mathcal{F}(\Theta_k)\|^2} & \text{pour } k \geq 2, \end{cases} \quad (3.27)$$

où μ_k est un scalaire correspondant à la variante de Fletcher-Reeves de l'algorithme de gradient conjugué non linéaire. Il existe différentes expressions pour ce coefficient, associées à différentes versions de l'algorithme [67]. Diverses schémas d'implémentation de ces algorithmes existent, basés sur des recherches linéaires exactes ou non exactes, ou sur la possibilité de redémarrer l'itération (3.26) tous les n pas en fixant μ_k à zéro (i.e. imposer une stratégie de direction de plus forte pente). Nous appliquons une méthode avec recherche exacte, sans redémarrage. La convergence globale d'un tel schéma est étudié dans [67].

Notons que pour la partie linéaire de notre problème, la méthode revient au gradient conjugué standard. Pour commencer l'optimisation nous considérons que des positions initiales des particules ont été fixées. La valeur initiale des coefficients de force γ_j est fixée à zéro. Enfin, les tailles des domaines d'influence sont initialisés de manière adaptative. La valeur du paramètre ϵ_j pour une particule j est fixée à la distance à la particule voisine la plus proche.

À convergence, une estimation du champ incrémental correctif $\tilde{\mathbf{h}}$ est obtenue pour des positions données des particules. Nous décrivons dans la section qui suit comment ces positions peuvent être ajustées en vue d'améliorer l'estimation.

3.4.4 Ajustement des positions

La méthode d'estimation décrite dans la section précédente requiert de fixer les positions des particules de vortex et de source sur le domaine image. Nous proposons maintenant une méthode pour déplacer chaque particule en se basant sur une surface caractéristique construite à partir des données. La méthode est basée sur une technique d'estimation non paramétrique appelée *mean shift*, décrite dans la section 3.4.5.

Notons $\tilde{\mathbf{h}}^k$ une estimation de l'incrément correctif obtenu pour un ensemble de positions $\mathbf{X}^k = \{\mathbf{X}^{irr,k}, \mathbf{X}^{sol,k}\}$ des particules obtenues à l'étape k de l'ajustement. Le champ $\tilde{\mathbf{h}}^k$ est composé d'une composante irrotationnelle $\tilde{\mathbf{h}}^{irr,k}$ et d'une composante solénoïdale $\tilde{\mathbf{h}}^{sol,k}$.

Définition de fonctions d'erreur

Nous définissons une surface d'erreur pour chaque composante du champ de vecteurs. La surface correspond à une différence d'image déplacée en considérant l'autre composante orthogonale fixée. Pour la partie solénoïdale la surface d'erreur est définie en tout point de l'image par :

$$\mathcal{D}^{sol,k}(\mathbf{x}) = I_2 \left(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{h}}^{irr,k}(\mathbf{x}) \right) - I_1(\mathbf{x}). \quad (3.28)$$

Cette surface d'erreur décrit les erreurs de reconstruction associées à la composante solénoïdale. De manière similaire, la surface correspondant à la composante irrotationnelle est définie par :

$$\mathcal{D}^{irr,k}(\mathbf{x}) = I_2 \left(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{h}}^{sol,k}(\mathbf{x}) \right) - I_1(\mathbf{x}). \quad (3.29)$$

Extension à une surface caractéristique

La qualité de la modélisation dépend de la précision de l'approximation discrète de la vorticité et la divergence. Afin d'atteindre la meilleure précision pour un nombre limité de particules, il est souhaitable de concentrer la plupart des particules dans les zones de l'image à forte vorticité ou divergence.

La surface d'erreur définie par (3.28) ou (3.29) peut aider à guider une particule vers une position en accord avec sa nature (vortex ou puits/source). Cependant une particule donn e risque d'être guid e vers un emplacement non approprié si la surface d'erreur révèle des erreurs associ es aux deux composantes solénoïdale et irrotationnelle et pas seulement à l'une d'entre elles. Afin de surmonter ce problème, nous ajoutons un terme à chaque surface d'erreur. Ce terme tient compte des quantités de vorticité et de divergence précédemment estim es. Les particules de vortex et de source sont alors encourag es à se diriger vers des emplacements d'erreur associ e à la présence de vorticité ou divergence respectivement. Les deux types de surface sont normalis es et combin es afin créer deux surfaces caractéristiques pour les parties solénoïdale et irrotationnelle :

$$\mathcal{S}^{sol,k}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{D}^{sol,k}(\mathbf{x}) \right)^2 + \left(\text{curl } \tilde{\mathbf{h}}^k(\mathbf{x}) \right)^2, \quad (3.30)$$

et

$$\mathcal{S}^{irr,k}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{D}^{irr,k}(\mathbf{x}) \right)^2 + \left(\text{div } \tilde{\mathbf{h}}^k(\mathbf{x}) \right)^2. \quad (3.31)$$

Finalement, afin de restreindre les déplacements des particules à des zones localis es, nous combinons ces fonctions avec un *a priori* sur l'emplacement des particules.

Distribution de probabilité *a priori* sur la position d'une particule

Soit \mathbf{x}_j^k le vecteur représentant l'emplacement d'une particule j   l'étape k . Nous fixons une distribution sur \mathbf{x}_j^{k+1} connaissant \mathbf{X}^k , où \mathbf{X}^k représente l'ensemble des n positions $(\mathbf{x}_1^k, \dots, \mathbf{x}_n^k)$ (avec n valant p pour les vortex et q pour les puits/sources)   l'étape k . Nous considérons que la densité de probabilité associ e est gaussienne :

$$\mathbf{x}_j^{k+1} | \mathbf{X}^k \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_j^k, \sigma_j^k). \quad (3.32)$$

L'écart-type σ_j^k est fixé à la distance entre \mathbf{x}_j^k et le centre le plus proche parmi $\{\mathbf{x}_l^k\}_{l=1,\dots,n,l\neq j}$. Notons que cette distribution tient compte de l'emplacement précédent de la particule à travers la moyenne \mathbf{x}_j^k , mais aussi de la dépendance entre \mathbf{x}_j^{k+1} et les autres particules à travers σ_j^k .

Version conditionnelle de la distribution

En combinant la distribution *a priori* $p_{\mathbf{x}_j^{k+1}|\mathbf{X}^k}$ définie ci-dessus avec la surface décrite précédemment (notée \mathcal{S}^k dans le cas général et caractérisée par (3.30) ou (3.31)), nous pouvons définir une distribution de probabilité conditionnelle pour une particule \mathbf{x}_j^{k+1} connaissant les autres :

$$p_{\mathbf{x}_j^{k+1}|\mathbf{X}^k,\mathcal{S}^k}(\mathbf{x}) \propto \mathcal{S}^k(\mathbf{x})p_{\mathbf{x}_j^{k+1}|\mathbf{X}^k}(\mathbf{x}) \hat{=} f_j(\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

Cette distribution partage l'*a priori* sur l'emplacement d'une particule et l'information apportée par la surface caractéristique (relative à toutes les positions des particules). Afin d'ajuster les positions des particules, nous proposons de déplacer chaque centre \mathbf{x}_j^k vers le mode le plus proche de la surface f_j . La méthode employée est présentée dans la section suivante.

3.4.5 Méthode de déplacement des positions

Procédure mean shift

La procédure mean shift a été d'abord présentée par [65], étendue par [35] et popularisée en analyse d'images par [41] pour un problème de segmentation. Elle décrit comment déplacer itérativement un point vers le mode le plus proche d'une distribution de probabilité. Cette technique repose sur l'estimation non paramétrique du gradient de la densité sous-jacente.

La valeur d'une densité en un point peut être estimée à partir des observations présentes dans une région autour de ce point. En effet, étant donné un échantillon $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$, une estimation à noyau peut être utilisée pour représenter la densité comme suit :

$$\hat{f}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h}\right). \quad (3.34)$$

Une fonction noyau \mathcal{K} est une application $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ généralement bornée, symétrique et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$. Les noyaux considérés ici sont des fonctions radiales telles que $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = k(\|\mathbf{x}\|^2)$.

À partir de l'expression (3.34) il est possible d'écrire le gradient estimé de la densité comme étant le gradient de la densité estimée :

$$\hat{\nabla} f_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \nabla \hat{f}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n \nabla \mathcal{K} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right) \quad (3.35)$$

$$= \frac{2}{nh^{d+2}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{s}_i) k' \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right) \quad (3.36)$$

$$= \frac{2}{nh^{d+2}} \left[\sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right) \right] \left[\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right)}{\sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right)} - \mathbf{x} \right], \quad (3.37)$$

où g est une fonction telle que $g(x) = -k'(x)$ et \mathcal{G} est un noyau défini par $\mathcal{G}(\mathbf{x}) = cg(\|\mathbf{x}\|^2)$, avec c une constante de normalisation. Nous pouvons reconnaître entre les premiers crochets la densité au point \mathbf{x} estimée à partir du noyau \mathcal{G} :

$$\hat{f}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}) = \frac{c}{nh^d} \sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right), \quad (3.38)$$

et le vecteur dit *vecteur mean shift* entre les deuxièmes crochets :

$$\mathbf{m}_{\mathcal{G},h}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right)}{\sum_{i=1}^n g \left(\left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_i}{h} \right\|^2 \right)} - \mathbf{x}. \quad (3.39)$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbf{m}_{\mathcal{G},h}(\mathbf{x}) \propto \frac{\hat{\nabla} f_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})}{\hat{f}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})}. \quad (3.40)$$

Le vecteur mean shift (3.39), différence entre la moyenne pondérée évaluée avec le noyau \mathcal{G} et le centre du noyau, peut donc être vu comme une estimation normalisée du gradient de la densité. Ce vecteur indiquant en tout point la direction du maximum d'accroissement de la densité, un procédé itératif apparaît naturellement. Il consiste à déplacer itérativement le centre \mathbf{x} du noyau suivant $\mathbf{m}_{h,\mathcal{G}}(\mathbf{x})$ jusqu'à ce qu'un point stationnaire (de gradient nul) de la densité sous-jacente soit trouvé. La méthode converge si le noyau \mathcal{K} a un profil k convexe et décroissant [41].

Estimation à noyau de la distribution conditionnelle

Nous souhaitons appliquer la procédure mean shift à la surface définie par f_j en (3.33). Pour cela, nous devons tout d'abord décrire cette surface sous la forme d'une estimation à noyau. Soit \mathbf{y} les coordonnées d'un pixel dans le domaine image Ω . La valeur $f_j(\mathbf{y})$ peut être calculée en tout point \mathbf{y} à partir de la formule (3.33), où $\mathcal{S}^k(\mathbf{y})$ est donnée par (3.30)

ou (3.31). Une estimation non paramétrique de la distribution conditionnelle peut être construite :

$$\hat{p}_{\mathbf{x}_j^{k+1}|\mathbf{X}^k, \mathcal{S}^k}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\mathbf{y} \in \Omega} f_j(\mathbf{y}) \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{h}\right)}{\sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{h}\right)}. \quad (3.41)$$

Notons que le dénominateur ne dépend pas de \mathbf{x} car les pixels sont disposés régulièrement sur l'image et nous supposons que h est choisi indépendamment de \mathbf{x} . Nous pouvons alors voir (3.41) comme une estimation de densité de la forme (3.34), où chaque valeur possible \mathbf{y} est pondérée par $w(\mathbf{y}) = \frac{f_j(\mathbf{y})}{\sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{h}\right)}$. Cette remarque est importante puisqu'elle va nous permettre d'appliquer une expression modifiée du vecteur mean shift, utilisée par [42] et décrite dans le prochain paragraphe.

Application de la procédure mean shift

Les poids $w(\mathbf{y})$ peuvent être inclus dans l'expression du vecteur mean shift (3.39) comme suit :

$$\mathbf{m}_{\mathcal{G}, h}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \mathbf{y} w(\mathbf{y}) g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{h}\right\|^2\right)}{\sum_{\mathbf{y} \in \Omega} w(\mathbf{y}) g\left(\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{h}\right\|^2\right)} - \mathbf{x}. \quad (3.42)$$

Le procédé itératif vers un point stationnaire de la densité estimée reste le même avec cette expression modifiée du vecteur mean shift. Notons que la convergence de la procédure mean shift peut également être démontrée lorsqu'un tel poids positif est associé à chaque donnée [42].

La dernière étape avant d'appliquer la procédure est le choix du noyau \mathcal{K} . Nous choisissons le noyau d'Epanechnikov, donné par $\mathcal{K}(x) = \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{x^2}{5}\right)$ pour $|x| < \sqrt{5}$. Ce noyau est connu pour être optimal sous certaines conditions, en minimisant l'erreur quadratique moyenne intégrée entre la densité et son estimation. Il est surtout d'un intérêt pratique dans notre cas puisque la dérivée g de son profil est simplement uniforme. L'évaluation du vecteur mean shift est alors simple et rapide. En outre, le choix de la fenêtre du noyau est un point important. Plusieurs choix peuvent être faits. Nous avons choisi des tailles de fenêtre adaptatives. Leur taille est fixée pour chaque particule à la distance à la particule la plus proche. Ainsi, nous disposons d'une estimation lissée de la distribution pour des particules distantes. Par contre, pour des particules proches qui se sont concentrées dans des régions de vorticité ou de divergence, une estimation précise est nécessaire.

La procédure mean shift peut finalement ˆetre appliquée aux $p + q$ centres des particules (particules de vortex ou de source) impliqu es dans la modélisation du champ de vecteurs. Chaque centre de particule est d eplac e vers le mode le plus proche de la densité estimée $\hat{p}_{\mathbf{x}_j^{k+1}|\mathbf{X}^k, \mathcal{S}^k}$.

3.4.6 Schéma global d'estimation

Pour chaque niveau de la pyramide multirésolution, le schéma d'estimation consiste en une estimation alternée des différentes inconnues du modèle. Il est composé des deux étapes suivantes, répétées tour à tour :

1. Pour un ensemble de positions de particules donné \mathbf{X}^k , les coefficients de force et les domaines d'influence sont estimés par la méthode d'optimisation décrite section 3.4.3. Cela fournit une estimation du champ incrémental $\tilde{\mathbf{h}}^k$.
2. À partir de l'information apportée par \mathbf{X}^k et $\tilde{\mathbf{h}}^k$, chaque centre des particules de vortex et de source est déplacé vers le mode le plus proche de la distribution conditionnelle (3.33) qui lui est associée. Cette étape est réalisée par l'algorithme mean shift comme décrit dans la section 3.4.5. Elle conduit à un nouvel ensemble de positions \mathbf{X}^{k+1} .

La procédure est arrêtée lorsque la divergence et la vorticité estimées atteignent une certaine stabilité. Ce critère de stabilité est traduit par :

$$\frac{\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^{k+1} - \operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^k\|^2}{\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{h}}^k\|^2} + \frac{\|\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^{k+1} - \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^k\|^2}{\|\operatorname{curl} \tilde{\mathbf{h}}^k\|^2} \leq \epsilon. \quad (3.43)$$

3.5 Estimation à partir d'un champ

La méthode que nous venons de présenter réalise une estimation du modèle paramétrique directement à partir des données image. Notons cependant que si un champ de vecteurs est disponible, l'estimation peut également être formulée comme un problème d'approximation d'un champ par un ensemble de particules.

Si on note $\hat{\mathbf{w}}$ le champ de vecteurs connu, le problème d'estimation du champ de vecteurs paramétrique \mathbf{w} , décrit par un ensemble de particules de vortex et source, se traduit par la recherche du minimum de la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} [\mathbf{w}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x}. \quad (3.44)$$

L'objectif est alors d'interpoler un champ dense décrit sur une grille donnée par un ensemble de particules. La minimisation s'effectue par rapport aux paramètres de force et d'amplitude. Elle peut être résolue par la méthode de gradient conjugué non linéaire décrite dans la section 3.4.3. Les expressions des gradients de la fonctionnelle (3.44) peuvent être déduites des expressions (3.20)-(3.21) en remplaçant \mathbf{h} par \mathbf{w} et en posant $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = 1$ et $z(\mathbf{x}) = -\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Ce problème d'estimation intervient notamment lorsqu'on cherche à représenter par un ensemble de particules et leurs paramètres associés le champ $\hat{\mathbf{w}}$ final obtenu par estimation incrémentale.

Ainsi, dans le cadre d'un schéma multirésolution, notons $\mathbf{X}^{sol,l}$ et $\mathbf{X}^{irr,l}$ les positions des particules de vortex et de source obtenu à un niveau de multirésolution l . Le champ de déplacements incrémental calculé à ce niveau est décrit par cet ensemble de particules et

les paramètres associés. Ce champ est ensuite projeté à un niveau inférieur de la pyramide pendant le processus d'estimation (voir section 3.4.1). Ce sont les valeurs du champ et non les paramètres des particules qui sont projetées. Les positions des particules décrivant ce champ peuvent directement être projetées sur les niveaux inférieurs de la pyramide. Cependant, la projection des paramètres de force et d'amplitude n'étant pas directe, il est nécessaire de recalculer ces paramètres à partir du champ projeté.

Soient $\tilde{\mathbf{X}}^{sol,l}$ et $\tilde{\mathbf{X}}^{irr,l}$ les positions des particules du niveau l , projetées au niveau de multirésolution le plus fin (correspondant à la résolution originale des images). Il est alors possible d'obtenir un champ \mathbf{w} décrit par les deux ensembles de particules $\cup_l \tilde{\mathbf{X}}^{sol,l}$ et $\cup_l \tilde{\mathbf{X}}^{irr,l}$ en minimisant (3.44), où $\hat{\mathbf{w}}$ est le champ dense estimé à la fin du schéma multirésolution.

3.6 Conclusion

En s'appuyant sur l'idée de discrétisation de la vorticité associée à la méthode de vortex, un estimateur paramétrique de champs denses de déplacements a été proposé. Le modèle de transformation est décrit par un ensemble de fonctions de base de deux types, respectivement associées aux composantes irrotationnelle et solénoïdale du champ de déplacements. Ces fonctions de base décrivent les zones de vorticité et de divergence et sont donc liées aux structures caractéristiques de l'écoulement. Le modèle est donc en accord avec la nature spécifique des images à étudier, représentant des phénomènes de type fluide traduits par des mouvements de rotation et de divergence.

Le champ dense de déplacement est décrit par un ensemble réduit de paramètres associés à ces fonctions de base. Le modèle peut être estimé de manière directe, à partir d'une hypothèse de conservation de la luminance dérivant de l'équation de continuité de la mécanique des fluides. L'estimation est formulée dans un cadre multirésolution afin de prendre en compte des éventuels déplacements de grande amplitude entre deux images. La technique d'estimation des paramètres est basée sur une méthode de gradient conjugué et une méthode mean shift correspondant à une montée de gradient.

L'estimateur de mouvement proposé est validé dans le chapitre suivant sur des images synthétiques et réelles de différentes natures.

Chapitre 4

Validation expérimentale

Dans ce chapitre, nous validons la méthode d'estimation de mouvement proposée sur des images synthétiques et sur des exemples réels. La première section présente un exemple synthétique créé à partir d'un champ paramétrique composé de particules de vortex et de source. Deux autres exemples synthétiques provenant d'une simulation numérique d'un écoulement fluide sont ensuite étudiés. Des analyses quantitatives globales et locales sont proposées. La deuxième section présente des résultats obtenus sur des séquences météorologiques réelles issues de deux canaux différents du satellite Météosat. La méthode est ensuite testée sur des images issues de la mécanique des fluides expérimentales. Enfin, une application particulière en imagerie médicale est proposée.

4.1 Exemples synthétiques

4.1.1 Particules de vortex et de source

Nous présentons tout d'abord un exemple synthétique composé d'une rotation, d'un mouvement divergent (source), et d'une combinaison d'un vortex et d'un puits. Le champ synthétique est présenté sur la figure 4.1, ainsi que les cartes de vorticité et de divergence correspondantes. L'exemple a été construit avec 2 particules de vortex et 2 particules de source.

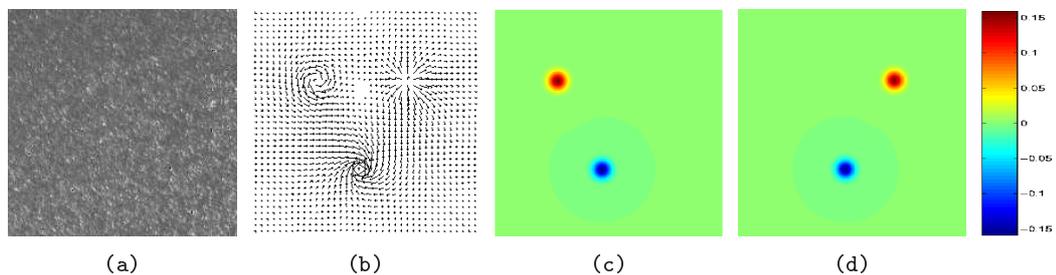


FIG. 4.1: *Exemple synthétique*. (a) Image PIV ; (b) Champ de vecteurs paramétrique ; (c) Carte de vorticité (vorticité absolue moyenne = $1.5 \cdot 10^{-3}$) ; (d) Carte de divergence (divergence absolue moyenne = $1.5 \cdot 10^{-3}$).

Afin de créer une paire d'images où la vérité terrain est connue, le champ de vecteurs

synthétique a été appliqué à une image d'un écoulement fluide ensemençé par des particules. Ce type d'images est utilisé pour estimer des vitesses d'écoulement en mécanique des fluides expérimentales. Les techniques d'estimation associées, basées sur la corrélation, sont connues sous le nom de méthodes PIV (*Particle Image Velocimetry*). Nous présentons des résultats obtenus sur une paire d'images composée de l'image originale PIV et la même image recalée par rapport au champ de vecteurs considéré.

Nous montrons sur la figure 4.2 le résultat obtenu lorsque les positions des 4 particules sont connues. La force de chaque particule a été initialisée à zéro et les domaines d'influence à la distance à la particule la plus proche. La méthode d'estimation permet d'estimer très précisément le champ des vitesses, ainsi que la vorticité et la divergence portée par chaque particule. Les valeurs absolues moyennes de vorticité et divergence (voir la légende de la figure 4.2) peuvent être comparées aux vraies valeurs (voir la légende de la figure 4.1).

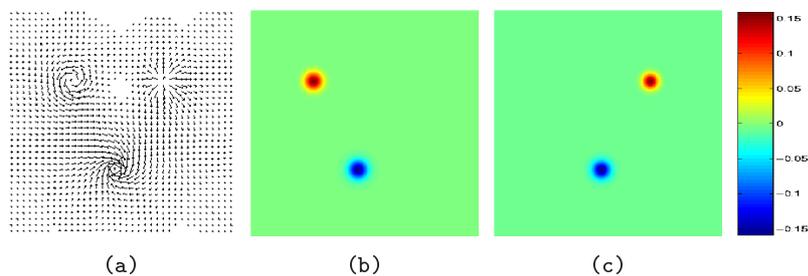


FIG. 4.2: *Résultat en connaissant les positions des particules.* (a) Mouvement estimé ; (b) Vorticité estimée (valeur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-4}$) ; (c) Divergence estimée (valeur absolue moyenne = $1.3 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $2.7 \cdot 10^{-4}$).

Nous présentons sur la figure 4.3 le résultat de l'estimation quand l'algorithme est initialisé avec plusieurs positions perturbées dans le voisinage des vrais centres des 4 particules synthétiques. Même si 4 particules suffisent pour représenter le déplacement, cette expérience permet de tester la robustesse à une sur-représentation (12 particules ici). Nous observons sur la figure 4.3 que la procédure mean shift, couplée à l'estimation des paramètres de force et d'influence, permet de converger itérativement vers les vraies positions. L'évolution des cartes de divergence et de vorticité pendant le processus d'estimation est représentée sur la figure 4.4. Dans ce cas 5 itérations de la procédure alternée d'estimation ont été nécessaires pour converger. Cette expérience simple démontre la robustesse de l'ajustement des positions par rapport à une sur-représentation et une initialisation imprécise, même si les erreurs absolues moyennes pour l'estimation de la divergence sont un peu plus élevées pour ce cas perturbé (voir la légende de la figure 4.3).

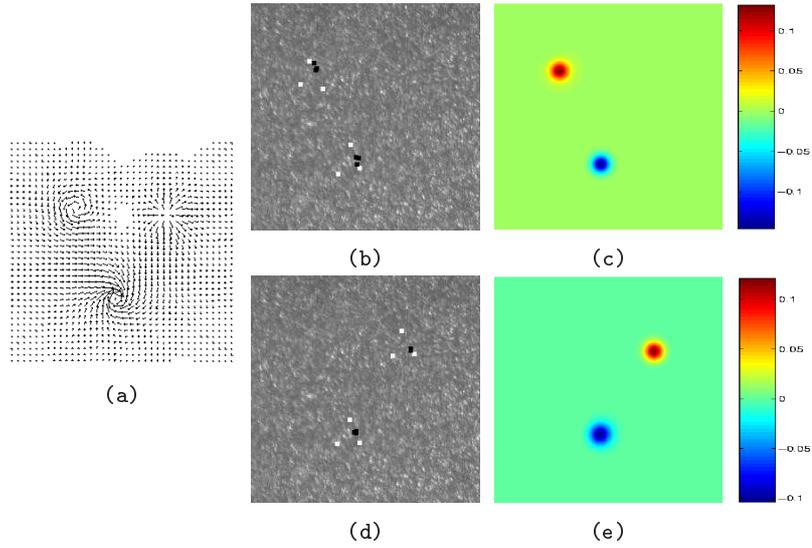


FIG. 4.3: *Résultat avec des positions initiales des particules perturbées.* (a) Déplacement estimé; (b) Les positions initiales des particules de vortex sont indiquées en blanc, leurs positions à la fin de l'algorithme en noir; (c) Vorticité estimée (valeur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $3.4 \cdot 10^{-4}$); (d) Positions initiales et finales des particules de source; (e) Divergence estimée (valeur absolue moyenne = $1.3 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $5.3 \cdot 10^{-4}$).

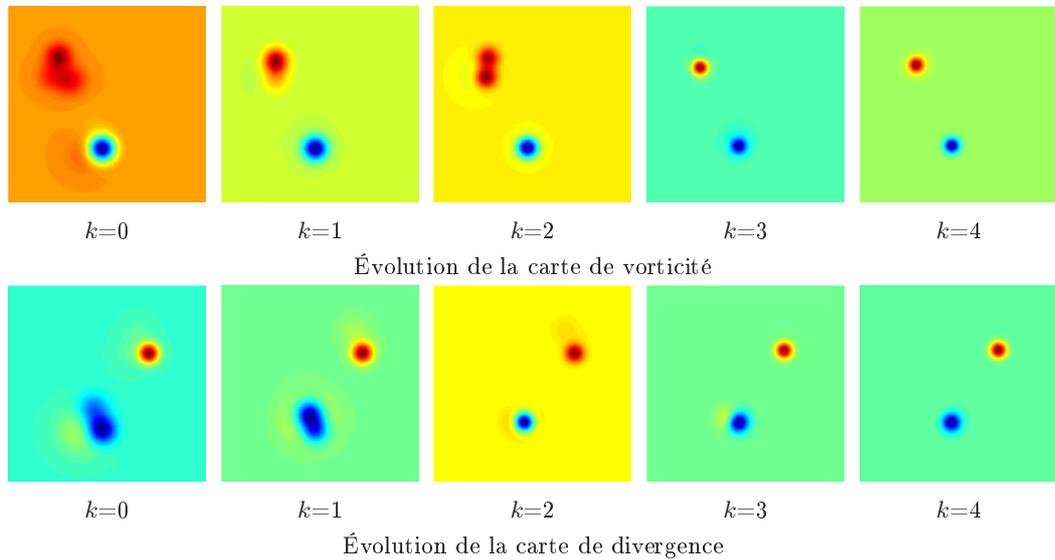


FIG. 4.4: Évolution de l'estimation des cartes de vorticité et divergence au fil des itérations du schéma en deux étapes (*estimation de la vorticité ou divergence portée par chaque particule / ajustement des centres par la procédure mean shift*).

4.1.2 Turbulence 2D derrière un sillage

Nous présentons un deuxième exemple synthétique créé à partir d'un mouvement complexe décrivant l'évolution d'un écoulement turbulent dans le sillage d'un cylindre. Le champ de vitesses a été obtenu par simulation de l'équation de Navier-Stokes avec une méthode DNS (*Direct Numerical Simulation*) [100]¹. Une paire d'images synthétique est créée à partir d'une image initiale de particules (voir figure 4.5(a)). Le déplacement connu et la carte de vorticité associ e sont représentés sur la figure 4.5(b,c).

Afin de comparer la précision des différents résultats, nous calculons la vorticité absolue moyenne sur l'image et l'erreur absolue moyenne entre la vraie vorticité scalaire et son estimation. Nous présentons en premier lieu sur la figure 4.6 le résultat obtenu par une méthode d'estimation dense d di e aux fluides [44]. Le champ de vecteurs estimé est présenté sur la figure 4.6(a), ainsi que la carte de vorticité correspondante figure 4.6(b). Nous pouvons remarquer que le champ de déplacements fourni par cette méthode d'estimation dense présente un profil très proche de la vérité terrain. Cependant, des erreurs locales d'estimation apparaissent sur la carte de vorticité estim e.

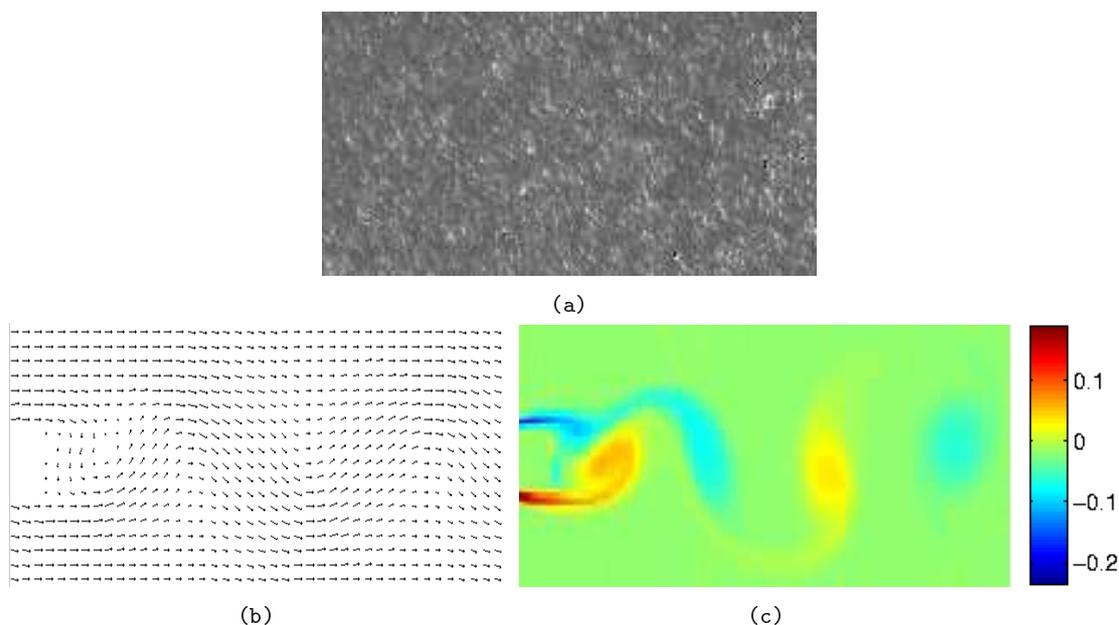


FIG. 4.5: *Exemple synthétique obtenu par DNS (Direct Numerical Simulation)*. (a) Image PIV; (b) Champ de déplacements synthétiques obtenu par simulation de l'équation de Navier-Stokes; (c) Carte de vorticité (vorticité absolue moyenne = 0.0117).

¹La séquence de champs de vitesses a été fournie par le laboratoire de mécanique des fluides de la FIUBA, université de Buenos Aires.

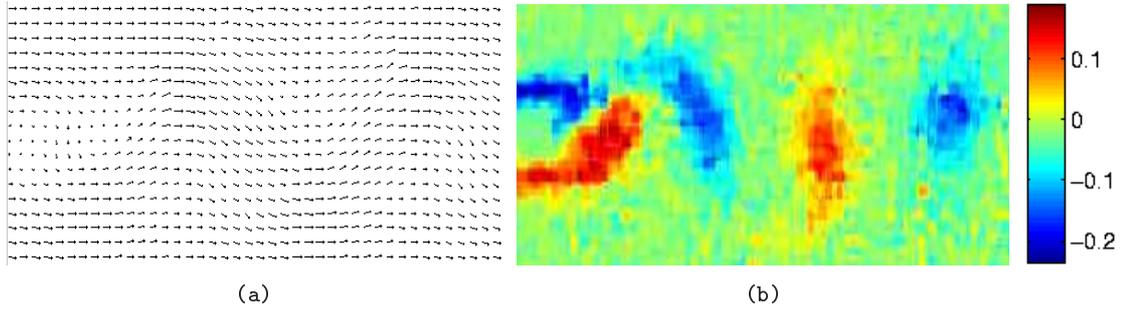


FIG. 4.6: *Résultat obtenu par une méthode d'estimation dense dédiée aux fluides [44]* (a) Champ de vecteurs estimé ; (b) Carte de vorticité associée (vorticité absolue moyenne = 0.0172, erreur absolue moyenne = 0.012).

La figure 4.7 montre le résultat obtenu par notre méthode paramétrique avec une grille uniforme de 30×50 particules de vortex. Notons que les positions sont laissées fixes sur la grille pendant le processus d'estimation, étant donné que la grille est dense et que les régions de vorticité sont toutes recouvertes par des particules. La composante de transport globale a d'abord été extraite (voir la figure 4.7(a)). Ce champ a été estimé avec un estimateur dense standard associé à un fort coefficient de régularisation, puis retiré de la paire d'images. Les valeurs de vorticité absolue moyenne et d'erreur absolue moyenne (voir la légende de la figure 4.7) peuvent être comparées au résultat de la méthode dense dédiée aux fluides (voir la légende de la figure 4.6). La méthode dense semble être plus bruitée et sujette à des petites erreurs locales, ceci peut expliquer le fait que l'erreur absolue moyenne correspondante est plus élevée.

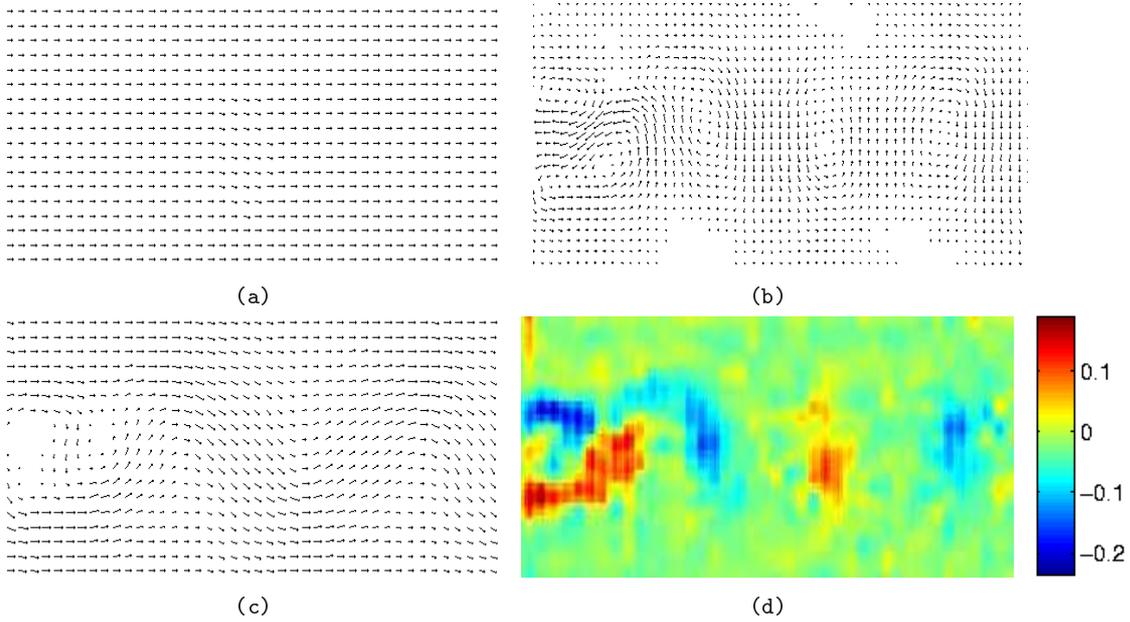


FIG. 4.7: *Résultat avec un grand nombre de particules de vortex* (a) Composante de transport estimée ; (b) Champ de vecteurs solénoïdal estimé ; (c) Champ de vecteurs complet, somme des composantes solénoïdale et de transport ; (d) Carte de vorticité (vorticité absolue moyenne = 0.0159, erreur absolue moyenne = 0.0106).

Nous montrons enfin un exemple de résultat pouvant être obtenu avec un nombre minimal de particules. Seulement 6 particules de vortex ont été utilisées pour estimer le champ de déplacements présenté figure 4.8(b), avec des positions initiales fixées sur une ligne centrale. Après ajout de la composante de transport, le champ de vecteurs correspondant est représenté sur la figure 4.8(c). La distribution de vorticité associée aux 6 particules de vortex est représentée sur la figure 4.8(d). Notons que la carte de vorticité estimée consiste en une représentation grossière de la vraie carte de vorticité (voir figure 4.5(c)). Néanmoins, le champ de vecteurs correspondant est proche du vrai. La solution est moins sujette à des erreurs locales d'estimation, conduisant à une erreur absolue moyenne plus faible pour la vorticité (voir la légende de la figure 4.8).

Ce résultat met en avant le fait que notre méthode est capable d'estimer un champ de vecteurs cohérent à partir d'un nombre de particules très faible. Cette représentation de faible dimension du champ de déplacements permet une interprétation parlante directe de l'organisation et la position des vortex dans l'écoulement. Il est aussi important de noter qu'une telle représentation compacte de l'écoulement peut être estimée avec un coût de calcul plus faible qu'une méthode dense. Ceci n'est cependant plus le cas pour une représentation avec un très grand nombre de particules, où le calcul de la méthode proposée est plus élevé.

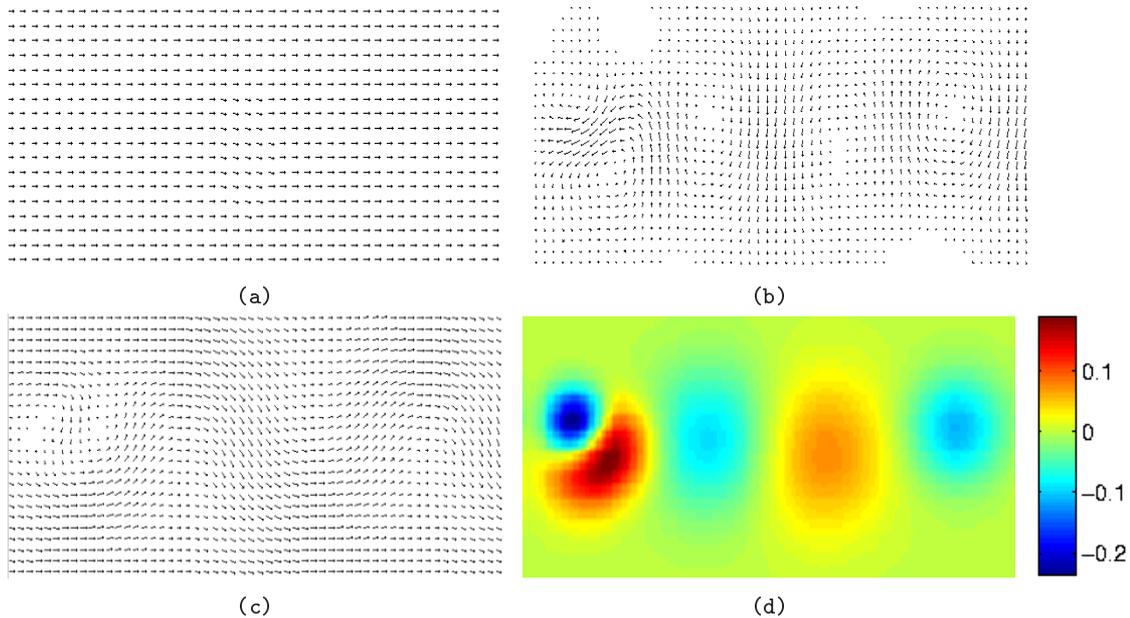


FIG. 4.8: *Résultat avec un nombre minimal de particules de vortex* (a) Composante de transport estimée ; (b) Champ de vecteurs solénoïdal estimé ; (c) Champ de vecteurs complet, somme des composantes solénoïdale et de transport ; (d) Carte de vorticité (vorticité absolue moyenne = 0.011, erreur absolue moyenne = 0.0091).

4.1.3 Autre exemple de turbulence 2D

Cet exemple traite des images synthétiques de particules transportées par un écoulement 2D turbulent complexe, composé de plusieurs vortex. Le vrai déplacement et la carte de vorticité correspondante sont représentés sur la figure 4.9(a,b). Cet écoulement a également été simulé par une technique DNS². Le mouvement est purement rotationnel et la composante de transport est nulle. Nous montrons sur la figure 4.9(c,d) le résultat obtenu par la méthode d'estimation dense [44]. La solution est comparée au résultat de notre estimateur paramétrique, avec une grille de 20*20 particules de vortex (voir la figure 4.9(e,f)).

Une comparaison quantitative globale peut être effectuée à partir des valeurs de vorticité absolue moyenne et d'erreur absolue moyenne (voir la légende de la figure 4.9). L'erreur absolue moyenne est plus faible pour l'estimateur dense, mais notre méthode fournit une solution avec une vorticité absolue moyenne plus proche de la vraie valeur.

Une comparaison plus fine est proposée, afin de mettre en avant de manière plus précise les différences entre les deux estimateurs. Sur la figure 4.10 sont représentées les lignes de contour associées à une valeur donnée de vorticité absolue. Ces lignes sont tracées pour la carte de vorticité de référence et pour les deux méthodes d'estimation. Ces contours mettent l'accent sur le fait que la méthode dense est plus sujette à des petites erreurs locales, alors que l'estimateur paramétrique permet de retrouver les structures à grande échelle de la vorticité mais tend à lisser les petites échelles. Ces structures à petite échelle sont

²La séquence d'images a été fournie par le CEMAGREF de Rennes dans le cadre du projet européen FLUID "Fluid Image Analysis and Description" <http://fluid.irisa.fr>.

présentes dans la solution obtenue par l'estimateur dense. Néanmoins, elles sont difficiles à séparer des hautes fréquences générées par les erreurs d'estimation (voir la figure 4.10). Si l'objectif est de caractériser les structures de vorticité large ou moyennes de l'écoulement, l'estimateur paramétrique semble alors mieux adapté. Afin de confirmer cette observation, nous avons comparé des profils de vorticité le long de deux lignes donn es sur l'image. Ces profils sont représentés sur la figure 4.11. Le profil correspondant à la vérité terrain est superposé aux profils obtenus par l'estimateur dense et la méthode paramétrique. Nous pouvons constater que les profils associés à l'estimation dense sont très proches de la solution. Ils présentent cependant des erreurs d'estimation dans les petites échelles, alors que les profils de la solution paramétrique présentent une version liss e de la solution. L'estimateur paramétrique ne permet pas de capturer tous les détails de petite échelle de la vorticité, mais permet de représenter avec précision les composantes à grande échelle de la solution. Cette propriété est intéressante pour l'analyse ou la caractérisation des grandes échelles de turbulence.

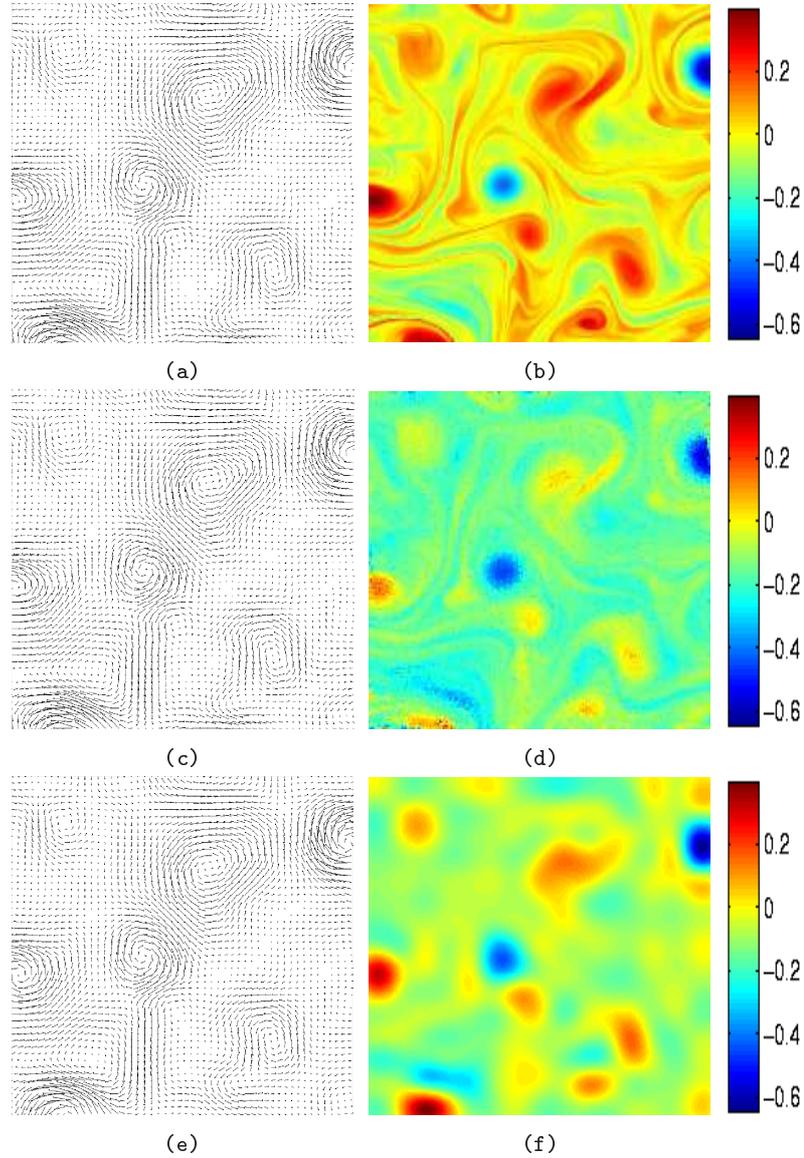


FIG. 4.9: *Écoulement 2D turbulent*. (a) Vrai champ de déplacements ; (b) Carte de vorticité (vorticité absolue moyenne = 0.0639) ; (c) Champ de déplacements estimé par une méthode dense dédiée [44] ; (d) Carte de vorticité associée (vorticité absolue moyenne = 0.0663, erreur absolue moyenne = 0.0286) ; (e) Champ de déplacements estimé par la technique proposée ; (f) Carte de vorticité associée (vorticité absolue moyenne = 0.062, erreur absolue moyenne = 0.0363).

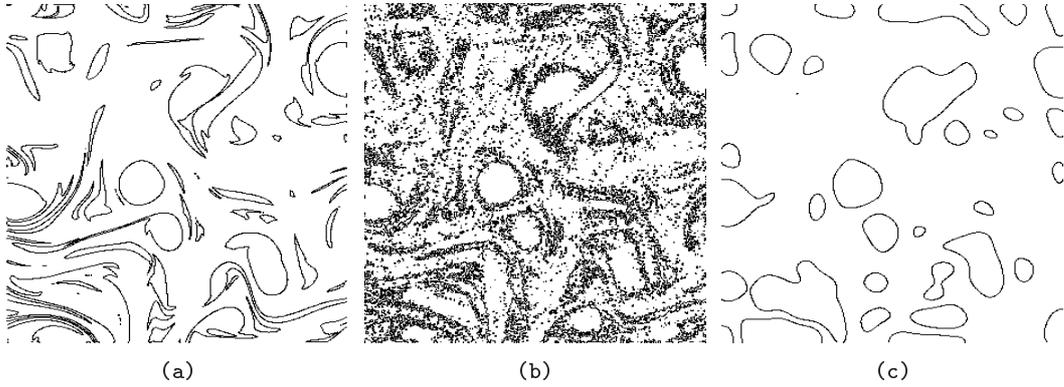


FIG. 4.10: *Lignes de contours de vorticité (pour $|\text{curl } \mathbf{w}| = 0.08$). (a) Contours de référence; (b) Contours associés à la méthode dense; (c) Contours pour l'estimateur paramétrique.*

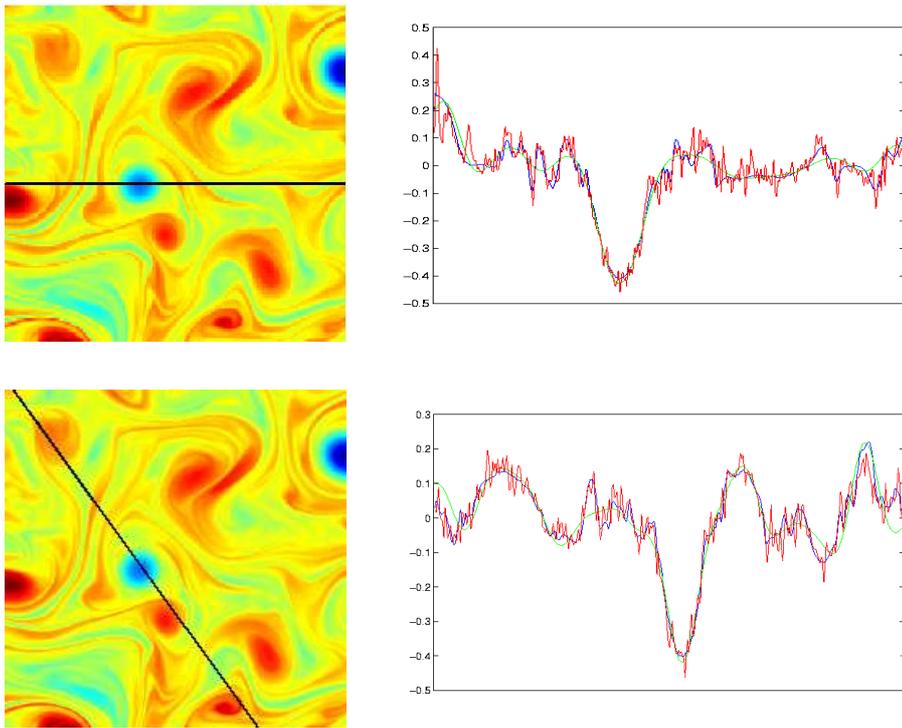


FIG. 4.11: *Profils de vorticité le long de deux lignes (repr sent es sur les images de gauche). Les courbes verte, rouge et bleue représentent respectivement les profils de vorticité pour l'estimateur paramétrique, l'estimateur dense et le vrai champ de déplacements.*

4.2 Application en météorologie

4.2.1 Canal infrarouge du satellite Météosat

Ce premier exemple météorologique est issu d'une séquence fournie par le canal infrarouge du satellite Météosat ³, montrant une large dépression sur l'Océan Atlantique (figure 4.12). Dans cette séquence le but est d'estimer le large vortex situé dans la partie gauche de l'image. Nous appliquons notre méthode avec 15 particules de vortex situées à proximité de la dépression.

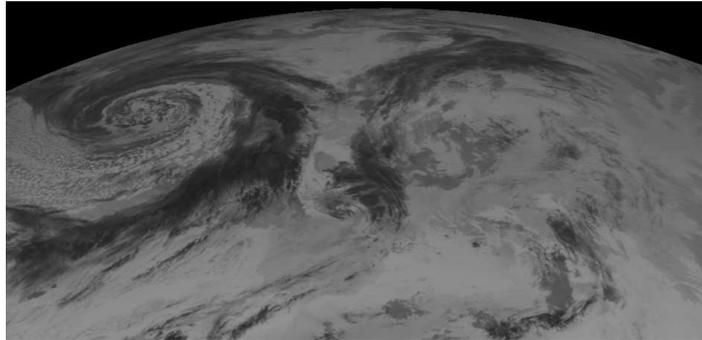


FIG. 4.12: Météosat image, infrared channel.

Le résultat de l'estimation est présenté sur la figure 4.13. La composante de transport estimée est représentée sur la figure 4.13 (b). La composante solénoïdale et la vorticité sous-jacente sont visibles sur les figures 4.13 (c) et 4.13 (d). Il peut être noté que le mouvement dépressionnaire observé correspond à un vortex allongé. Cette situation est modélisée par un vortex tripolaire, caractéristique en turbulence bidimensionnelle.

³La séquence a été fournie par le LMD (Laboratoire de Météorologie Dynamique).

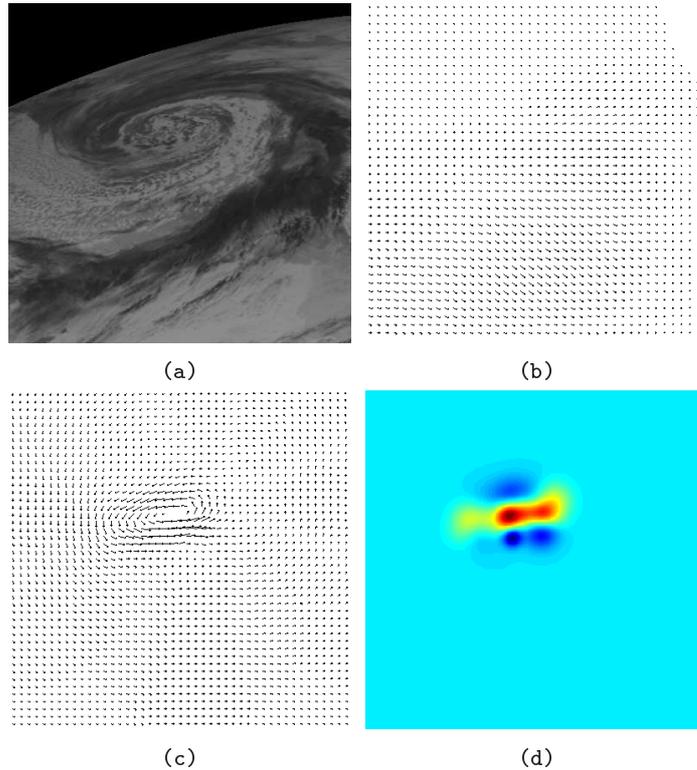


FIG. 4.13: *Résultat sur une séquence du canal infrarouge de Météosat.* (a) Image de la dépression sur l'Atlantique Nord ; (b) Composante de transport estimée ; (c) Composante solénoïdale estimée ; (d) Carte devorticité correspondante.

4.2.2 Canal vapeur d'eau de Météosat

Ce deuxième exemple concerne l'estimation d'un mouvement divergent à partir d'une paire d'images du canal vapeur d'eau de Météosat ⁴. Le résultat obtenu est visible sur la figure 4.14. Un petit nombre de particules de source permet de retrouver le mouvement divergent, correspondant au mouvement apparent d'une cellule convective. La figure 4.15 (a) présente la position initiale des particules et leurs positions finales après estimation. Cet exemple montre l'efficacité de la procédure d'ajustement basée sur la technique mean shift. Les positions optimales des particules sont estimées au centre du mouvement divergent. L'évolution de l'estimation de la carte de divergence avec les positions successives des particules est illustrée sur la figure 4.15 (b). La composante de transport extraite et le champ de vecteurs divergent estimé sont présentés sur les figures 4.14 (c) et 4.14 (d).

⁴La séquence a été fournie par le LMD (Laboratoire de Météorologie Dynamique).

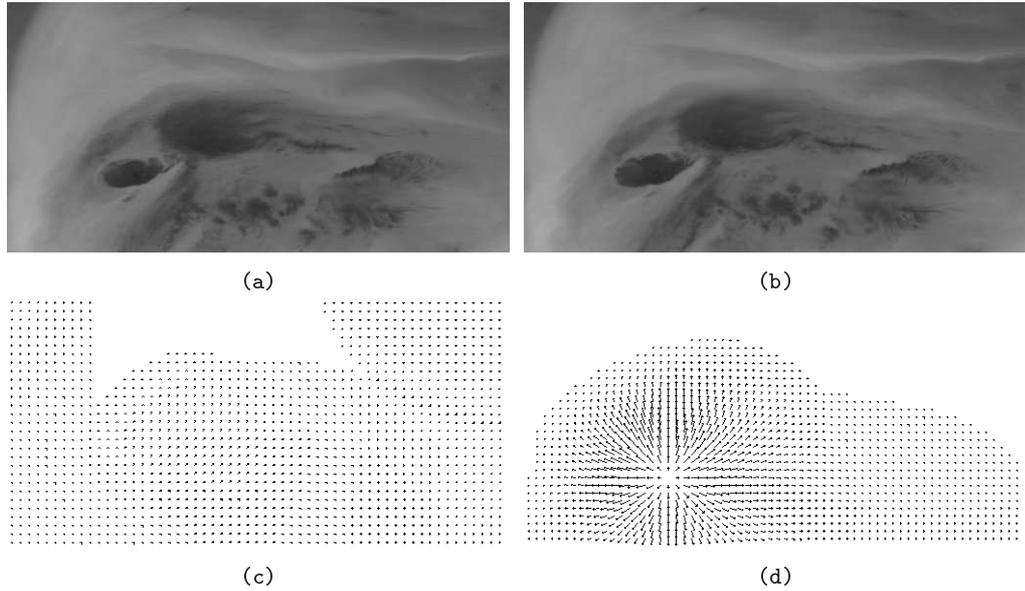


FIG. 4.14: *Résultat sur des images du canal vapeur d'eau de Météosat.* (a)-(b) Première et deuxième images ; (c) Composante de transport estimée ; (d) Composante irrotationnelle estimée.

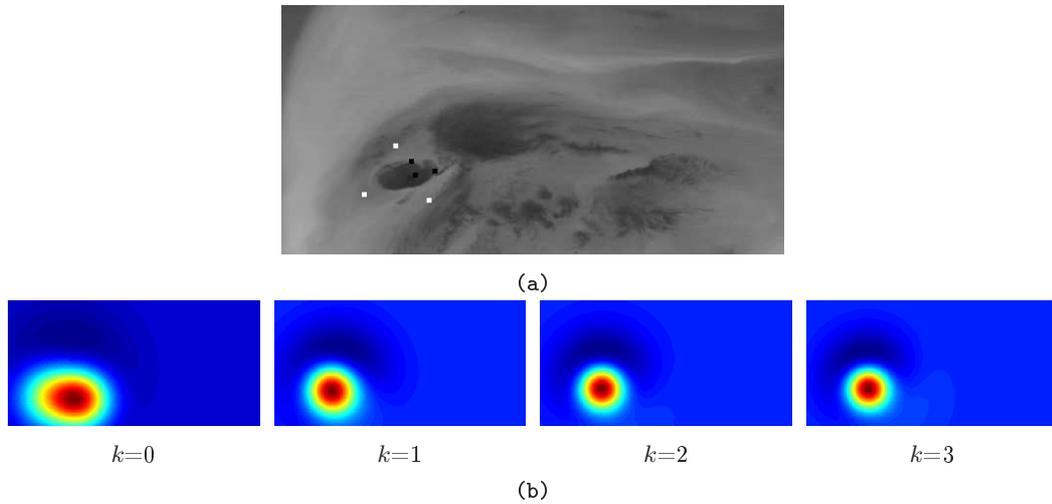


FIG. 4.15: *Illustration de l'ajustement des positions des particules.* (a) Les positions initiales des particules sont tracées en blanc sur l'image, les positions finales en noir ; (b) Évolution de la carte de divergence estimée (convergence après 3 itérations).

4.3 Application en mécanique des fluides expérimentales

La méthode a été expérimentée sur des images décrivant l'évolution d'un vortex généré au bout d'une aile d'avion ⁵. L'écoulement est ici ensemencé expérimentalement par de

⁵La séquence a été fournie par l'ONERA (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales).

la fumée et illuminé par une nappe laser. La figure 4.16 donne un aperçu de la cohérence temporelle de la solution. Sur cette figure ont été représentés les cartes de vorticité estimées, superposées aux images originales de fumée, et les champs de vecteurs correspondant. Il peut être observé que la méthode permet de retrouver un vortex principal cohérent, et un deuxième vortex secondaire tournant autour du premier. Ces résultats ont été obtenus à partir d'un ensemble de 15 particules de vortex.

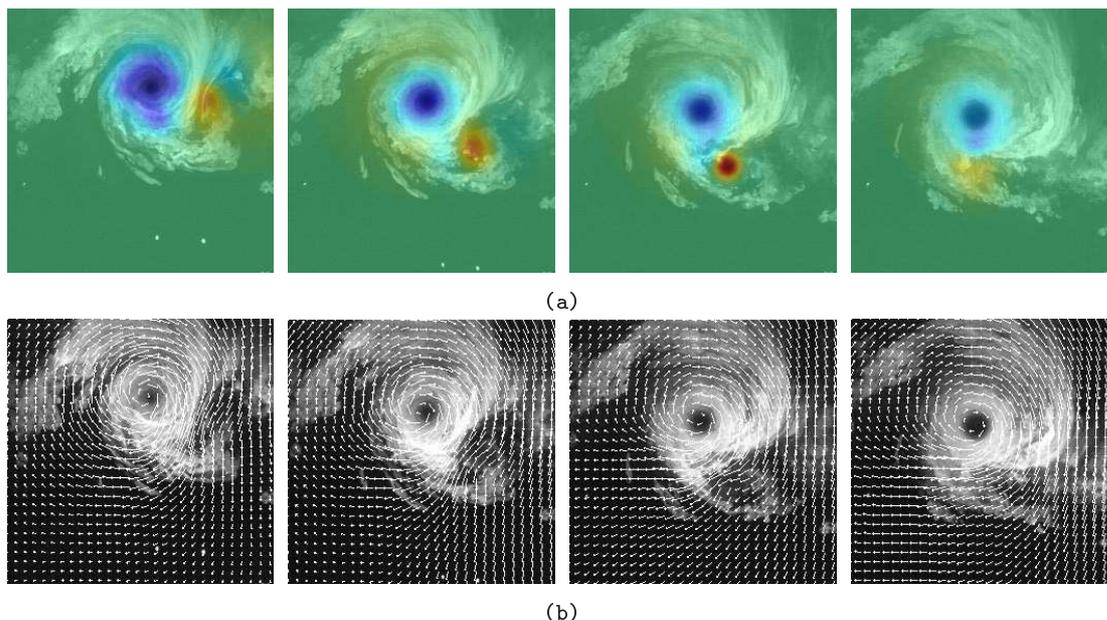


FIG. 4.16: *Vortex générés au bout d'une aile d'avion* (a) Cartes de vorticité estimées à partir d'un ensemble de 15 particules de vortex, superposées sur les images à des instants successifs; (b) Champs de déplacement estimés.

4.4 Application en imagerie médicale

Le dernier domaine d'application étudié correspond au problème du recalage non rigide en imagerie médicale. Ce domaine de recherche est très actif et de nombreux travaux se sont penchés sur ce sujet. Nous renvoyons le lecteur à des états de l'art complets sur ce sujet [105, 108, 153, 162]. Le procédé de recalage non rigide a pour but d'estimer une transformation non linéaire mettant deux images en correspondance. En plus des transformations rigides, un recalage non rigide est nécessaire lorsque des phénomènes déformables sont observés. Les applications possible du recalage non rigide sont nombreuses et diverses : compensation de mouvement causé par les battements du coeur, estimation d'une variabilité anatomique inter-individus (pour la construction d'atlas anatomiques), contrôle de changements temporels (évolution de lésions dans le cas de sclérose en plaques), *etc.*

Pour cette application nous nous appuyons sur l'équation de conservation de la luminosité classique ($\frac{dI}{dt} = 0$), car l'équation de continuité proposée pour les fluides n'est plus valide dans ce contexte. Les équations du problème d'estimation restent les mêmes, excepté que les termes de divergence disparaissent.

La méthode a été testée sur des images de résonance magnétiques (IRM) d'un patient

souffrant de sclérose en plaques. La caractérisation de l'accroissement des lésions est importante afin d'évaluer l'évolution de la maladie. Deux volumes 3D ont été acquis à 6 mois d'intervalle et recalés par une transformation rigide [107]. Une coupe axiale 2D a ensuite été extraite. La lésion d'intérêt apparaît comme une tache blanche dans la partie gauche du cerveau au temps t_0 . Son accroissement est visible au temps t_0+6 mois sur la figure 4.17(d).

Les particules de source ont été initialisées manuellement à proximité de la lésion. Comme le montre la figure 4.18(a), le processus d'estimation est peu sensible à cette initialisation puisque la méthode d'ajustement des positions permet de guider les particules vers la région d'intérêt. Un mouvement divergent de type source est alors estimé, rendant compte de l'accroissement de la lésion. L'image recalée correspondante est présentée sur la figure 4.18(c). L'image de différences entre l'image originale et l'image déformée (figure 4.19(a)) peut être comparée à l'image de différences après recalage (figure 4.19(b)). L'erreur due à la lésion a été supprimée par la méthode d'estimation.

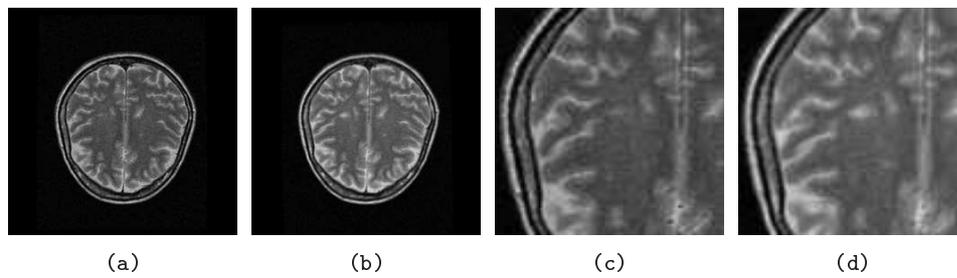


FIG. 4.17: *Évolution d'une lésion de sclérose en plaques* (a) Coupe au temps t_0 ; (b) Coupe correspondante au temps t_0+6 mois; (c)-(d) Zoom centré sur la lésion.

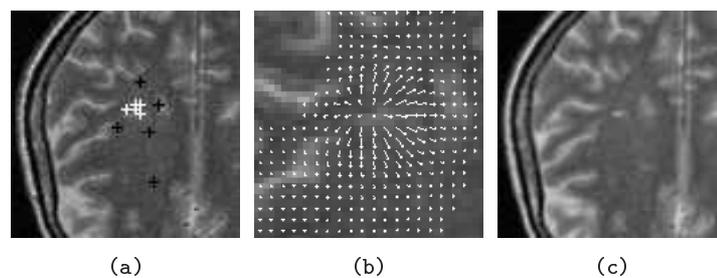


FIG. 4.18: (a) Déplacement automatique des particules de source vers la région d'intérêt. Les points noirs représentent les positions initiales, les points blancs les positions finales; (b) Zoom sur le champ divergent estimé, centré sur la lésion; (c) Image recalée (image au temps t_0+6 mois recalée vers l'image t_0).

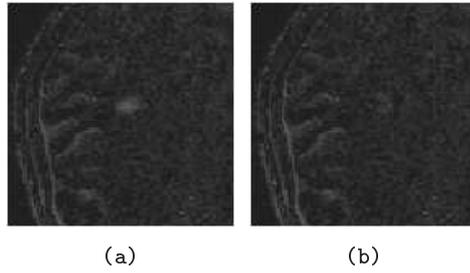


FIG. 4.19: (a) Différence entre les deux images après le recalage rigide ; (b) Différence après le recalage non rigide. L'accroissement de la lésion a été capté par le recalage non rigide.

Conclusion

L'état de l'art présenté dans le chapitre 2 sur les méthodes d'estimation de mouvement dédiées aux mouvements fluides a mis en avant le fait que l'adaptation des estimateurs de flot optique à l'imagerie fluide conduit à des estimateurs fournissant une solution précise mais de très grande dimension. La solution fournie par les méthodes de corrélation (couramment utilisées en pratique) ne peut pas non plus être décrite de manière compacte. D'autre part, il a été constaté que plusieurs méthodes d'estimation paramétriques ont été développées dans le contexte de mouvements déformables, mais qu'aucune n'est particulièrement adaptée à la nature spécifique et complexe des mouvements fluides.

En nous basant sur une paramétrisation de la vorticité utilisée dans le domaine de la simulation numérique d'écoulements fluides, nous avons présenté dans le chapitre 3 une méthode d'estimation fournissant une représentation de faible dimension du champ de déplacements, estim e à partir des donn es images. Cette représentation provient d'une discrétisation adapt e des cartes de divergence et de vorticité du champ de vecteurs en termes de particules de vortex et de source. Le champ de vecteurs correspondant, composé d'une composante irrotationnelle et d'une composante solénoïdale, est alors décrit par un ensemble de fonctions de base des deux types.

Le modèle de donn es est construit à partir de l'équation de conservation de la masse, déjà utilis e dans d'autres travaux comme alternative à l'hypothèse classique de conservation de la luminance. Le problème d'estimation peut alors être formulé comme un problème de minimisation sur les donn es des images. L'estimation est mise en place dans un cadre multirésolution afin de gérer les grands déplacements entre deux images, dus   un écoulement rapide ou une fréquence faible d'acquisition des images. Les différents types de paramètres du modèle sont estimés à l'aide d'une stratégie originale couplant une méthode de gradient conjugué non linéaire à une procédure mean shift.

La méthode d'estimation propos e a été test e sur des images provenant de domaines d'application différents et décrivant des mouvements de diverses natures. Les résultats ont été validés quantitativement et qualitativement, sur des exemples synthétiques et réels, et comparés aux résultats fournis par une méthode de flot optique d di e aux mouvements fluides.

Les résultats ont montré que la nature paramétrique de la méthode autorise soit l'estimation précise d'un champ de déplacements à partir d'un grand nombre de particules, soit l'estimation d'une représentation simplifi e du mouvement avec un nombre réduit de paramètres. Cette représentation simplifi e a un sens, puisqu'elle correspond aux composantes li es aux grandes échelles du déplacement. Notons que cette méthode permet également d'estimer le déplacement dans des zones localis es, contrairement à une méthode dense.

Enfin, une telle représentation compacte du champ permet d'envisager la mise en place

d'un suivi temporel de champs de vecteurs le long d'une séquence d'images, ce qui n'était pas réalisable avec une solution décrite par un vecteur de déplacement en tout point de l'image. Nous traitons cette extension temporelle dans la deuxième partie de ce document.

Deuxième partie

Suivi temporel de champs de vitesses d'écoulements fluides par filtrage non linéaire

Introduction

La deuxième partie de ce document traite du problème de suivi de champs denses de vitesses dans des séquences d'images décrivant des écoulements fluides. Notre objectif principal consiste à proposer une méthode d'estimation des champs de vitesses à partir d'une séquence d'images, respectant la dynamique des grandes échelles spatiales de l'écoulement.

La première partie de ce document a montré comment l'estimation du champ des vitesses d'un écoulement fluide était possible à partir de deux images consécutives de cet écoulement. Un estimateur conduisant à une représentation réduite de l'écoulement a notamment été proposé, et les résultats expérimentaux ont attesté que la méthode d'estimation permettait d'extraire un champ de vitesses correspondant à l'évolution des grandes échelles de l'écoulement.

L'estimation des champs de déplacements pour des paires d'images successives ne garantit absolument pas une cohérence temporelle des champs de vitesses estimés sur l'ensemble de la séquence. En effet, en présence d'images bruitées ou de déplacements de grande amplitude ou chaotiques (dans le cas de phénomènes turbulents par exemple), l'estimation du mouvement devient difficile et particulièrement sujette aux erreurs.

La faiblesse d'une telle approche provient du fait qu'aucune contrainte temporelle sur l'évolution globale des champs de déplacements n'est intégrée dans le processus d'estimation. Aucune loi de conservation physique n'est donc respectée, mis à part le respect de proche en proche d'une loi de conservation indirecte : la préservation de la luminance. Cependant, le respect de cette seule contrainte ne peut en aucun cas permettre l'émergence d'une solution physiquement cohérente.

L'introduction d'une loi dynamique physique (issue dans notre cas des équations de Navier-Stokes) dans le processus d'estimation conduit naturellement à un problème de suivi des champs de vitesses dans le temps. L'objectif consiste en effet à estimer un vecteur d'état régi par une loi d'évolution définie *a priori*, à partir d'observations indirectes de cet état. Le choix de formuler ce problème dans un cadre probabiliste nous permet de définir une loi d'évolution approximative (définie à un bruit près) et de l'associer à des mesures bruitées extraites de la séquence d'images. Dans ce cadre probabiliste, la non linéarité du modèle d'évolution et la relation non linéaire liant l'état aux informations brutes de l'image peuvent être prises en compte dans la modélisation. La résolution du problème de filtrage associé à un tel modèle entièrement non linéaire est alors difficile, notamment lorsque la dimension du vecteur d'état est trop élevée. Néanmoins, en se basant sur des techniques récursives bayésiennes bien adaptées et à partir d'une représentation de taille réduite de l'état (comme celle proposée dans la première partie de ce document), une telle méthode de suivi par filtrage peut être mise en place. Cette deuxième partie à suivre vise à situer l'approche que nous proposons par rapport aux travaux existants et à l'exposer

en détails.

Le chapitre 5 donne un aperçu de quelques travaux traitant du suivi de structures fluides à partir de séquences d'images. Les méthodes de suivi de points caractéristiques ou de courbes sont notamment abordées. Ces méthodes sont généralement dédiées à des applications très précises et n'intègrent aucune information *a priori* sur l'évolution du fluide. Les contributions récentes liées au problème de suivi de champs denses de vitesses sont ensuite présentées. L'accent est mis sur l'inclusion d'*a priori* physiques dans les modèles, visant à améliorer la cohérence temporelle des estimations. Il est à noter que jusqu'aux travaux développés très récemment, la seule technique utilisée pour accroître la cohérence temporelle des estimations se basait sur une régularisation spatio-temporelle des champs de déplacements. Or, cette approche est restrictive puisque le modèle sous-jacent suppose que les champs de vitesses soient globalement stationnaires.

Le principe du filtrage bayésien sur lequel nous nous basons est détaillé dans le chapitre 6. L'intérêt d'une modélisation continue du problème est confronté aux modélisations discrètes usuellement rencontrées dans le domaine de l'analyse d'images. Selon la nature du modèle de filtrage, les différentes méthodes de résolution du problème de filtrage optimal sont ensuite exposées, en insistant sur les méthodes dédiées aux modèles non linéaires.

Le chapitre 7 expose la formulation du problème de suivi de champs de vitesses d'écoulements fluides dans un cadre de filtrage bayésien. La construction du modèle de filtrage associé est détaillée, ainsi que la méthode de suivi dérivant de la résolution du problème de filtrage.

Le dernier chapitre expose et analyse des résultats de suivi obtenus sur des séquences synthétiques et sur des exemples réels issus de la météorologie et la mécanique des fluides expérimentale.

Chapitre 5

Suivi de structures fluides : approches existantes

Ce chapitre présente les travaux relatifs à l'analyse temporelle des mouvements de nature fluide à partir de séquences d'images. Quelques méthodes adaptées au suivi de structures caractéristiques sont présentées dans la première section. Dans ce cas, l'objectif est de suivre le centre ou le contour de phénomènes particuliers. Nous renvoyons le lecteur à [43] et [130] pour des états de l'art complets sur les deux sujets. Lorsque l'objectif est l'analyse temporelle de l'écoulement dans son ensemble, on cherche à suivre et reconstruire des champs denses de déplacements sur toute la séquence. La deuxième partie de ce chapitre expose les méthodes récemment proposées pour répondre à ce problème.

5.1 Suivi de structures caractéristiques

5.1.1 Points singuliers

Définition et intérêt

Les points singuliers de l'écoulement, encore appelés points critiques, correspondent aux centres des vortex, puits ou sources, où la vitesse est nulle. Ces points sont intéressants car ils sont associés à des phénomènes particuliers. En météorologie par exemple, ces points sont les centres de dépressions ou de forts mouvements convectifs responsables de phénomènes climatiques violents (fortes pluies, tornades). En mécanique des fluides, la connaissance des zones de vorticité est à la base de l'étude des phénomènes turbulents. L'analyse et le suivi des points singuliers correspondant aux centres des vortex de l'écoulement est donc importante dans ce domaine. Enfin, une représentation très compacte de l'écoulement peut être obtenue à partir de ces points.

Méthodes de détection

La plupart des méthodes permettant de localiser ces points singuliers sont bas es sur une approximation linéaire de l'écoulement au voisinage des points singuliers. Le mouvement de la structure singulière peut alors être caractérisé en analysant la matrice de l'application linéaire associ e. L'étude de la forme de Jordan de cette matrice permet

d'associer la singularité à un portrait de phase donné (noeud, point de selle, rotation,...), et donc de la caractériser [64, 137, 147]. Notons que l'approche peut être étendue à des portraits de phase non linéaires [63].

La détection des points peut être réalisée à partir d'un champ de déplacement estimé [39, 117, 125, 137]. Les points singuliers peuvent être détectés en se basant sur les indices de Poincaré associés au champ de déplacements [39, 64]. L'indice d'une courbe fermée est donné par le nombre de tours effectués par le champ le long de cette courbe. L'indice vaut 1 si la courbe entoure un vortex, un puit ou une source. Les indices de Poincaré sont également utilisés dans [117], où l'estimation des singularités est couplée à l'estimation du champ dense de déplacements. Les auteurs ne se basent plus sur un modèle de portrait de phases mais sur un modèle de Rankine (présenté dans le chapitre 2). Une autre analyse des points singuliers associée au modèle de Rankine est proposée dans [45]. Dans cette méthode, les singularités sont directement estimées à partir des composantes irrotationnelle et solénoïdale du champ. Il est ainsi possible de différencier les vortex des puits/sources, ce qui n'est réalisable avec la méthode des indices.

La détermination des points singuliers peut également être effectuée à partir des données des images [113]. L'approche statistique proposée localise les points singuliers de manière itérative en estimant un modèle affine de mouvement 2D dans une fenêtre dont la taille et la position s'adapte au cours des itérations. L'extraction des points singuliers peut même être réalisée à partir d'une seule image si l'image rend compte du mouvement. Ceci est le cas pour des images de filets d'émission et de vélocimétrie par éléments de trajectoire (images PSV) en mécanique des fluides [112].

Suivi

Si l'application visée est le suivi des caractéristiques principales de l'écoulement, on peut se concentrer sur le suivi des points singuliers. L'évolution globale du phénomène pourra alors être étudiée. Dans ce cas, une détermination précise du domaine d'influence de chaque singularité n'est pas indispensable. La zone d'influence peut être modélisée simplement par un disque comme dans le cas du modèle de Rankine. Elle peut également être définie par un rectangle comme dans [111], où l'on s'intéresse au suivi du centre d'une dépression. Les domaines d'influence sont alors liés à la taille des structures d'intérêt dans le phénomène observé, mais ne décrivent pas précisément ces contours.

Notons que les exemples de suivi de ces points singuliers traitent le problème de suivi comme une succession d'estimations dans le temps. Dans [111] par exemple, la recherche du point est initialisée grâce à la position de la fenêtre estimée à l'instant précédent, mais aucun modèle dynamique sous-jacent ne permet d'assurer une cohérence temporelle dans les estimations.

Le suivi de points dans des séquences d'images d'écoulements fluides est un problème délicat en raison de la variabilité temporelle des phénomènes. Les structures observées peuvent subir des déformations très importantes et changer de topologie au cours du temps. De plus, des variations importantes de l'intensité lumineuse peuvent être observées. Afin d'améliorer la robustesse du suivi temporel de ces points caractéristiques, il serait intéressant d'exploiter les méthodes de suivi de points par filtrage stochastique [10].

5.1.2 Évolution de contours

Lorsque l'on ne s'intéresse pas seulement aux caractéristiques globales de l'écoulement mais à un phénomène particulier il peut être nécessaire de décrire de manière plus précise les contours des structures mises en jeu. Les applications peuvent être l'analyse d'un phénomène climatique particulier ou l'observation de déformations en imagerie médicale.

La plupart des approches développées pour répondre à ce problème reposent sur des méthodes d'ensembles de niveaux [128, 145] permettant le suivi de courbes fermées. La courbe C suit une évolution du type :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -F\mathbf{n}, \quad (5.1)$$

où F est une fonction de propagation à définir et \mathbf{n} est la normale à la courbe.

L'évolution de la courbe est décrite de manière implicite par le niveau zéro d'une fonction scalaire implicite ϕ :

$$\forall t, C(t) = \{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad (5.2)$$

dont l'évolution est définie par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -F \|\nabla \phi\|. \quad (5.3)$$

La fonction ϕ initiale est usuellement la fonction distance signée à la courbe initiale (positive à l'extérieur, négative à l'intérieur). Un critère d'arrêt dépendant des données de l'image permet d'extraire un contour, donné par la position finale de la courbe.

Ainsi dans [40] les contours sont extraits dans chaque image puis mis en correspondance à partir de chemins géodésiques connectant les courbes. Ces chemins sont calculés à partir de similarités locales entre points de dépôts et points d'arrivée. Un suivi de nuages convectifs basé sur les ensembles de niveaux accompagné d'une caractérisation de l'activité de ces nuages est proposé dans [131]. Contrairement à l'approche décrite dans [40], il n'est pas nécessaire d'extraire les frontières des nuages au préalable dans chaque image. Une première étape de prédiction est réalisée grâce à la connaissance du champ dense de déplacements permettant de construire une fonction de propagation adéquate. Le critère d'arrêt est lui aussi construit à partir de l'information dynamique. Dans la deuxième étape, le contour évolue localement de manière à s'ajuster aux frontières du nuage, à partir des données photométriques de l'image.

Enfin, notons le travail de [31] qui extrait le contour des nuages en utilisant un modèle markovien de segmentation. Le schéma proposé peut être apparenté à une approche par contours actifs [93]. Les contours actifs sont un autre exemple de modèles déformables, permettant d'extraire les frontières d'un objet en faisant évoluer une courbe paramétrée.

5.2 Suivi de champs denses de vitesses

5.2.1 Régularisation spatio-temporelle

Les méthodes de régularisation spatiale associées à l'estimation du flot optique (présentées dans la section 2.2.1 du document) peuvent être étendues à la dimension temporelle.

Une régularisation spatio-temporelle a ainsi été proposée par [156], conduisant à un problème d'optimisation convexe. Les champs denses pour tous les instants $z \in [0, T]$ de la séquence sont estimés par minimisation de la fonctionnelle :

$$J(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega \times [0, T]} \left(\nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{x} dt + \alpha \int_{\Omega \times [0, T]} (\|\nabla_3 u\|^2 + \|\nabla_3 v\|^2) d\mathbf{x} dt, \quad (5.4)$$

où $\nabla_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$.

L'idée d'une régularisation spatio-temporelle a été proposée au préalable par [123] dans un contexte de lissage guidé par l'image. L'ajout de la composante temporelle dans l'estimation a également été traité par [23, 22], mais dans un cadre d'optimisation non convexe.

Les travaux récents en imagerie fluide portent sur l'ajout de cohérence temporelle dans l'estimation du mouvement dense sur une séquence d'images. Ainsi, [73] propose d'utiliser la forme vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes 2D (décrite section 1) pour inclure un *a priori* physique dans l'estimation. La vorticité estim e au temps t est propag e jusqu'au temps $t + 1$ grâce à cette équation. Le champ prédit correspondant est alors utilisé pour initialiser la procédure d'estimation au temps $t + 1$ et améliorer la cohérence temporelle des estimations. La méthode est appliqu e à l'estimation de champs de vitesses sur des couches atmosphériques stratifi es.

Une telle propagation de la vorticité à l'aide de la formulation vorticité-vitesse de l'équation est également utilis e dans [142], appliqu e à des écoulements turbulents incompressibles. Le terme de régularisation force la solution à être en adéquation avec la vorticité propag e $\tilde{\xi}$:

$$J(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left(\nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} (\xi - \tilde{\xi})^2 d\mathbf{x}, \quad (5.5)$$

sous contrainte d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{w} = 0$.

Cette contrainte d'adéquation ne garantissant pas un lissage de la vorticité de la solution, il est nécessaire d'ajouter un terme de lissage de la vorticité, conduisant finalement à la fonctionnelle suivante :

$$J(I, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left(\nabla I(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) + \frac{\partial I(\mathbf{x})}{\partial t} \right)^2 d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} (\xi - \tilde{\xi})^2 d\mathbf{x} + \beta \int_{\Omega} (\|\nabla \xi\|^2) d\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

L'ajout de la contrainte temporelle améliore la qualité des estimations sur la séquence. Notons cependant que la méthode propos e impose de fixer manuellement un paramètre supplémentaire : le paramètre β lié à l'importance du lissage de la vorticité.

5.2.2 Suivi variationnel

Une méthode permettant le suivi temporel des champs de déplacements a récemment été propos e [129], s'appuyant sur des concepts de contrôle optimal développés en assimilation de donn es [18, 101, 152]. L'approche consiste à minimiser une fonction de c t

spatio-temporelle globale et continue, déduite d'une estimation bayésienne au sens du maximum a posteriori. L'objectif est de minimiser l'erreur entre les prédictions données par un modèle et les observations disponibles.

Le suivi des champs de vecteurs est formulé par le suivi de leur vorticité et divergence. La fonction d'état \mathbf{X} du système représente la vorticité ξ et la divergence ζ du champ : $\mathbf{X} = [\xi, \zeta]^T$. Cette fonction d'état suit un modèle d'évolution temporel \mathbb{M} . La valeur initiale \mathbf{X}_0 du système est suppos e connue, et des observations not es \mathbf{y}_n de l'état sont disponibles à certains instants t_n . Le modèle est alors formulé comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbb{M}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{x}) \\ Y(\mathbf{x}, t) = \mathbb{H}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) + \epsilon(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (5.7)$$

où η, ν et ϵ désignent les perturbations gaussiennes associ es aux différentes composantes du modèle.

Le modèle d'évolution temporel \mathbb{M} se décompose en deux parties. L'évolution de la vorticité est donn e par la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \xi = \nu_\xi \Delta \xi, \quad (5.8)$$

et la divergence est suppos e être solution d'une équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu_\zeta \Delta \zeta. \quad (5.9)$$

Les observations discrètes \mathbf{y}_n sont quant à elles réunies dans une fonction d'observation continue Y . L'opérateur \mathbb{H} permet de passer de l'espace d'état à celui des observations.

La résolution du problème repose sur la construction de la loi d'évolution adjointe du modèle dynamique, permettant le calcul numérique du gradient de la fonction de coût. La condition initiale \mathbf{X}_0 est propag e à l'aide de la loi dynamique \mathbb{M} par une intégration "avant". La solution est corrig e par une intégration rétrograde selon le modèle adjoint, prenant en compte les écarts entre la prédiction et les observations.   la fin de cette étape la condition initiale est mise à jour par le gradient obtenu. Ces deux étapes sont r p t es itérativement jusqu'à convergence.

La solution obtenue correspond à un lissage des observations suivant le modèle dynamique. Ainsi, à partir d'observations bruit es ou grossières des champs de déplacements sur la séquence, la méthode permet de reconstruire l'ensemble des champs de manière précise, tout en respectant le modèle physique donné. La cohérence temporelle de la solution est ainsi fortement am lior e.

Un suivi simultané de champs de vecteurs et de contours est également possible avec cette approche. La loi d'évolution de la courbe, bas e sur les ensembles de niveaux, est ajout e au modèle dynamique (5.7). Rappelons que dans le contexte des ensembles de niveaux, l'évolution de la courbe est mod lis e par l'évolution de la surface implicite associ e. En supposant que la courbe se déplace à chaque instant selon le champ de vitesses \mathbf{w} , et diffuse selon un mouvement par courbure moyenne, l'évolution s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \mathbf{w} - \epsilon \kappa \|\nabla \phi\| = \nu, \quad (5.10)$$

où κ représente la courbure et ν le bruit gaussien.

Les observations sont composées des champs de vecteurs bruités et de courbes fermées données par une méthode de segmentation basique. La technique d'assimilation permet de reconstruire à la fois les champs de déplacements sur toute la séquence, mais aussi les contours des structures fluides d'intérêt. Le suivi est appliqué à des séquences météorologiques, permettant d'une part le suivi d'un cyclone, d'autre part le suivi de nuages à différentes altitudes. Pour cette dernière application, les occultations partielles dues à la superposition de nuages sont particulièrement problématiques. La présence du modèle dynamique sous-jacent associé au formalisme spatio-temporel permet de gérer ces occultations.

5.2.3 Filtrage séquentiel

L'estimation séquentielle de champs denses de vitesses a récemment été formulée dans un cadre de filtrage pour une application en océanographie [81]. Les images proviennent de satellites et représentent des températures de surface de la mer Noire. Un modèle d'évolution des vitesses de circulation est fixé à partir d'un modèle bidimensionnel "shallow-water". L'estimation des champs de vitesses est réalisée à chaque pas de temps à l'aide d'un estimateur dense [84]. Ces estimations sont utilisées pour corriger le modèle à l'aide d'une approximation du filtre de Kalman appelée *nudging*, consistant à remplacer la matrice de gain du filtre par une constante fixée a priori (le principe du filtre de Kalman sera présenté dans le chapitre suivant).

Notons que dans ce contexte, le modèle d'évolution est précis car il a été calibré sur la séquence d'images étudiée. Le fait de coupler la prédiction aux observations fournies par l'estimation des champs semble améliorer la qualité des résultats. Comme pour le suivi variationnel décrit précédemment, l'intégration du modèle physique vise à améliorer la cohérence temporelle des estimations.

Notons que la méthode repose sur l'hypothèse d'équivalence entre la vitesse observée sur l'image et la vitesse donnée par le modèle d'évolution shallow-water. C'est cette hypothèse qui rend l'utilisation d'un filtre de type Kalman possible. L'approximation par la méthode de nudging permet ensuite d'éviter le coût de calcul du filtre de Kalman pour un espace d'état de grande dimension. L'utilisation de filtres de Kalman de rang réduit adaptés à de tels systèmes serait envisageable [133].

5.3 Synthèse

Les méthodes dédiées à l'analyse temporelle des écoulements fluides à partir de séquences d'images diffèrent selon l'application visée.

Si l'objectif est de suivre un phénomène particulier, il est possible de s'intéresser au suivi de structures caractéristiques de ce phénomène. En météorologie par exemple, le suivi de dépressions ou de mouvements convectifs peut être réalisé à travers le suivi des points singuliers de l'écoulement (centres des vortex et puits/sources). En mécanique des fluides, l'intérêt peut se porter sur la trajectoire temporelle du centre d'un vortex. Les méthodes de suivi de contours permettent une analyse plus précise en extrayant les frontières de la structure d'intérêt le long de la séquence. Cette information supplémentaire sur l'évolution du phénomène peut alors permettre de caractériser sa nature ou son activité.

Il est à noter qu'aucune de ces méthodes de suivi n'intègre une information *a priori* sur l'évolution du fluide dans le processus d'estimation. Le suivi consiste en fait en une succession d'estimations sur des paires d'images. Le seul *a priori* couramment utilisé est l'initialisation du problème d'estimation à un instant donné à partir du résultat obtenu à l'instant précédent.

Lorsque l'objectif est de suivre l'écoulement dans sa globalité, une information dense sur le champ de déplacements est recherchée sur toute la séquence. Dans ce contexte, des travaux récents se sont concentrés sur l'introduction de modèles d'évolution du fluide. Les méthodes d'estimation présentées dans la première partie de ce document peuvent théoriquement être appliquées afin de traiter successivement toutes les paires de la séquence. Néanmoins, une telle approche ne permet pas de garantir une cohérence temporelle entre les estimations successives. Si la séquence est bruitée ou présente des occultations importantes (cas des images météorologiques ou océanographiques), un processus d'estimation ne se basant que sur des paires d'images consécutives peut rapidement être mis en échec.

Des contributions récentes visent donc à améliorer la cohérence temporelle et la robustesse des estimations sur la séquence d'images. Ainsi, les méthodes d'estimation dense basées sur une régularisation spatiale du champ de vecteurs ont été étendues de manière à intégrer une contrainte temporelle sur l'évolution du fluide. Cette contrainte est basée sur la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes. La cohérence temporelle est améliorée mais les observations passées ne sont pas prises en compte dans le processus d'estimation.

Un modèle d'évolution issu de l'équation de Navier-Stokes est également à la base de travaux récents basés sur des techniques de suivi variationnel. Dans ce cas, le suivi temporel est basé sur des concepts de contrôle optimal. Des estimations bruitées des champs de vecteurs successifs sont lissées et corrigées selon le modèle d'évolution. Ces méthodes permettent de reconstruire les champs de déplacements tout au long de la séquence, en garantissant la cohérence temporelle de la solution. Cette approche de suivi variationnel permet en outre de réaliser un suivi simultané de champs de vitesses et de courbes fermées. Elle ajoute donc une cohérence temporelle et une robustesse aux méthodes de suivi de contours basées sur des extractions successives. Un des avantages de la méthode de suivi variationnel est que le vecteur d'état du système peut être de dimension très grande. Néanmoins, une restriction est que cette méthode repose sur une hypothèse gaussienne, dans le même esprit qu'un lissage de Kalman.

Parallèlement à ce problème de lissage, un suivi temporel basé sur un modèle d'évolution du fluide peut être formulé comme un problème de prédiction et de filtrage. Nous présentons le problème du filtrage dans le chapitre suivant. Notre méthode de suivi de champs de vitesses, exposée dans le chapitre 7, repose sur ces concepts.

Chapitre 6

Problème de filtrage stochastique

Ce chapitre expose le problème du filtrage stochastique et donne des exemples d'applications, notamment dans le domaine de l'analyse d'images. Tout problème de filtrage est construit à partir d'un modèle appelé modèle de filtrage ou modèle à espace d'état, dont les différentes représentations possibles (en temps discret ou continu) sont décrites dans la première partie. Le principe du filtrage optimal est ensuite présenté, ainsi que les diverses méthodes de résolution du problème. Les principes de base des méthodes de résolution pour les modèles à espace d'état linéaires sont rappelés. Les méthodes adaptées au cas non linéaire sont enfin présentées, en détaillant particulièrement les méthodes de filtrage particulière.

La présentation ne détaille pas les fondements théoriques des différents problèmes. Nous renvoyons le lecteur vers [5] pour la description du filtre de Kalman et ses extensions. La dérivation du filtre de Kalman en temps continu est décrite dans [127]. Concernant les méthodes de filtrage particulière, nous renvoyons vers les articles [55] et l'ouvrage de référence [69]. Les cours en ligne [32] et [102] offrent une très bonne introduction sur le filtrage de Kalman et le filtrage particulière, et on trouvera dans [8] un état de l'art complet sur les méthodes de filtrage en temps discret et leurs applications dans le domaine de l'image. Les travaux théoriques sur la convergence des méthodes particulières sont présentés dans [50] et [52]. L'extension au cas continu et les résultats théoriques correspondants peuvent être lus dans [49, 53] et les autres références citées dans [51].

6.1 Modèles à espace d'état

Un modèle à espace d'état est décrit par un couple de processus aléatoires : un processus d'état et un processus d'observation. Ces processus peuvent être décrits en temps continu ou discret, conduisant à différents types de modèles.

6.1.1 Cas discret

Dans le cas discret, le processus d'état $(\mathbf{X}_k)_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale $p(\mathbf{X}_0)$ et de loi de transition $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$. Cette loi de transition décrit le modèle d'évolution de l'état. Les observations $(\mathbf{Z}_k)_{k \geq 1}$ sont supposées indépendantes conditionnellement à l'état et leur distribution ne dépend que de l'état au même instant. Le processus d'observation est donc décrit par la vraisemblance $p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k)$.

Le modèle à espace d'état dans le cas discret est donc décrit par une chaîne de Markov cachée, dont les dépendances sont représentées sur la figure 6.1. Le modèle est complètement décrit par la loi de transition de l'état et la vraisemblance, grâce aux propriétés markovienne et d'indépendance conditionnelle des observations :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) \quad (6.1)$$

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{0:k}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) = p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k), \quad (6.2)$$

où $\mathbf{X}_{0:k} \hat{=} \{\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_k\}$ représente l'état jusqu'au temps k et $\mathbf{Z}_{1:k} \hat{=} \{\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_k\}$ l'ensemble des observations jusqu'au temps k (on suppose qu'on ne dispose pas d'observation à l'instant $k = 0$).

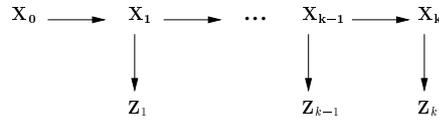


FIG. 6.1: Graphe de dépendances du modèle à espace d'état discret.

Les équations d'état et d'observation associées sont données dans le cas général par :

$$\mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-1}) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{Z}_k = g_k(\mathbf{X}_k, \mathbf{V}_k), \quad (6.4)$$

où $(\mathbf{W}_k)_{k \geq 0}$ et $(\mathbf{V}_k)_{k \geq 1}$ sont des bruits blancs indépendants entre eux.

6.1.2 Cas continu-discret

Un modèle à espace d'état continu-discret est un modèle où le processus d'état $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ évolue selon une équation différentielle stochastique, et les observations sont obtenues à des instants discrets t_k :

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}_t)dt + \sigma(t)d\mathbf{B}_t \quad (6.5)$$

$$\mathbf{Z}_k = g(\mathbf{X}_{t_k}, \mathbf{V}_k), \quad (6.6)$$

où \mathbf{B}_t est un mouvement brownien.

Le processus solution de cette équation différentielle stochastique est appelé processus de Itô. Ceci provient du fait que l'équation peut être interprétée par une équation intégrale :

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_0 + \int_0^t f(s, \mathbf{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s)d\mathbf{B}_s, \quad (6.7)$$

où la première intégrale est définie au sens de Riemann et où on suppose que l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s)d\mathbf{B}_s$ est définie au sens de Itô. Nous renvoyons le lecteur à [127] pour une présentation des équations différentielles stochastiques et ses applications, et à [92] pour une présentation complète mais moins accessible de la théorie du calcul stochastique.

La propriété markovienne du processus de Itô fait que l'on retrouve la propriété d'évolution markovienne de l'état, comme dans le cas discret. Le graphe de dépendances correspondant à ce modèle peut être vu comme un cas limite du graphe de dépendance du modèle discret présenté sur la figure 6.1, avec un nombre infini d'états entre deux instants de mesure. Notons que dans ce modèle continu-discret, l'intervalle de temps entre deux instants de mesure peut évoluer au cours du temps. Cet aspect est un des avantages par rapport à une formulation purement discrète.

6.1.3 Cas continu

Un modèle à espace d'état entièrement défini en temps continu correspond au cas limite où les intervalles de temps entre les états successifs et les observations correspondantes tendent vers zéro. Le modèle peut alors être décrit par deux équations différentielles stochastiques décrivant les processus d'état et de mesure :

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}_t)dt + \sigma(t)d\mathbf{B}_t^{\mathbf{X}}, \quad (6.8)$$

$$d\mathbf{Z}_t = g(t, \mathbf{X}_t)dt + \eta(t)d\mathbf{B}_t^{\mathbf{Z}}, \quad (6.9)$$

où $\mathbf{B}_t^{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{B}_t^{\mathbf{Z}}$ sont deux mouvements browniens indépendants.

6.2 Exemples d'applications

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés sous la forme d'un modèle à espace d'état, dans le but de résoudre un problème de filtrage. On rencontre des applications en traitement du signal, en vision par ordinateur, en physique, en biologie, en sciences environnementales, en finance, et d'autres domaines.

En traitement du signal, les applications concernées peuvent être la restauration d'un signal audio [68], la séparation de sources [7], le traitement de la parole [154], le suivi de cibles [14, 29] ou multicibles [13]. En vision par ordinateur, les applications sont majoritairement liées au suivi d'entités dans des images [10, 85, 135].

Certains modèles biologiques peuvent être décrits par un modèle à espace d'état, comme par exemple la propagation des maladies infectieuses [6, 77], certains processus dynamiques tels que l'accroissement d'une population, les modèles prédateur-proie [121] ou le mouvement de cellules [83]. Des applications en science environnementale existent en océanographie [21, 81], en météorologie [79, 80].

Un exemple d'application en finance concerne les modèles de volatilité stochastiques [34]. Dans un contexte plus général, des représentations sous forme de modèles à espace d'état peuvent être utilisées pour l'analyse de séries temporelles [56, 72].

Selon l'application, les modèles peuvent être formulés de manière discrète, continue-discrète, ou entièrement continue. Ainsi, les modèles utilisés en analyse d'images sont usuellement décrits sous forme discrète. Une présentation plus détaillée des types de modélisations employés dans ce domaine sera effectuée dans la section suivante.

Lorsque les modèles sont construits selon des processus physiques, chimiques ou économiques et sont associés à des observations discrètes fournies par des capteurs, il est par contre naturel de faire appel à une modélisation continue-discrète. Cette situation

se rencontre en océanographie, en météorologie, ou encore en finance. Notons également l'existence de modèles continus-discrets en suivi de cibles et surtout en suivi multi-cibles, permettant de gérer plus facilement l'apparition asynchrone des mesures.

Une modélisation complètement continue est plus rarement utilisée en pratique. Un exemple est l'analyse de signaux analogiques décrits en temps continu, et où le processus d'observation est une version bruitée du signal, décrite en temps continu également. Certaines modélisations en analyse financière supposent également que les observations arrivent de manière continue.

6.3 Modélisations existantes en analyse d'images

Dans le domaine de l'analyse d'images, les modèles à espace d'état associés à une problématique de filtrage sont généralement utilisés pour résoudre des problèmes de suivi. Les applications sont nombreuses et diffèrent selon le type de l'entité suivie. L'intérêt peut être porté sur le suivi de points d'intérêt pour la reconstruction 3D, la robotique, la réalité augmentée ou l'imagerie médicale. Le suivi peut également concerner des objets pour la compression vidéo et l'imagerie multimédia en général, ou des personnes pour la construction de systèmes d'aide ou de surveillance.

D'autres applications peuvent être rencontrées, telles que le problème de séparation de sources en astrophysique [46] ou encore le débruitage d'images [12]. Néanmoins ces applications restent marginales et nous nous concentrons ici sur les problèmes de suivi.

Pour les applications de suivi, la construction du modèle à espace d'état dépend de la nature de l'objet à suivre et de l'information dont on dispose sur cet objet.

Lorsque le mouvement de l'objet peut être décrit par un nombre de classes limité, il est possible de construire un modèle d'évolution *a priori* de l'état par apprentissage [26, 126]. Ces modélisations concernent par exemple le mouvement du corps humain ou d'une main [86, 138]. Si le nombre de classes caractérisant l'objet est trop élevé, la connaissance de l'évolution de l'état peut reposer sur une base de données détaillée d'exemples [148].

La situation la plus fréquente est cependant celle où aucune information particulière n'est disponible sur le mouvement de l'objet à suivre. Les modèles d'état les plus couramment utilisés sont alors des modèles peu informatifs, du type modèle autorégressif au premier ou au second ordre [25, 135]. La faiblesse de ces modèles est généralement compensée par des modèles d'observation très informatifs. La nature des observations extraites de l'image est liée à la représentation de l'objet à suivre. Les observations peuvent être constituées d'informations sur les contours [85], sur des distributions de couleur [135]. Des informations de mouvement peuvent également être prises en compte [132, 155].

Lorsque le modèle de mouvement de l'objet n'est pas connu, une alternative consiste à utiliser une information de mouvement pour définir la loi d'évolution de l'état. Dans ce cas, le mouvement est estimé à partir des images. Le modèle d'évolution est donc très informatif, et peut être associé à un modèle d'observation plus simple. Ce type de modèle à espace d'état a conduit à une nouvelle classe de méthodes de suivi de points ou d'objets plans [9, 10].

6.4 Filtrage optimal

6.4.1 Cas discret

Dans le cas discret on considère un système à espace d'état $((\mathbf{X}_k)_{k \geq 0}, (\mathbf{Z}_k)_{k \geq 1})$ défini par (6.2), de loi de transition $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$ et de vraisemblance $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_k)$.

Le problème du filtrage consiste à estimer la distribution conditionnelle $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k})$, appelée distribution de filtrage. Le filtre bayésien optimal permet de calculer cette distribution de manière récursive en deux étapes : une étape de prédiction et une étape de correction.

- L'étape de prédiction permet de déterminer la distribution de filtrage prédite à l'étape k , connaissant la distribution de filtrage à l'étape $k-1$:

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{k-1} \quad (6.10)$$

$$= \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{k-1} \quad (6.11)$$

- L'étape de correction fait intervenir la nouvelle observation et permet le calcul de la distribution de filtrage à l'étape k à partir de la distribution de filtrage prédite :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_{1:k-1}) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1})} \quad (6.12)$$

$$= \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_k} \quad (6.13)$$

6.4.2 Cas continu-discret

Le modèle à espace d'état est défini dans le cas continu-discret par (6.6). L'objectif est d'estimer la distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k})$, où t_k correspond aux instants d'observations. Nous présentons le cas continu-discret comme une extension du cas discret. En théorie, la solution du filtrage optimal peut alors être obtenue en deux étapes comme dans le cas discret :

- L'étape de prédiction détermine la distribution de filtrage prédite $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1})$ à partir de la distribution de filtrage à l'instant de mesure précédent t_{k-1} :

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}) p(\mathbf{X}_{t_{k-1}} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{t_{k-1}} \quad (6.14)$$

Il est à noter que l'expression de la loi de transition $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}})$ entre deux instants d'observation t_{k-1} et t_k n'est connue que dans le cas particulier de modèles simples (linéaires et gaussiens par exemple, voir section 6.5.1).

- L'étape de correction fait intervenir la nouvelle observation et permet le calcul de la distribution de filtrage à l'étape t_k à partir de la distribution de filtrage prédite, comme dans le cas discret :

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k})p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k})p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1})d\mathbf{X}_{t_k}} \quad (6.15)$$

Dans le cas continu-discret, la distribution de filtrage n'est donc calculée qu'aux instants d'observations. Elle existe sous une forme prédite entre deux instants d'observation t_{k-1} et t_k et peut être définie par $p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:k-1})$ pour $t_{k-1} < t < t_k$.

6.4.3 Cas continu

Dans le cas continu, on cherche à estimer la distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_t | \{\mathbf{Z}_s, s \leq t\})$. La loi de filtrage est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique appelée équation de Kushner-Stratonovitch, ou équation de Zakai dans sa version non normalisée [160].

6.5 Résolution du filtre optimal

6.5.1 Filtre de Kalman

Cas discret

Le filtre de Kalman à temps discret [90] fournit la solution du problème de filtrage optimal lorsque les modèles d'état et de mesure sont linéaires et gaussiens :

$$\mathbf{X}_k = A_{k-1}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{Z}_k = H_k\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k, \quad (6.17)$$

où $\mathbf{X}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_0, \Sigma_0)$, $\mathbf{W}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1})$, $\mathbf{V}_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$.

Le système peut donc se réécrire :

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) = \mathcal{N}(A_{k-1}\mathbf{X}_{k-1}, Q_{k-1}), \quad (6.18)$$

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}(H_k\mathbf{X}_k, R_k). \quad (6.19)$$

La distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k})$ est déterminée en deux étapes, comme décrit dans la section 6.4. L'étape de prédiction vise à déterminer $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1})$ à partir de $p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathbf{Z}_{1:k-1})$, puis la prédiction est corrigée par la nouvelle observation \mathbf{Z}_k .

Le modèle à espace d'état étant linéaire et gaussien, les distributions d'intérêt sont gaussiennes : $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_k^-, \Sigma_k^-)$ et $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_k, \Sigma_k)$. Le filtre de Kalman consiste donc à calculer récursivement les espérances et covariances caractérisant ces distributions.

- Étape de prédiction

$$\hat{\mathbf{X}}_k^- = A_{k-1}\hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (6.20)$$

$$\Sigma_k^- = A_{k-1}\Sigma_{k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (6.21)$$

- Étape de correction

$$K_k = \Sigma_k^- H_k^T (H_k \Sigma_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (6.22)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k^- + K_k \left[(\mathbf{Z}_k - H_k \hat{\mathbf{X}}_k^-) \right] \quad (6.23)$$

$$\Sigma_k = (Id - K_k H_k) \Sigma_k^-, \quad (6.24)$$

où la matrice K_k est appelée matrice de gain de Kalman.

Cas continu-discret

Le filtre de Kalman à temps continu-discret [87] fournit la solution du problème de filtrage optimal lorsque le modèle d'évolution est une équation différentielle stochastique linéaire, associée à un processus d'observations discret :

$$d\mathbf{X}_t = A_t \mathbf{X}_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{Z}_k = H_k \mathbf{X}_{t_k} + \mathbf{V}_k. \quad (6.26)$$

Comme dans le cas discret, la distribution de filtrage recherchée est une loi gaussienne :

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_{t_k}, \Sigma_{t_k}), \quad (6.27)$$

dont la moyenne $\hat{\mathbf{X}}_{t_k}$ et la covariance Σ_{t_k} sont calculées récursivement grâce aux étapes de prédiction et de correction du filtre.

- Étape de prédiction

Cette étape consiste à intégrer les équations différentielles :

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_t}{dt} = A_t \hat{\mathbf{X}}_t, \quad (6.28)$$

$$\frac{d\Sigma_t}{dt} = A_t \Sigma_t + \Sigma_t A_t^T + \sigma_t \sigma_t^T, \quad (6.29)$$

à partir des conditions initiales $(\hat{\mathbf{X}}_{t_{k-1}}, \Sigma_{t_{k-1}})$ et jusqu'à l'instant t_k , conduisant à la moyenne $\hat{\mathbf{X}}_{t_k}^-$ et à la covariance $\Sigma_{t_k}^-$ de la distribution de filtrage prédite.

- Étape de correction

Cette étape est identique au cas discret :

$$K_k = \Sigma_{t_k}^- H_k^T (H_k \Sigma_{t_k}^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (6.30)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{t_k} = \hat{\mathbf{X}}_{t_k}^- + K_k [(\mathbf{Z}_k - H_k \hat{\mathbf{X}}_{t_k}^-)] \quad (6.31)$$

$$\Sigma_{t_k} = (Id - K_k H_k) \Sigma_{t_k}^- \quad (6.32)$$

Cas continu

Lorsque les équations d'état et de mesure sont deux équations différentielles stochastiques linéaires :

$$d\mathbf{X}_t = A_t \mathbf{X}_t dt + \sigma_t d\mathbf{B}_t^{\mathbf{X}}, \quad (6.33)$$

$$d\mathbf{Z}_t = H_t \mathbf{X}_t dt + \nu_t d\mathbf{B}_t^{\mathbf{Z}}, \quad (6.34)$$

le problème de filtrage est résolu par le filtre de Kalman-Bucy [91]. La moyenne de la distribution de filtrage recherchée est solution d'une équation différentielle stochastique, tandis que la covariance est solution d'une équation différentielle de type Ricatti :

$$d\hat{\mathbf{X}}_t = (A_t - K_t H_t) \hat{\mathbf{X}}_t dt + K_t d\mathbf{Z}_t, \quad (6.35)$$

$$\frac{d\Sigma_t}{dt} = A_t \Sigma_t + \Sigma_t A_t^T - \Sigma_t H_t^T (\nu_t \nu_t^T)^{-1} H_t \Sigma_t, \quad (6.36)$$

où $K_t = \Sigma_t H_t (\nu_t \nu_t^T)^{-1}$.

6.5.2 Extensions

Dans le cas général où le modèle à espace d'état ne peut pas être décrit par un système linéaire et gaussien, la solution du problème de filtrage optimal n'est plus nécessairement gaussienne et les équations du filtre de Kalman ne sont plus valides. Il est alors nécessaire de construire des filtres approchés.

Considérons un modèle à espace d'état de la forme :

$$\mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{Z}_k = g_k(\mathbf{X}_k) + \mathbf{V}_k, \quad (6.38)$$

où \mathbf{W}_{k-1} et \mathbf{V}_k sont des bruits additifs, indépendants entre eux, de moyennes nulles et de matrices de covariance Q_{k-1} et R_k .

Filtre de Kalman étendu

L'idée du filtre de Kalman étendu [87] est de linéariser le système (6.38) afin de pouvoir appliquer la technique du filtre de Kalman. Pour la phase de prédiction, l'équation d'état est linéarisée autour de l'estimation précédente de l'état $\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$. Pour la phase de correction, l'équation de mesure est linéarisée autour de la prédiction $\hat{\mathbf{X}}_k^-$.

Citons également le filtre par mélange de lois gaussiennes [2] qui approche la loi de filtrage par un mélange de densités gaussiennes et applique un banc de filtres de Kalman étendus au système.

Le filtre de Kalman étendu peut également être formulé pour un modèle à espace d'état continu-discret. La technique est alors basée sur une approximation linéaire de l'équation différentielle stochastique décrivant l'évolution de l'état. Il est ainsi possible de construire une approximation des équations de propagation de la moyenne et de la covariance, par un développement de Taylor de la fonction f . Les étapes de prédiction et de correction du filtre de Kalman continu-discret (décrit section 6.5.1) peuvent ensuite être appliquées.

Filtre de Kalman unscented

Le filtre de Kalman unscented [88, 89] est une alternative intéressante au filtre de Kalman étendu puisqu'il ne repose pas sur une linéarisation des équations décrivant le système. La distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_{1:k})$ est approchée par une loi gaussienne, dont les moments sont calculés à l'aide d'une formule de quadrature sur des points choisis de manière déterministe. Ces points sont propagés directement à travers les non linéarités du modèle, conduisant à une approximation plus précise des moments.

Des auteurs se sont récemment penchés sur la formulation de ce filtre dans le cas continu-discret [143, 149]. La solution de l'équation différentielle stochastique décrivant l'évolution de l'état peut être approchée par un processus gaussien en utilisant une forme à temps continu de l'approximation unscented.

Filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble [59, 60] est une autre approximation du filtre de Kalman pour un modèle non linéaire, permettant de traiter des distributions multimodales. Cette méthode repose sur une approximation de type Monte-Carlo (décrite dans la section 6.5.3) permettant de décrire la distribution de probabilité initiale à partir d'un nombre fini d'éléments, qui sont ensuite propagés à travers le modèle d'évolution non linéaire. L'étape de correction du filtre de Kalman est ensuite appliquée à chaque élément. Le calcul de la matrice de gain est approché à l'aide de la covariance empirique calculée sur l'ensemble des éléments.

L'approximation de type Monte-Carlo permet de traiter les moments d'ordre élevé de la distribution lors de la phase de prédiction. Cependant, l'étape de correction du filtre de Kalman d'ensemble est basée sur une hypothèse linéaire gaussienne. Cela signifie que même si la distribution de filtrage prédite contient de l'information sur les moments élevés, la distribution de filtrage finale n'est qu'une transformation linéaire de la prédiction. Le filtre de Kalman d'ensemble ne résout donc qu'une partie du problème de filtrage non linéaire. Lorsque l'équation de mesure est non linéaire, la mise en place d'une étape de correction non linéaire est possible mais plus difficile à utiliser en pratique [60].

6.5.3 Filtrage particulière

Le filtrage particulière est une méthode de Monte Carlo séquentielle, permettant d'approcher la solution d'un problème de filtrage non linéaire à temps discret. La méthode consiste en un échantillonnage pondéré séquentiel avec rééchantillonnage.

Principe de Monte-Carlo

Soit $p(\mathbf{x})$ une distribution de probabilité que l'on cherche à approcher afin de calculer l'intégrale :

$$I(\phi(\mathbf{x})) = \int \phi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (6.39)$$

pour une fonction ϕ donnée.

La densité $p(\mathbf{x})$ peut être approchée par une loi discrète $p_N(\mathbf{x})$ à l'aide d'un échantillon de N variables aléatoires i.i.d de loi de densité $p(\mathbf{x})$:

$$p_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}). \quad (6.40)$$

Les intégrales $I(\phi(\mathbf{x}))$ peuvent alors être approchées par des sommes :

$$I(\phi(\mathbf{x})) \simeq I_N(\phi(\mathbf{x})) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\mathbf{x}^{(i)}), \quad (6.41)$$

telles que $I_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} I$ d'après la loi des grands nombres. La vitesse de convergence est donnée par le théorème central limite :

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} (I_N - I) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1), \quad (6.42)$$

où $\sigma^2 = \text{var}(\phi(\mathbf{x}))$. La vitesse de convergence de l'estimateur ne dépend donc que de N , et pas de la taille de l'espace.

Échantillonnage pondéré

Si on sait échantillonner selon $p(\mathbf{x})$ on peut utiliser directement l'approximation 6.40 pour approcher la densité. Sinon, il est possible de faire appel à une méthode dite d'échantillonnage pondéré ("importance sampling"). Supposons que l'on dispose d'une autre loi $\pi(\mathbf{x})$ appelée fonction d'importance dont le support inclut le support de $p(\mathbf{x})$ (i.e. $p(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \pi(\mathbf{x}) > 0$). Alors :

$$I(\phi(\mathbf{x})) = \int \phi(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi(\mathbf{x}) \frac{p(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{x})} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.43)$$

À partir d'un N -échantillon $\{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=1:N}$ de la loi $\pi(\mathbf{x})$ on peut donc écrire :

$$I(\phi(\mathbf{x})) \simeq \sum_{i=1}^N w^{(i)} \phi(\mathbf{x}^{(i)}), \quad (6.44)$$

où $w^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}^{(i)})}$.

Si on sait échantillonner selon la loi d'importance $\pi(\mathbf{x})$ et évaluer les poids d'importance $w^{(i)}$ associés, la densité objectif $p(\mathbf{x})$ peut donc être approchée par :

$$p_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}). \quad (6.45)$$

Le principe d'échantillonnage pondéré peut être appliqué au cadre du filtrage bayésien où la loi objectif est la loi $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Z}_{1:k})$. Ceci conduit aux méthodes d'échantillonnage pondéré séquentiel.

Échantillonnage pondéré séquentiel

On considère le problème de filtrage non linéaire en temps discret, associé au modèle à espace d'état (6.2). L'approche Monte-Carlo du problème de filtrage consiste à approcher à l'aide d'échantillons la loi de filtrage $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_{1:k})$ ainsi que toute espérance de la forme $\mathbb{E}[\phi(\mathbf{X}_k)|\mathbf{Z}_{1:k}]$ relative à cette loi.

Un problème plus général consiste à approcher la distribution $p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k})$ des trajectoires. La résolution séquentielle de ce problème vise à résoudre le problème de filtrage en ne considérant que les extrémités des trajectoires.

La méthode d'échantillonnage pondéré décrite précédemment peut être appliquée, en utilisant une fonction d'importance $\pi(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k})$. Afin de permettre un échantillonnage pondéré séquentiel au fur et à mesure de l'arrivée des données, cette fonction d'importance peut être choisie de sorte que :

$$\pi(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k}) = \prod_{j=1}^k \pi(\mathbf{X}_j|\mathbf{X}_{0:j-1}, \mathbf{Z}_{1:j}). \quad (6.46)$$

En utilisant le théorème de Bayes et les propriétés d'indépendance définies dans la section 6.1.1, la loi $p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k})$ est exprimée en fonction de $p(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k)$, $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1})$ et $p(\mathbf{X}_{0:k-1}|\mathbf{Z}_{1:k-1})$:

$$p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k}) \propto p(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k)p(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1})p(\mathbf{X}_{0:k-1}|\mathbf{Z}_{1:k-1}). \quad (6.47)$$

Il est alors possible de construire une formule récursive de calcul des poids d'importance :

$$w_k^{(i)} = \frac{p(\mathbf{X}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{Z}_{1:k})}{\pi(\mathbf{X}_{0:k}^{(i)}|\mathbf{Z}_{1:k})}, \quad (6.48)$$

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k^{(i)})p(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})}. \quad (6.49)$$

La résolution du problème de filtrage peut finalement s'effectuer de manière récursive, avec les deux étapes de prédiction et de correction suivantes :

- Étape de prédiction

$$\mathbf{X}_k^{(i)} \sim \pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k}), \quad i = 1 : N \quad (6.50)$$

- Étape de correction

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_k^{(i)})p(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{k-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{X}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})}, \quad i = 1 : N \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} = 1. \quad (6.51)$$

L'estimation de la loi $p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k})$ s'exprime donc de manière séquentielle. Chaque trajectoire $\mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}$ est prolongée d'un nouvel état $\mathbf{X}_k^{(i)}$ tiré selon la fonction d'importance. Le poids de chaque trajectoire est ensuite corrigé à partir de l'information apportée par la

nouvelle observation. L'approximation de Monte-Carlo permet alors d'approcher la distribution jointe $p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k})$:

$$p(\mathbf{X}_{0:k}|\mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{0:k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{0:k}), \quad (6.52)$$

ou la distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_{1:k})$:

$$p(\mathbf{X}_k|\mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_k^{(i)}}(\mathbf{X}_k), \quad (6.53)$$

et toute quantité de la forme :

$$\mathbb{E}[\phi(\mathbf{X}_k)|\mathbf{Z}_{1:k}] \simeq \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \phi(\mathbf{X}_k^{(i)}) \quad (6.54)$$

Dégénérescence et rééchantillonnage

Il est connu que l'utilisation de l'échantillonnage pondéré séquentiel dans sa version brute conduit rapidement à une mauvaise estimation de la distribution de filtrage. En pratique, on observe une augmentation de la variance des poids dans le temps et tous les poids sauf un vont rapidement tendre vers zéro [97]. Idéalement, toutes les trajectoires devraient avoir une importance égale dans l'approximation.

Le recours aux méthodes de rééchantillonnage permet d'éviter ce problème. L'idée est de modifier l'ensemble courant d'échantillons à l'aide d'une étape de sélection. La sélection va consister à éliminer les échantillons les plus faiblement pondérés et dupliquer les échantillons de poids forts. Il est possible de décider si le rééchantillonnage est nécessaire ou pas en s'appuyant sur un critère tel que le nombre efficace de particules :

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N N(w_k^{(i)})^2}. \quad (6.55)$$

Si ce nombre est proche de N les particules sont d'importances égales. La dégénérescence des poids est détectée lorsque N_{eff} devient faible.

La technique de rééchantillonnage classique consiste à effectuer un tirage avec remise parmi $\{\mathbf{X}_k^{(i)}\}_{i=1:N}$, proportionnellement aux poids $\{w_k^{(i)}\}_{i=1:N}$. Cette approche, connue sous le nom de rééchantillonnage multinomial, assure que le nombre de descendants N_i de chaque particule est proportionnel à son poids (i.e. $\mathbb{E}(N_i) = Nw_k^{(i)}$). D'autres méthodes ont été proposées, assurant également cette contrainte mais conduisant à une variance plus faible. Ainsi, le rééchantillonnage résiduel [106] ou stratifié [94] permettent de réduire la variance. Une comparaison théorique de ces méthodes est proposée par [54].

Distribution d'importance

L'association de l'échantillonnage pondéré séquentiel à une technique de rééchantillonnage constitue la méthode du filtrage particulaire dans sa forme générique. Une distribution d'importance $\pi(\mathbf{X}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Z}_{1:k})$ doit ensuite être choisie pour mettre en place l'algorithme.

La première solution est de choisir comme distribution d'importance la loi de transition de l'état :

$$\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k}) = p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}). \quad (6.56)$$

Ce choix conduit au filtre particulaire bootstrap [70]. La formule de mise à jour des poids (6.51) s'écrit dans ce cas :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_k^{(i)}). \quad (6.57)$$

Afin de limiter le problème de dégénérescence dû à l'augmentation de la variance des poids, une autre solution est de choisir une distribution d'importance minimisant cette variance [55]. La distribution remplissant cette condition est la suivante :

$$\pi(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{0:k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k}) = p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_k), \quad (6.58)$$

conduisant à la formule de mise à jour :

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}). \quad (6.59)$$

Cette distribution est usuellement qualifiée d'*optimale* dans le sens où le contrôle de la variance des poids évite la divergence de l'algorithme. D'autres critères d'optimalité pourraient néanmoins être proposés. L'utilisation de cette fonction d'importance donne de bons résultats en pratique car l'étape de prédiction prend en compte l'information apportée par la nouvelle observation \mathbf{Z}_k . Cependant, son utilisation n'est possible que pour une classe spécifique de modèles à espace d'état. Il est en effet nécessaire de savoir échantillonner selon $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Z}_k)$ et d'être capable d'évaluer $p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{k-1}^{(i)})$ pour corriger les poids. Il est montré dans [55] que ces conditions sont réunies pour des modèles de la forme suivante :

$$\mathbf{X}_k = f_{k-1}(\mathbf{X}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1}, \quad (6.60)$$

$$\mathbf{Z}_k = A_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k, \quad (6.61)$$

où la fonction f peut être non linéaire. L'extension au cas où la vraisemblance est modélisée par un mélange de lois gaussiennes permet également de remplir ces conditions [9].

Pour une classe générale de modèles à espace d'états, plusieurs méthodes ont été proposées permettant d'intégrer l'information apportée par la nouvelle observation dans la phase de prédiction du filtre. Certaines méthodes sont basées sur une approximation gaussienne de la distribution d'importance optimale. Les filtres correspondants sont appelés filtre particulaire extended [55] ou filtre particulaire unscented [119]. D'autres méthodes prennent en compte la nouvelle observation dans l'étape de prédiction du filtre en introduisant une variable auxiliaire [134].

Cas continu-discret

Nous nous replaçons dans le cas d'un modèle à espace d'état continu-discret de la forme :

$$d\mathbf{X}_t = f(t, \mathbf{X}_t)dt + \sigma(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{B}_t \quad (6.62)$$

$$\mathbf{Z}_k = g(\mathbf{X}_{t_k}, \mathbf{V}_k). \quad (6.63)$$

Dans le cas où la distribution d'importance choisie est la loi transition de l'état entre deux instants d'observation $p(\mathbf{X}_{t_k}|\mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})$ comme pour le filtre particulaire bootstrap, le filtre peut aisément être étendu au cas continu-discret. Les étapes de prédiction et de correction sont en effet les suivantes :

- Étape de prédiction

$$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_{t_k}|\mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)}), \quad i = 1 : N. \quad (6.64)$$

- Étape de correction

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)}p(\mathbf{Z}_k|\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}). \quad (6.65)$$

L'étape de prédiction consiste à échantillonner des particules $\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$ selon la loi $p(\mathbf{X}_{t_k}|\mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})$. Ceci peut se faire en simulant des trajectoires $\{\mathbf{X}_t^{(i)} : t_{k-1} \leq t \leq t_k\}_{i=1:N}$ selon l'équation différentielle stochastique décrivant l'évolution de l'état :

$$d\mathbf{X}_t^{(i)} = f(t, \mathbf{X}_t^{(i)})dt + \sigma(t, \mathbf{X}_t^{(i)})d\mathbf{B}_t^{(i)}, \quad (6.66)$$

à partir des conditions initiales $\{\mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)}\}_{i=1:N}$, où $\{\mathbf{B}_t^{(i)}\}_{i=1:N}$ sont des mouvements browniens indépendants. L'étape de correction du filtre est similaire au cas discret.

La simulation selon (6.66) peut se faire grâce au schéma d'Euler ou à d'autres méthodes de simulation d'équations différentielles stochastiques [95]. La simulation par le schéma d'Euler se réalise de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{X}_t^{(i)} + f(\mathbf{X}_t^{(i)})\Delta t + \sigma(\mathbf{X}_t^{(i)})(\mathbf{B}_{t+\Delta t}^{(i)} - \mathbf{B}_t^{(i)}), \quad (6.67)$$

où les incréments $\mathbf{B}_{t+\Delta t}^{(i)} - \mathbf{B}_t^{(i)}$ sont des bruits gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variance Δt . Il est à noter que le pas de discrétisation Δt de la simulation est beaucoup plus petit que l'intervalle de temps $t_k - t_{k-1}$ entre deux observations.

On trouvera une analyse des propriétés théoriques de cette méthode de filtrage en temps continu-discret dans [53].

Cas continu

Dans la section 6.4.3 nous avons brièvement évoqué le fait que le problème de filtrage en temps continu est décrit par l'équation de Kushner-Stratanovich. Dans le cadre linéaire, nous avons vu que la solution était donnée par le filtre de Kalman-Bucy. Dans un contexte non linéaire, il est nécessaire de faire appel à des schémas d'approximation, comme dans le cas discret. Ainsi, [49] associe un schéma de discrétisation temporelle des équations du filtrage à une approximation particulaire. Cette approche présente donc une formulation du filtrage particulaire adaptée au filtrage en temps continu. Notons que comme pour le filtre bootstrap, l'étape de prédiction du filtre est basée sur le modèle d'évolution de l'état uniquement et n'inclut pas l'information apportée par les mesures.

6.6 Synthèse

Selon la nature du problème de filtrage à résoudre, le modèle à espace d'état décrivant le problème peut être défini de manière discrète, continue-discrète, ou totalement continue. Les différents modèles ont été présentés dans la première partie de ce chapitre. Des exemples d'applications ont brièvement été décrits, puis l'accent a été mis sur les types de modélisation rencontrés dans le domaine de l'image. Les problèmes de suivi par filtrage dans ce domaine sont usuellement décrits de manière discrète. Dans les applications visées il est en effet très rare d'avoir une information précise sur l'évolution de l'entité à suivre. Une information sur le déplacement peut être extraite à partir des données des images et introduite dans le modèle d'évolution. Néanmoins la nature du modèle résultant demeure discrète.

L'approche doit être différente lorsqu'on s'intéresse à un phénomène dont la loi d'évolution (physique ou biologique par exemple) est connue et continue par nature. Une modélisation continue est plus appropriée dans ce cas. Cette approche présente l'avantage de respecter le caractère continu du phénomène et de fournir une information sur son évolution entre les instants d'observations. Cet aspect est crucial lorsqu'on s'intéresse à des phénomènes fortement non linéaires et chaotiques, surtout si les observations fournies par les capteurs sont très espacées dans le temps. Dans ce cas, une modélisation continue-discrète est pleinement justifiée. Nous présentons dans le chapitre suivant un exemple d'une telle modélisation. Dans ce cas l'évolution d'un processus selon une loi physique est associée à des observations fournies par des images, dans un contexte où la fréquence d'acquisition peut être faible (données fournies par des satellites par exemple).

La méthode de résolution du problème de filtrage est ensuite choisie en fonction du modèle à espace d'état décrivant le système. Nous avons vu que le filtre de Kalman donne la solution dans un cas linéaire et gaussien. Pour des modèles non linéaires, il est nécessaire de faire appel à des méthodes d'approximation des équations du filtrage. Dans le cas de faibles non linéarités et de distributions de filtrage pouvant être considérées comme monomodales, des extensions directes du filtre de Kalman sont applicables. En présence de non linéarités importantes et de distributions multimodales, des approximations de type Monte Carlo ont été construites. Dans le contexte du filtrage, le principe de Monte Carlo a ainsi conduit au développement de la méthode du filtrage particulière, que nous avons décrite dans la dernière partie de ce chapitre.

Chapitre 7

Suivi de champs de vitesses par filtrage stochastique non linéaire

Ce chapitre propose une formulation du problème de suivi de champs de vitesses dans un cadre de filtrage bayésien, et présente une méthode de résolution adaptée.

La première partie du chapitre s'intéresse à la définition du modèle à espace d'état associé au problème de filtrage. Une étape cruciale dans la construction du modèle est la définition d'une représentation de taille réduite du champ de vitesses, afin que la mise en place du filtrage soit réalisable en pratique. La loi d'évolution de l'état doit ensuite être caractérisée, en tenant compte de la nature continue du phénomène physique sous-jacent. Enfin, la relation liant l'état aux observations brutes fournies par la séquence d'images doit être caractérisée. La deuxième partie du chapitre expose la méthode de résolution du problème de filtrage optimal adaptée à ce modèle à espace d'état, conduisant au suivi des champs de vitesses sur toute la séquence.

7.1 Construction du modèle de filtrage

Il est à noter que la méthode proposée est adaptée au suivi de champs de vecteurs solénoïdaux (à divergence nulle). La construction du modèle de filtrage présentée ci-après est donc basée sur cette hypothèse. Lorsque des mouvements divergents sont présents il est nécessaire d'estimer la composante irrotationnelle correspondante à partir des paires d'images consécutives de la séquence.

7.1.1 Représentation réduite de l'état

Les méthodes de filtrage décrites dans le chapitre précédent ne sont pas adaptées à des espaces d'état de très grande dimension. Dans le cas du filtrage de Kalman et ses extensions, le coût associé au stockage de la matrice de covariance et aux calculs d'inversion de matrices est problématique. Dans le cas des méthodes de filtrage particulière basées sur des techniques de Monte Carlo, la difficulté grandit avec la dimension de l'espace d'état. Pour approcher une distribution de probabilité associée à un espace d'état de dimension très grande, le nombre d'échantillons nécessaires croît en effet exponentiellement avec la taille de l'état. La complexité de calcul étant liée à ce nombre, ces techniques de filtrage sont limitées au suivi d'entités de taille raisonnable.

Notre objectif est de suivre des champs denses de vitesses. La taille du vecteur d'état correspondant étant liée à la taille de l'image, il n'est pas envisageable de traiter directement le problème de filtrage avec cette représentation dense. La première étape dans la construction du modèle à espace d'état associé à notre problème de filtrage consiste donc à définir une représentation de taille réduite de l'état.

Dans le contexte des écoulements fluides, plusieurs approches peuvent être considérées pour réduire le nombre de variables d'état utilisées pour décrire le modèle. Il est par exemple possible de s'appuyer sur la connaissance globale de l'écoulement afin d'en construire une représentation réduite. Ainsi, l'écoulement peut être décrit par ses modes spectraux [33] ou à partir de fonctions de base spatiales dans le cas de la décomposition en modes propres (technique POD [20]). Ces méthodes sont largement utilisées pour la simulation d'écoulements fluides. Dans ce cas, on peut en effet disposer de séries de mesures expérimentales permettant d'estimer la représentation réduite. La nature de ces méthodes fait que la représentation obtenue est liée à un écoulement particulier et n'est donc pas généralisable. Pour les domaines mettant en jeu des écoulements géophysiques (météorologie, glaciologie, océanographie), une telle représentation réduite n'est pas envisageable. Il est en effet difficile de disposer d'une base d'exemples reproduisant précisément le même phénomène.

Contrairement à cette classe de méthodes, les particules de vortex décrites dans la première partie de ce document permettent de construire une représentation de taille réduite du vecteur d'état sans disposer d'une base de connaissances sur l'écoulement. Le vecteur d'état est construit à partir d'une approximation discrète de la vorticité. Comme décrit dans la section 3.1.1, la vorticité du champ de vecteurs est approch e par la relation (3.4) :

$$\operatorname{curl} \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j f_{\epsilon_j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad (7.1)$$

où les vecteurs \mathbf{x}_j correspondent aux centres des fonctions de base.

Notons qu'une décomposition à base d'ondelettes peut également être propos e [61]. Cependant, un des attraits des particules de vortex est que la dynamique de l'écoulement est r sum e par un ensemble d'éléments qui sont directement interprétables physiquement. L'approximation est bas e sur les vortex de l'écoulement, donc sur des quantités qui sont li es à la compréhension de la dynamique. Enfin, l'évolution temporelle du fluide peut être complètement décrite par ces éléments, à partir de l'équation de Navier-Stokes. Ce point est décrit dans la section suivante.

7.1.2 Modélisation de l'évolution temporelle du fluide

Cette section décrit les techniques de simulation de l'équation de Navier-Stokes dans le contexte des particules de vortex. Nous rappelons la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en dimension 2 :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \xi = \nu \Delta \xi, \quad (7.2)$$

où $\xi = \text{curl } \mathbf{w}$ représente la vorticité et ν est le coefficient de viscosité du fluide.

L'évolution temporelle de l'écoulement est décrite à travers la variation de la vorticité. L'équation (7.2) traduit simplement le fait que la vorticité est transport e par le champ \mathbf{w} , puis diffus e. Le schéma temporel peut alors être traité en deux étapes. Il a en effet été proposé par [36] de traiter successivement l'étape de transport et l'étape de diffusion. Ceci revient à séparer les contributions visqueuse et non-visqueuse de l'équation. On parle alors de *viscous splitting*. Dans un premier temps le transport de la vorticité sans les effets de diffusion est décrit par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \xi = 0, \quad (7.3)$$

puis la diffusion de la vorticité li e à la viscosité du fluide est repr sent e par l'équation de diffusion ( galement appel e équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi. \quad (7.4)$$

Transport de la vorticité

Le phénomène de transport de la vorticité est implicitement résolu par la nature même de la méthode de vortex. Il suffit en effet de déplacer le centre \mathbf{x}_j de chaque fonction de base par sa propre vitesse $\mathbf{w}(\mathbf{x}_j)$. Le déplacement d'un centre \mathbf{x}_j est décrit par :

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}_j), \quad (7.5)$$

où $\mathbf{w}(\mathbf{x}_j)$ est calculé à partir de toutes les autres positions de la manière suivante :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_j) = \sum_{l=1}^p \gamma_l K_{\epsilon_l}^{\perp}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l), \quad (7.6)$$

et où le noyau lissé K_{ϵ} est défini dans notre cas par (voir section 3.2.1) :

$$K_{\epsilon}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi\|\mathbf{x}\|^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\epsilon^2}\right) \right). \quad (7.7)$$

Rappelons que lorsqu'on ne dispose pas de conditions nulles au bord pour le champ de vitesses, il est nécessaire de prendre en compte la composante de transport global \mathbf{w}_{tra} de l'écoulement, comme décrit dans la section 1.1.2 de la première partie. Cette composante du champ de vitesses a été préalablement estim e à l'aide d'un estimateur adapté (voir la section 3.2.4). Elle est donc connue en tout point et peut être ajout e au déplacement (7.6) :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_j) = \sum_{l=1}^p \gamma_l K_{\epsilon_l}^{\perp}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l) + \mathbf{w}_{tra}(\mathbf{x}_j). \quad (7.8)$$

Notons que pour un très grand nombre de fonctions de base l'évaluation de la vitesse selon (7.6) peut être très coûteuse. Ce problème se rencontre surtout pour des applications de la méthode de vortex en 3D, et nécessite de faire appel à des techniques d'accélération de calcul. Il est ainsi possible de calculer les vitesses à partir d'une représentation des données sur des arbres. Le calcul peut également être réalisé sur une grille à l'aide de solveurs rapides. On parle alors de méthodes couplées. Dans ce cas il est nécessaire de faire appel à des méthodes d'interpolation pour réaliser les transferts entre la grille et les positions des fonctions de base. Nous renvoyons le lecteur vers [47] pour une description détaillée de ces méthodes.

Simulation de la diffusion

Plusieurs méthodes ont été proposées pour simuler la diffusion de la vorticité dans le cadre des particules de vortex.

La solution de l'équation de la chaleur (7.4) avec condition initiale ξ_0 s'écrit :

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \nu t) \xi_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7.9)$$

avec le noyau gaussien :

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi s} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4s}\right). \quad (7.10)$$

Historiquement, la première méthode permettant d'inclure l'effet de la diffusion pour les particules de vortex a été propos e par [36]. L'approche est stochastique et repose sur la relation entre diffusion et mouvement brownien. Il y a en effet correspondance entre la distribution de la position de particules soumises à une marche aléatoire et la solution de l'équation de la chaleur [38]. La méthode consiste donc à appliquer une perturbation gaussienne à chaque centre de fonction de base. Pour un pas de temps Δt , la perturbation est de moyenne nulle et de variance $2\nu\Delta t$. Ce déplacement aléatoire vient s'ajouter au déplacement (7.8) traduisant le transport de la vorticité.

Par la suite, de nouvelles méthodes ont été d velopp es permettant une description plus précise de la diffusion. Ces méthodes sont déterministes et simulent la diffusion en redistribuant les forces des fonctions de base au lieu de modifier leurs positions.

La méthode PSE (*Particle strength exchange*), initialement propos e par [110] repose ainsi sur l'idée de remplacer l'opérateur Laplacien de diffusion par un opérateur intégral :

$$\Delta_\epsilon \xi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon^2} \int (\xi(\mathbf{y}) - \xi(\mathbf{x})) \eta_\epsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{y}, \quad (7.11)$$

où η_ϵ est un noyau. Cet opérateur intégral est ensuite discr t s  sur les centres des fonctions de base. Le système de redistribution des forces qui en découle permet de corriger la vorticité de chaque fonction de base. Cette méthode est également formul e pour des fonctions de base de tailles variables [48]. Citons également la méthode [146], basée sur le même principe mais résolvant un système linéaire pour calculer la redistribution de la

vorticité entre centres voisins.

Nous renvoyons le lecteur vers [47] pour une description complète de ces méthodes et l'analyse de la convergence des schémas numériques associés.

7.1.3 Interprétation probabiliste de l'équation de Navier-Stokes

La méthode de simulation de la diffusion par marche aléatoire [36] est liée à une interprétation probabiliste de l'équation de Navier-Stokes 2D incompressible. La formulation vorticité-vitesse de l'équation appartient en effet à la classe des équations de MacKean-Vlasov. Elle a donc une interprétation rigoureuse en termes de système stochastique de particules en interaction.

En réécrivant la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes (7.2) :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mathbf{w}) = \nu \Delta \xi, \quad (7.12)$$

il apparaît en effet que la vorticité ξ est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire de type MacKean-Vlasov à diffusion constante :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\xi \int b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \xi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) + \nu \Delta \xi, \quad (7.13)$$

avec un noyau d'interaction singulier $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ défini par (voir section 1.1.3) :

$$K(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi \|\mathbf{x}\|^2}. \quad (7.14)$$

Il existe alors un processus de MacKean $(\mathcal{X}_t, t \geq 0)$ associé résolvant :

$$d\mathcal{X}_t = \mathbf{w}(\mathcal{X}_t) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{B}_t, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = K^\perp * \xi(\mathbf{x}), \quad (7.16)$$

où \mathbf{B}_t est un mouvement brownien dans \mathbb{R}^2 et ξ_t est la loi du processus \mathcal{X}_t .

La loi de \mathcal{X}_t peut être approchée par la mesure empirique :

$$\xi_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{x}_t^i}, \quad (7.17)$$

conduisant à un système de N particules en interaction :

$$d\mathbf{x}_t^i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K^\perp(\mathbf{x}_t^i - \mathbf{x}_t^j) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{B}_t^i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (7.18)$$

où \mathbf{B}_t^i est un mouvement brownien de dimension 2. Dans le cas où une force γ_j est associée à chaque particule et où le noyau K est remplacé par sa version lissée K_{ϵ_j} , le système est :

$$d\mathbf{x}_t^i = \sum_{j=1}^N \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x}_t^i - \mathbf{x}_t^j) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{B}_t^i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (7.19)$$

L'interprétation probabiliste de l'équation de Navier-Stokes 2D incompressible par des systèmes de particules en interaction a été étudiée par plusieurs auteurs [109, 114]. Elle se situe dans un cadre plus général d'interprétation stochastique d'équations aux dérivées partielles non linéaires. On pourra trouver une introduction et des références dans [28]. Les travaux portent sur l'étude de la convergence de la mesure empirique du système de particules en interaction vers la solution du problème de martingale associé, lorsque le nombre de particules tend vers l'infini (propagation du chaos), ainsi que sur la convergence des champs de vitesses engendrés par la mesure empirique.

Le modèle d'évolution que nous définissons dans la section suivante se base sur cette idée de système de particules en interaction. Il est cependant important de noter que la construction du modèle se base sur un nombre de particules réduit, ce qui nous place loin des conditions de convergence évoquées ci-dessus. Le modèle que nous proposons n'est pas voué à simuler parfaitement l'équation de Navier-Stokes sur un temps long, mais à prédire l'évolution de l'écoulement de manière cohérente entre deux instants d'observations successifs.

7.1.4 Modèle d'évolution de l'état

Définition

L'état \mathbf{X} de notre modèle de filtrage est défini par l'ensemble des centres des p fonctions de base : $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)^T$. Nous avons observé dans la section précédente qu'en nous basant sur les particules de vortex et une simulation de la diffusion par une méthode aléatoire [36], l'évolution de l'état peut être caractérisée par le système suivant :

$$d\mathbf{x}_{i,t} = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x}_{i,t} - \mathbf{x}_{j,t}) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{B}_{i,t}, \quad 1 \leq i \leq p, \quad (7.20)$$

où $\mathbf{B}_{i,t}$ est un mouvement brownien de dimension 2.

Le système se réécrit sous forme compacte en définissant $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{w}(\mathbf{x}_p))^T$:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{B}_t, \quad (7.21)$$

où \mathbf{B}_t est un mouvement brownien de dimension $2p$ à composantes indépendantes.

Les paramètres sous-jacents du modèle sont les coefficients de force et les amplitudes associés à chaque centre. Ils sont déterminés à l'initialisation et caractérisent la quantité de vorticité port e par chaque fonction de base.

Comme il a été décrit précédemment, la partie aléatoire du modèle traduit l'effet de diffusion de la vorticité due à la viscosité du fluide. Cette composante décrit un phénomène physique mais ne traduit pas les incertitudes sur le modèle d'évolution. Afin de définir complètement l'équation d'évolution de notre modèle de filtrage, il est nécessaire d'ajouter un terme à la partie aléatoire. Le modèle d'évolution s'écrit finalement :

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t) dt + \sigma d\mathbf{B}_t, \quad (7.22)$$

où $\sigma = \sqrt{2\nu} + \eta$.

Le terme de bruit η permet de tenir compte de la non adéquation de l'équation de Navier-Stokes 2D à la séquence d'images. Il peut également traduire l'erreur de modélisation causée par l'approximation à partir d'un nombre trop réduit de fonctions de base, ou une mauvaise connaissance initiale des paramètres du modèle.

Initialisation

L'initialisation du modèle est réalisée à partir de la première paire d'images de la séquence. La méthode d'estimation décrite dans la section 3.4 de la première partie de ce document permet de fixer une distribution de vorticit   initiale. Cette carte de vorticit   initiale est d  crite par un ensemble de p fonctions de base de centres $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1:p}$ transportant une quantit   de vorticit   d  crite par les param  tres d'amplitude $\{\epsilon_j\}_{j=1:p}$ et de force $\{\gamma_j\}_{j=1:p}$ associ  s.

Le mod  le peut   galement   tre initialis      partir de la connaissance d'un champ de d  placement initial. Dans ce cas on obtient   galement une distribution de vorticit   initiale décomposé sur un ensemble de fonctions de base. Cette question a   t   abordé dans la section 3.5.

7.1.5 Mod  le de mesures

   chaque instant t , le champ dense de vitesses not   \mathbf{w}_t peut   tre reconstruit    partir du vecteur $\mathbf{X}_t = (\mathbf{x}_{1,t}, \dots, \mathbf{x}_{p,t})^T$ et des param  tres du mod  le. En effet, le d  placement en tout point de l'image est donn   par :

$$\mathbf{w}_t(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j,t}). \quad (7.23)$$

Observations extraites des images

Afin de construire un mod  le d'observation li      l'  tat, une r  gion R_j est tout d'abord d  finie autour de chaque centre \mathbf{x}_j , correspondant au domaine d'influence de la fonction de base, caractérisé par le param  tre ϵ_j . En notant $R = \cup_{j=1}^p R_j$, le vecteur d'observations au temps $k \hat{=} t_k$ est d  fini par :

$$\mathbf{Z}_k = (I_k(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in R}. \quad (7.24)$$

La relation liant le vecteur d'observations    l'  tat est construite    partir de l'hypoth  se de conservation de la luminance vérifié    un bruit gaussien pr  s, entre l'image I_k et l'image I_{k+1} recalé par le champ dense de vitesses reconstruit selon (7.23) :

$$I_k(\mathbf{x}) = I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{t_k}(\mathbf{x})) + u_k, \quad (7.25)$$

o   $u_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

En posant l'ind  pendance de $I_k(\mathbf{x})$ et $I_k(\mathbf{x}')$ conditionnellement    l'  tat $\mathbf{X}_{t_k} \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in R$, la vraisemblance du vecteur d'observations s'  crit :

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) = \prod_{\mathbf{x} \in R} p(I_k(\mathbf{x}) | \mathbf{X}_{t_k}), \quad (7.26)$$

et donc :

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) \propto \exp \left(- \int_R \frac{(I_k(\mathbf{x}) - I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{t_k}(\mathbf{x})))^2}{2\sigma^2} d\mathbf{x} \right). \quad (7.27)$$

Il est à noter que pour construire la vraisemblance au temps k de notre modèle, il est nécessaire de faire l'hypothèse forte que l'image I_{k+1} est connue. Le graphe de dépendances de notre modèle de filtrage est alors décrit par la figure 7.1. La seule information pouvant être extraite des images étant une information sur le déplacement, cette hypothèse est nécessaire.

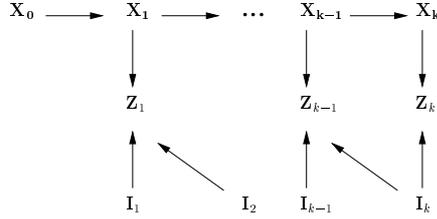


FIG. 7.1: Graphe de dépendances du modèle de filtrage.

Observations données par un champ

Dans certains cas, il est possible de disposer d'une information directe sur les champs de déplacements. Cette connaissance peut être partielle et bruitée, obtenue par exemple à l'aide d'une méthode d'estimation simplifiée et rapide (techniques de type PIV pour des images de particules par exemple). Soit $\tilde{\mathbf{w}}_k$ l'observation dont on dispose sur le champ de déplacements à un instant t_k . Le modèle de mesures peut être construit à partir de la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{w}}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_k, \quad (7.28)$$

où \mathbf{r}_k sont des bruits gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variance σ^2 , et $\mathbf{w}_k(\mathbf{x})$ est construit à partir du vecteur d'état \mathbf{X}_{t_k} selon (7.23).

Le vecteur d'observations est alors défini par :

$$\mathbf{Z}_k = (\tilde{\mathbf{w}}_k(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in R}, \quad (7.29)$$

et sa vraisemblance s'écrit en se basant sur l'hypothèse d'indépendance conditionnelle comme dans le cas (7.26) :

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) = \prod_{\mathbf{x} \in R} p(\tilde{\mathbf{w}}_k(\mathbf{x}) | \mathbf{X}_{t_k}). \quad (7.30)$$

Dans ce cas, le graphe de dépendances associé au modèle est également décrit par le schéma 7.1 puisqu'un champ de déplacements connu à l'instant k a nécessairement été estimé à l'aide des images I_k et I_{k+1} .

7.2 Mise en place du filtrage

Le modèle à espace d'état définissant le problème de filtrage est un modèle continu-discret du type (6.6) défini par le modèle d'évolution (7.22) et la vraisemblance (7.27) (ou (7.30)) :

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma d\mathbf{B}_t, \quad (7.31)$$

$$p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}). \quad (7.32)$$

Le modèle d'évolution est non linéaire, tout comme le modèle d'observations. Il est nécessaire de mettre en place une technique de filtrage non linéaire approchant la solution du problème de filtrage optimal. Le filtrage particulière dédié aux modèles à espace d'état continu-discret est adapté à notre problème. Son principe a été exposé dans la section 6.5.3. La procédure de rééchantillonnage choisie est le rééchantillonnage résiduel [106]. Cette technique est partiellement déterministe et donc moins coûteuse qu'un échantillonnage multinomial classique, tout en ayant de bonnes propriétés théoriques [54].

La mise en oeuvre du suivi de champs de vitesses par filtrage non linéaire du modèle (7.32) est finalement décrite par les étapes suivantes :

- $\mathbf{t}_k = \mathbf{0}$:

Initialisation du vecteur d'état $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_{1,0}, \dots, \mathbf{x}_{p,0})^T$ et des paramètres $\beta = (\{\gamma_j, \epsilon_j\}_{j=1:p})$ du modèle.

- $\mathbf{t}_k = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots$:

- **Prédiction selon le modèle dynamique :**

Simulation de N trajectoires $\{\mathbf{X}_t^{(i)} : t_{k-1} < t \leq t_k\}_{i=1:N}$ à partir des conditions initiales $\{\mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)}\}_{i=1:N}$ selon le schéma d'Euler :

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t}^{(i)} = \mathbf{X}_t^{(i)} + \mathbf{w}(\mathbf{X}_t^{(i)})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\eta_t^{(i)}, \quad (7.33)$$

où $\eta_t^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}_{2p})$.

- **Correction des poids des trajectoires et normalisation :**

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}) \quad \forall i = 1 : N, \quad (7.34)$$

$$\tilde{w}_k^{(i)} = \frac{w_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N w_k^{(j)}} \quad \forall i = 1 : N. \quad (7.35)$$

◦ **Estimation de la loi de filtrage et du champ de déplacements :**

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_k^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k}), \quad (7.36)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{t_k} = (\hat{\mathbf{x}}_{1,t_k}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{p,t_k})^T = \mathbb{E}(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}, \quad (7.37)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{t_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{j,t_k}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (7.38)$$

◦ **Rééchantillonnage adaptatif résiduel :**

Si $\frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_k^{(i)})^2} < \text{seuil}$:

- ★ conserver $\tilde{N}_i = \lfloor N \tilde{w}_k^{(i)} \rfloor$ copies de $\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$ (on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x),
- ★ tirer les $N_r = N - \sum_{i=1}^N \tilde{N}_i$ trajectoires restantes parmi $\{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}\}_{i=1 \dots N}$ proportionnellement aux poids $\tilde{w}'_k^{(i)} = (N \tilde{w}_k^{(i)} - \tilde{N}_i) / N_r$,
- ★ fixer $\tilde{w}_k^{(i)} = 1/N$.

Comme précisé dans la section 6.4.2, la distribution de filtrage $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k})$ n'est accessible qu'aux instants d'observations t_k . Elle peut cependant être définie entre deux instants d'observations t_{k-1} et t_k par la prédiction :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \quad \text{pour } t_{k-1} < t < t_k. \quad (7.39)$$

Cette distribution peut être approchée sur l'ensemble des trajectoires $\{\mathbf{X}_t^{(i)}\}_{i=1 \dots N}$ simulées selon (7.33), pondérées par les poids calculés en t_{k-1} :

$$p(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \simeq \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_t^{(i)}}(\mathbf{X}_t), \quad (7.40)$$

conduisant à :

$$\hat{\mathbf{X}}_t = (\hat{\mathbf{x}}_{1,t}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{p,t})^T = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t | \mathbf{Z}_{1:k-1}) \simeq \sum_{i=1}^N w_{k-1}^{(i)} \mathbf{X}_t^{(i)}. \quad (7.41)$$

Le champ de déplacements peut donc être estimé pour tout t entre les instants d'observations :

$$\hat{\mathbf{w}}_t(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{j,t}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (7.42)$$

7.3 Réduction de dimension du problème de filtrage

Lorsque l'espace d'état est de grande dimension, la mise en oeuvre des méthodes de filtrage est problématique. La difficulté provient de la manipulation des matrices de covariance dans le cas du filtrage de Kalman et ses extensions, ou du nombre de trajectoires à simuler dans le cas du filtrage particulaire.

Dans la section 7.1.1, nous avons mis en avant le fait que la première étape dans la construction du modèle de filtrage est la construction d'une représentation de taille réduite de l'état. Cependant, lorsque le phénomène à décrire est complexe, la taille de la représentation réduite demeure importante. Il est alors nécessaire de s'intéresser à des méthodes de réduction de la dimension du problème de filtrage associé.

Une approche possible est de réduire la dimension du problème en se basant sur des idées issues de la théorie des systèmes dynamiques, liées à l'analyse des directions stables et instables d'un système. Cette idée a été exploitée dans le cadre du filtre de Kalman [133] et du filtre de Kalman d'ensemble [120], dans le but d'approcher la matrice de covariance du système par une matrice de rang réduit.

Pour un problème de filtrage continu-discret résolu par filtrage particulaire, Chorin a récemment proposé une méthode de réduction de dimension reposant sur l'étude des instabilités du système [37]. L'idée est de concentrer l'effort d'échantillonnage sur les directions instables, déterminées de manière adaptative au cours du processus d'estimation séquentiel. L'application de cette idée à notre problème de suivi est envisageable, en vue de réduire la dimension du problème dans le cas d'écoulements complexes.

Nous présentons brièvement ci-après la notion de stabilité ou d'instabilité d'un système et une méthode de caractérisation des directions instables, basée sur les vecteurs singuliers de la matrice résolvante associée à la partie déterministe de l'EDS décrivant notre système. La modification de l'étape de prédiction du filtrage particulaire proposée par Chorin est alors exposée.

7.3.1 Directions d'instabilité d'un système

Cadre général

On considère l'équation différentielle décrivant l'évolution d'un système sans bruit :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}). \quad (7.43)$$

Soit $[t_{j-1}, t_j]$ un intervalle de temps de longueur finie. Soit $\mathbf{x}_{t_{j-1}}$ le vecteur d'état du système à l'instant t_{j-1} , et $\mathbf{x}_{t_{j-1}} + \delta\mathbf{x}_{t_{j-1}}$ un état proche, correspondant à une petite perturbation de $\mathbf{x}_{t_{j-1}}$. L'évolution temporelle de la différence entre les deux trajectoires $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ peut être approchée par l'équation linéaire :

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = J(t)\delta\mathbf{x}, \quad (7.44)$$

où $J(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))$ est la matrice Jacobienne de f , évaluée en $\mathbf{x}(t)$. La solution de ce système linéaire est donnée en t_j par :

$$\delta\mathbf{x}(t_j) = M_{t_{j-1}, t_j} \delta\mathbf{x}(t_{j-1}), \quad (7.45)$$

où M_{t_{j-1}, t_j} est appelée matrice résolvante du système, définie par :

$$M_{t_{j-1}, t_j} = \exp \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} J(s) ds \right). \quad (7.46)$$

En constatant que :

$$\langle \delta \mathbf{x}(t_j), \delta \mathbf{x}(t_j) \rangle = \langle M_{t_{j-1}, t_j} \delta \mathbf{x}(t_{j-1}), M_{t_{j-1}, t_j} \delta \mathbf{x}(t_{j-1}) \rangle \quad (7.47)$$

$$= \langle \delta \mathbf{x}(t_{j-1}), M_{t_{j-1}, t_j}^T M_{t_{j-1}, t_j} \delta \mathbf{x}(t_{j-1}) \rangle, \quad (7.48)$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire dans l'espace euclidien, il s'ensuit que les directions de plus grand accroissement de la perturbation sur un intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ peuvent être caractérisées par les vecteurs propres de la matrice $M_{t_{j-1}, t_j}^T M_{t_{j-1}, t_j}$. Les vecteurs propres indiquant les directions de plus grand accroissement sont ceux associés aux plus grandes valeurs propres de la matrice $M_{t_{j-1}, t_j}^T M_{t_{j-1}, t_j}$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres supérieures à 1 correspondent aux directions dites *instables*, les vecteurs propres restants caractérisent les directions *stables*.

Les vecteurs propres de la matrice $M_{t_{j-1}, t_j}^T M_{t_{j-1}, t_j}$ sont appelés vecteurs singuliers et sont liés aux vecteurs de Lyapunov [104]. Cependant les vecteurs singuliers considérés sont déterminés sur un petit intervalle de temps et sont donc associés à une dynamique localisée, tandis que les vecteurs de Lyapunov sont définis sur un intervalle de temps $[t_{j-1}, t_j]$ avec $t_j \rightarrow \infty$.

Cas du modèle de particules de vortex

L'équation d'évolution du modèle de particules de vortex (7.22) sans la composante de bruit est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{X}), \quad (7.49)$$

où nous rappelons que $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)^T$ et $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{w}(\mathbf{x}_p))^T$. La détermination des directions stables et instables nécessite la connaissance de la matrice Jacobienne $J = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{X}}$. Cette matrice de taille $(2p, 2p)$ est construite à partir des gradients du type $\frac{\partial u(\mathbf{x}_j)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u(\mathbf{x}_j)}{\partial y_j}$, $\frac{\partial v(\mathbf{x}_j)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial v(\mathbf{x}_j)}{\partial y_j}$ ainsi que des différents termes croisés.

7.3.2 Réduction de dimension dans le cadre du filtrage particulaire continu-discret

La réduction de dimension porte sur l'étape de prédiction de l'algorithme de filtrage particulaire continu-discret. Nous rappelons que cette étape consiste à échantillonner un ensemble de N trajectoires du processus d'état $\mathbf{X}(t)$ entre deux instants d'observations t_{k-1} et t_k selon le modèle dynamique.

Calcul adaptatif des directions stables et instables

En vue de déterminer les composantes instables du système, l'intervalle de temps $[t_{k-1}, t_k]$ est divisé en un ensemble de sous-intervalles : $[t_{k-1}, t_k] = \cup_j [t_{j-1}, t_j]$. Ainsi, les directions d'instabilité sont déterminées de manière plus précise sur chaque sous-intervalle. Cette subdivision est particulièrement importante si l'intervalle de temps entre deux observations est long.

Sur un sous-intervalle de temps $[t_{j-1}, t_j]$, les instabilités du système sont déterminées à partir d'une trajectoire "test" $\tilde{\mathbf{X}}(t)$. Cette trajectoire est obtenue en propageant l'estimation $\hat{\mathbf{X}}_{t_{j-1}}$ de l'état du système (définie à tout instant par (7.41)) jusqu'à l'instant t_j . La propagation se fait en intégrant le modèle (7.43) sans bruit à partir de la condition initiale $\hat{\mathbf{X}}_{t_{j-1}}$, selon le schéma d'Euler classique :

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)\Delta t. \quad (7.50)$$

La matrice M_{t_{j-1}, t_j} est calculé le long de cette trajectoire selon (7.46), à partir des matrices Jacobiennes calculées sur tous les instants intermédiaires. Les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $M_{t_{j-1}, t_j}^T M_{t_{j-1}, t_j}$ sont alors déterminés. Notons R la matrice constituée des vecteurs propres. Le changement de variables $\mathbf{Y} = R\mathbf{X}$ conduit à reformuler notre modèle d'évolution de l'état (7.22) de la manière suivante :

$$d\mathbf{Y} = R\mathbf{w}(R^T\mathbf{Y})dt + R\Sigma d\mathbf{B}_t, \quad (7.51)$$

où $\Sigma = \sigma\mathbb{I}_{2p}$.

Modification de l'étape de prédiction du filtrage

Pour un intervalle de temps $[t_{j-1}, t_j]$ donné, les N trajectoires $\{\mathbf{Y}_t^{(i)} : t_{j-1} < t \leq t_j\}_{i=1:N}$ sont simulées à partir des conditions initiales $\{\mathbf{Y}_{t_{j-1}}^{(i)}\}_{i=1:N}$ en traitant différemment les composantes stables et instables du système :

- les m composantes instables sont simulées selon l'équation différentielle stochastique (7.51),
- les $2p - m$ composantes instables sont remplacées par les composantes correspondantes de la trajectoire test $\tilde{\mathbf{Y}} = R\tilde{\mathbf{X}}$, obtenue par changement de variable.

Pour chacune des N trajectoires prédites, les m composantes instables sont donc échantillonnées aléatoirement, tandis que les $2p - m$ composantes restantes sont simplement propagées de manière déterministe. Le problème d'échantillonnage associé à l'étape de prédiction du filtrage est donc réduit à un espace de taille m .

7.4 Conclusion

Le suivi de champs de vitesses d'écoulements fluides à partir de séquences d'images peut être formulé comme un problème de filtrage bayésien. Le modèle à espace d'état sous-jacent est construit à partir des particules de vortex, correspondant à une discrétisation de

la vorticité sur un ensemble de fonctions de base. Le déplacement de ces fonctions de base dans le temps permet d'approcher la solution de l'équation de Navier-Stokes, décrivant un transport et une diffusion de la vorticité dans le temps. L' tat du système est défini par les positions de ces fonctions de base. Le nombre de variables d'état est donc considérablement réduit par rapport à une représentation dense du champ de vitesses. L'équation d'évolution du modèle est alors décrite par une équation différentielle stochastique non linéaire. Les observations sont extraites des images ou donn es par des estimations bruit es des champs de déplacements. Dans les deux cas, la relation liant l'état aux observations est également non linéaire.

Le modèle à espace d'état caractérisant le problème de filtrage est donc entièrement non linéaire. Il est nécessaire d'utiliser une technique d'approximation du filtrage capable de traiter ces non linéarités. Le filtrage particulaire est adapté à cette configuration générale. Usuellement formulé dans le cas discret, il peut être étendu pour résoudre le problème du filtrage optimal dans le cas continu-discret.

La représentation sous une forme continue-discrète du modèle permet de respecter la nature continue du phénomène étudié. De plus, la formulation du filtrage en temps continu-discret permet de reconstruire les champs de vitesses à tout instant, et pas uniquement aux instants d'observations. Ceci est particulièrement intéressant si la fréquence d'acquisition des mesures est faible.

Enfin, l'application de méthodes de réduction de dimension bas es sur l'analyse du comportement stable ou instable du système est envisageable dans le contexte du filtrage particulaire continu-discret. Cette perspective intéressante pourrait permettre de simplifier le problème de suivi de champs de vitesses d'écoulements complexes.

Chapitre 8

Validation expérimentale

Ce chapitre expose un ensemble d'expériences destinées à valider la méthode de suivi par filtrage non linéaire proposée dans le chapitre précédent. La méthode est tout d'abord testée sur des séquences simulées. La première séquence traitée est simulée à partir d'un modèle réduit de particules de vortex. La deuxième séquence provient de la simulation numérique d'un écoulement turbulent bidimensionnel. Des analyses qualitative et quantitative des résultats sont effectuées. Des résultats obtenus dans des situations réelles sont ensuite présentés, liés à des applications en mécanique des fluides expérimentales et en météorologie.

8.1 Séquence synthétique de particules de vortex

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus sur une séquence synthétique simulée à partir d'un modèle réduit de particules de vortex.

Le modèle est construit à partir de 5 particules de vortex. Les positions initiales $\{\mathbf{x}_{j,t_0}\}_{j=1:5}$ de ces particules sont fixées. La vorticité associée à chaque particule est décrite par des valeurs données des paramètres de force γ_j et d'amplitude ϵ_j . L'état du modèle est décrit par l'ensemble des positions des 5 particules, et son évolution est caractérisée par le modèle (7.20) présenté dans la section 7.1.4, pour $p = 5$.

Les trajectoires des particules de vortex peuvent être simulées selon ce modèle d'évolution, à l'aide d'un schéma de discrétisation d'Euler. Nous montrons sur la figure 8.1 un exemple de deux réalisations, pour des conditions initiales identiques. Les trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image sont tracées sur la figure 8.1(a), et l'évolution temporelle de chaque coordonnée du vecteur d'état est représentée sur la figure 8.1(b). Les trajectoires simulées par le modèle bruité peuvent être très différentes. L'évolution temporelle de la distribution de vorticité associée à chacune de ces deux réalisations est représentée sur la figure 8.2.

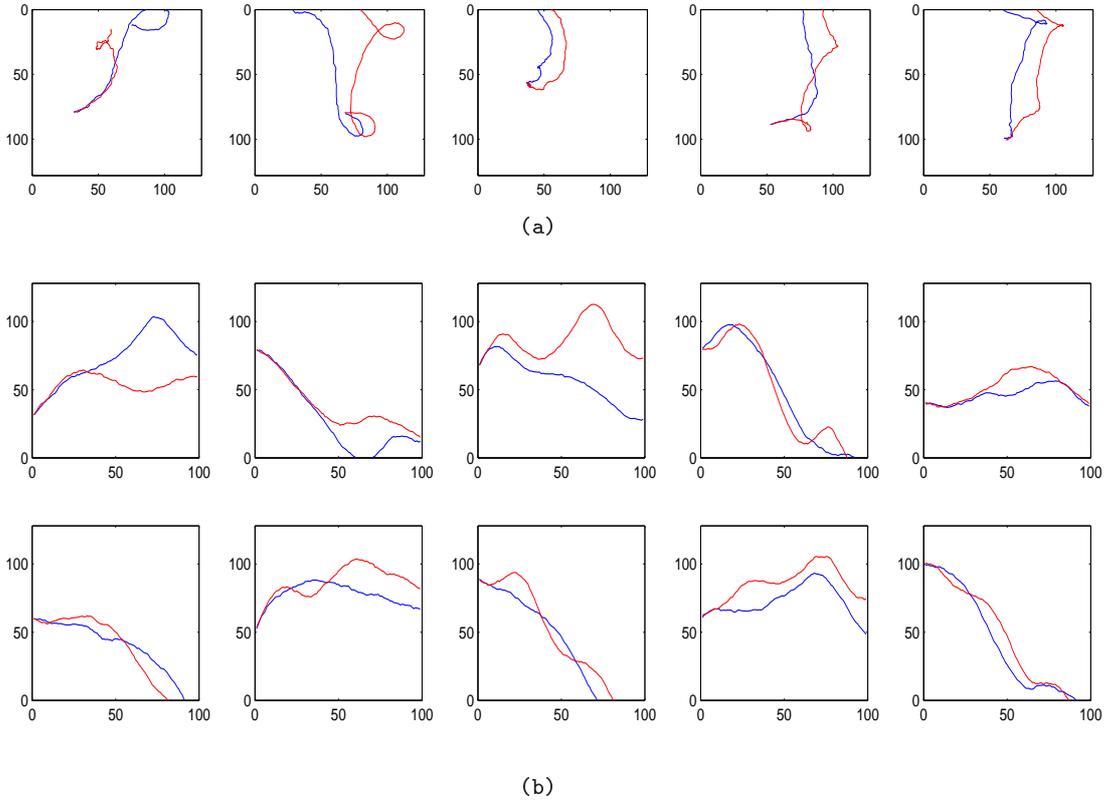


FIG. 8.1: *Exemple de deux réalisations obtenues par simulation du modèle construit à partir de 5 particules de vortex. (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la réalisation correspondant à la vérité terrain est tracée en rouge) ; (b) Évolution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état.*

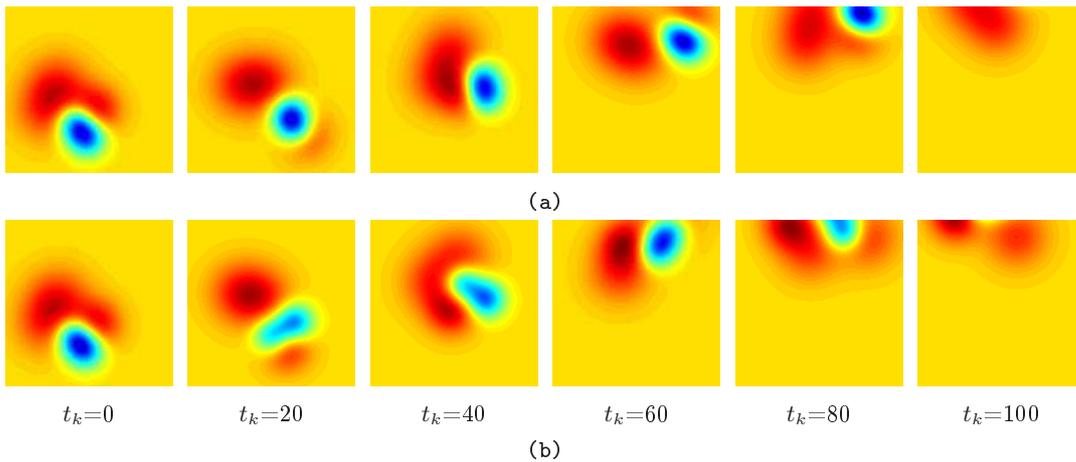


FIG. 8.2: *Évolution temporelle des cartes de vorticité associées à deux réalisations distinctes du modèle. (a) Vérité terrain ; (b) Autre réalisation simulée.*

Afin de tester la méthode de suivi, nous choisissons tout d'abord une des trajectoires

simulées par le modèle. La réalisation choisie est la trajectoire tracée en rouge sur la figure 8.1. Une séquence d'images synthétiques correspondant à cette réalisation a été construite. Cette séquence est créée à partir de la séquence de champs de déplacements générés par cette trajectoire choisie. On dispose donc d'une paire d'images synthétiques (I_k, I_{k+1}) à chaque instant d'observation t_k . Le mouvement décrit par cette paire d'images correspond au déplacement à l'instant t_k de la vérité terrain. Le type d'images utilisé pour créer la séquence est représenté sur la figure 8.3.

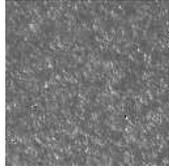


FIG. 8.3: *Exemple d'image de particules utilisée pour créer la séquence synthétique.*

Nous avons testé la méthode de suivi par filtrage sur cette séquence synthétique. Le modèle à espace d'état est caractérisé par le modèle d'évolution à 5 particules de vortex et les observations discrètes données par la séquence d'images. La méthode de suivi par filtrage particulaire en temps continu-discret a été appliquée avec $N = 500$ trajectoires. Nous présentons sur la figure 8.4 le résultat obtenu. En vue d'évaluer la robustesse de la méthode, nous avons représenté une moyenne sur 50 filtrages ainsi que la dispersion autour de ce résultat moyen. Les résultats obtenus montrent la capacité de la méthode à bien retrouver la trajectoire de test. Les trajectoires estimées des 5 particules de vortex dans le plan image collent parfaitement aux trajectoires correspondant à la vérité terrain (voir figure 8.4(a)). La dispersion autour de l'estimation de chaque coordonnée du vecteur d'état est représentée sur la figure 8.4(a). Cette dispersion est très faible, traduisant la robustesse de la méthode de suivi.

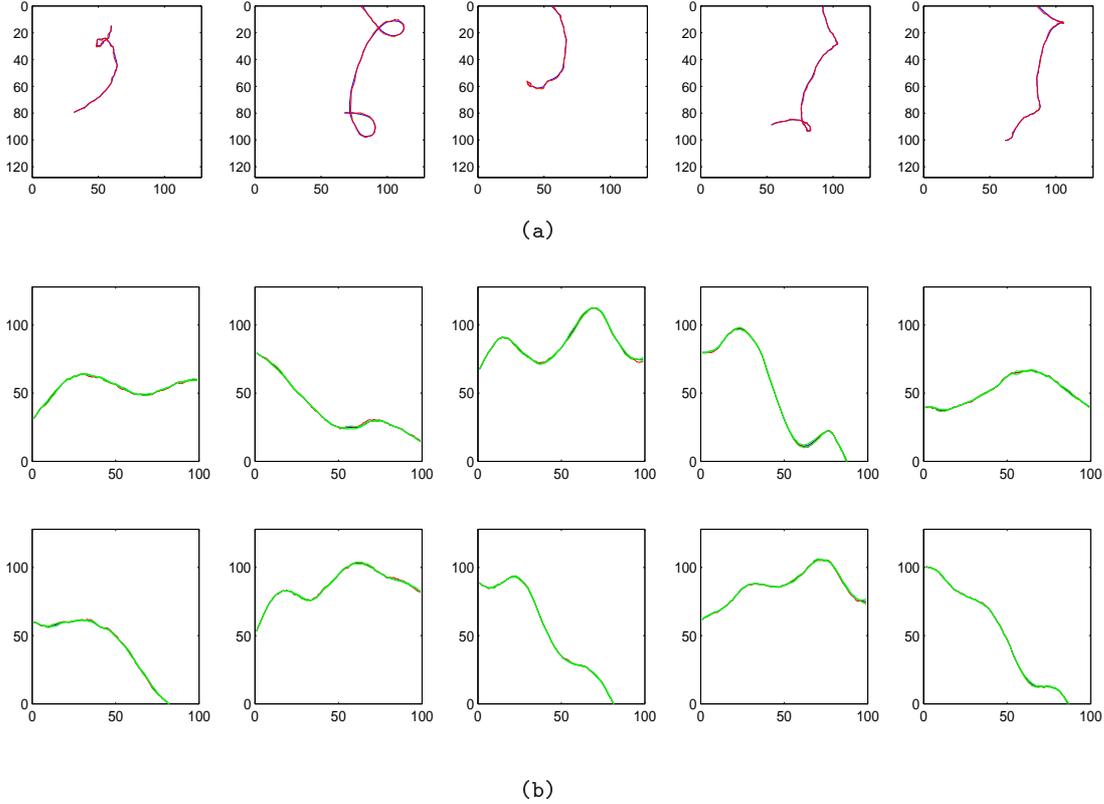


FIG. 8.4: *Résultat de suivi obtenu par la méthode de filtrage non linéaire proposée, moyenné sur 50 filtrages. (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat moyen du suivi en bleu) ; (b) Évolution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état (la dispersion des estimations autour de leur moyenne est affichée en vert).*

Afin de mettre en avant tout l'intérêt d'une modélisation continue de notre problème de filtrage, la méthode de suivi a été testée sur cette même séquence, pour un modèle à espace d'état discret. Dans ce cas, le pas de discrétisation du modèle d'évolution correspond au pas entre deux images. L'équation d'évolution s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{w}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (8.1)$$

où \mathbf{v}_k est un bruit gaussien.

Le résultat du filtrage obtenu à partir de cette modélisation discrète est représenté sur la figure 8.5. Le résultat présenté correspond également à une moyenne sur 50 filtrages. Nous pouvons constater sur la figure 8.5 (a) que les trajectoires estimées des vortex dans le plan image ne suivent pas les vraies trajectoires. D'autre part, la figure 8.5 (b) montre que la dispersion autour des estimations est assez importante. Cette expérience montre combien une modélisation continue du problème est nécessaire dans le cas d'une dynamique de type vorticité-vitesse si l'on souhaite accéder à des résultats précis.

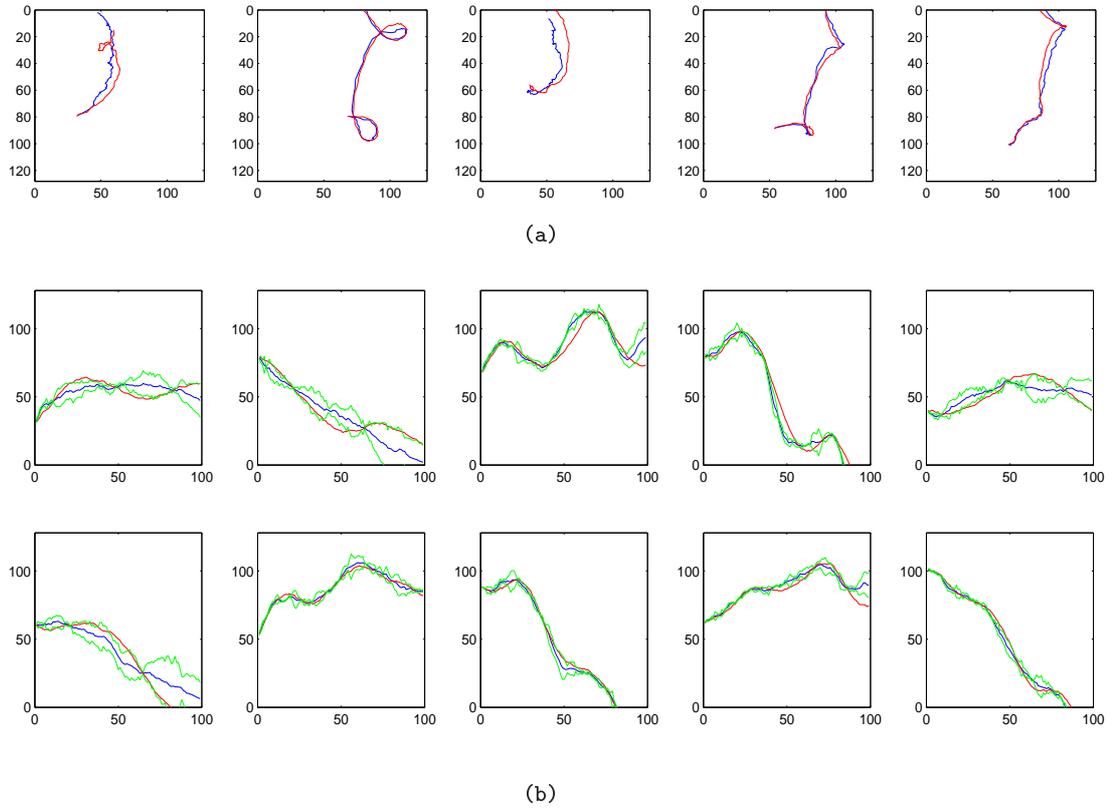


FIG. 8.5: *Résultat de suivi obtenu dans le cas d'une modélisation discrète, moyenné sur 50 filtrages.* (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat moyen du suivi en bleu) ; (b) Évolution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état (la dispersion des estimations autour de leur moyenne est affichée en vert).

Nous présentons sur la figure 8.6 le resultat de la méthode de suivi dans le cas où les observations sont données par des champs de déplacements, comme décrit dans la section 7.1.5. La figure 8.4 montre que les trajectoires estimées coïncident bien avec les trajectoires de la vérité terrain.

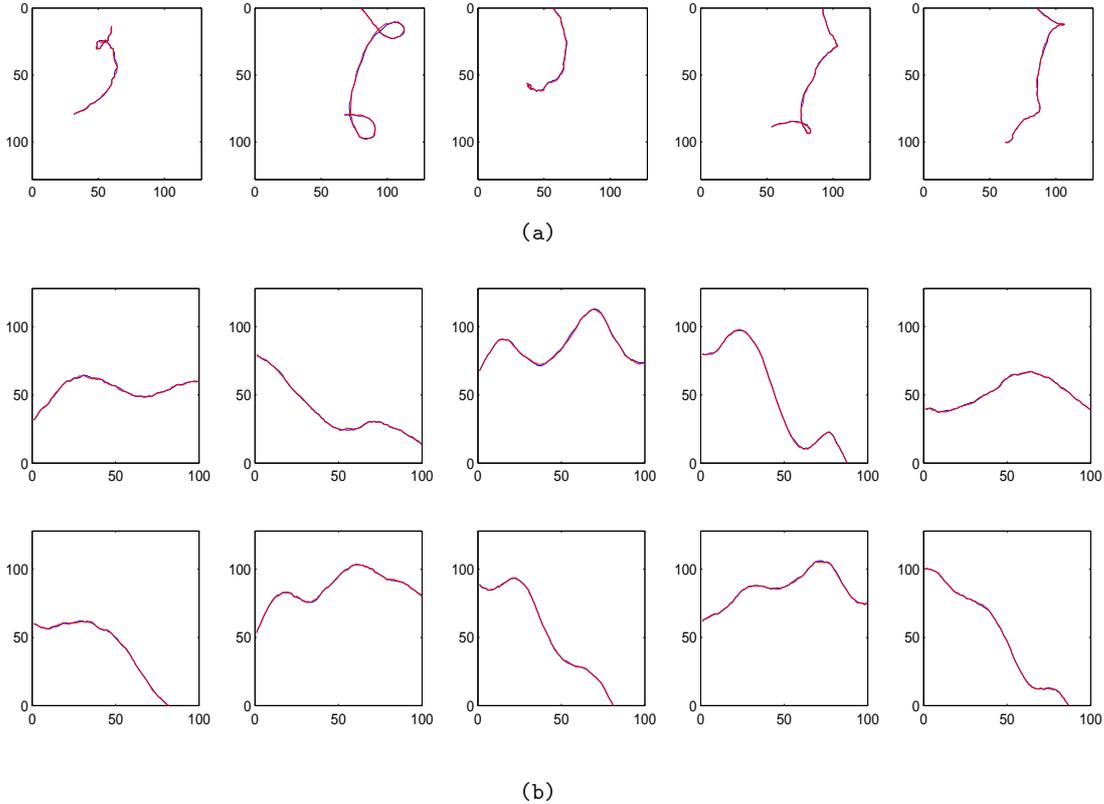


FIG. 8.6: *Résultat de suivi obtenu dans le cas où les observations sont des champs de déplacements.* (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat du suivi en bleu); (b) Évolution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état.

La dernière expérience que nous proposons porte sur la réduction de dimension basée sur les directions stables et instables du système, présentée à la fin du chapitre précédent. Le résultat obtenu par la technique de réduction de dimension formulée par Chorin [37] est comparé au résultat du filtrage présenté sur la figure 8.4, pour le même nombre de trajectoires ($N = 500$). La comparaison des deux méthodes est effectuée en termes d'erreur absolue moyenne d'estimation de la vorticité à chaque instant. Le résultat est présenté sur la figure 8.7. La réduction obtenue est d'un facteur 2, le nombre m de composantes instables déterminées à partir des valeurs propres étant égal à 5. Notons que de manière surprenante, ce facteur 2 se répète systématiquement tout au long de la séquence. Pour une réduction d'un facteur 2, le gain en temps de calcul de la méthode réduite reste négligeable, en raison du coût de calcul lié à la détermination des valeurs propres. Il est cependant intéressant de constater sur la figure 8.7 que la qualité du suivi obtenue par la méthode réduite est comparable au résultat obtenu sans réduction de dimension. Cette observation traduit le fait que l'échantillonnage peut être effectué dans un espace de dimension réduite, pour un résultat d'estimation similaire. Notons enfin que sur l'exemple présenté, la technique de filtrage dans sa version réduite conduit à de meilleurs résultats à certains instants de la séquence. Il serait intéressant de réfléchir à un critère définissant à quels instants la technique de réduction de dimension peut être appliquée, en fonction par exemple d'une

indication sur la fiabilité du modèle d'évolution à cet instant.

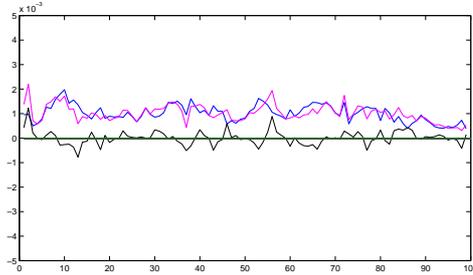


FIG. 8.7: *Comparaison des résultats de la méthode de suivi par filtrage avec et sans réduction de dimension.* L'erreur moyenne d'estimation de la vorticité associée à la méthode de réduction de dimension est tracée en rose, l'erreur associée au résultat présenté sur la figure 8.4 est représentée en bleu. La courbe noire représente l'écart entre les deux.

8.2 Séquence synthétique de turbulence 2D

Nous présentons un deuxième exemple synthétique relatif à l'évolution temporelle d'un écoulement turbulent bidimensionnel. La séquence d'images a été obtenue par simulation de l'équation de Navier-Stokes 2D incompressible par une méthode DNS ¹. Un exemple d'image de la séquence simulée est présenté sur la figure 8.8, et différentes cartes de vorticité correspondant à l'écoulement simulé sont représentés sur la figure 8.9.

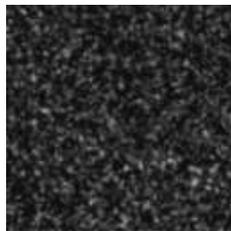


FIG. 8.8: *Exemple d'image de particules de la séquence simulée.*

Dans ce cas, le modèle d'évolution du modèle de filtrage a été initialisé sur la première paire d'images à l'aide de la méthode d'estimation proposée dans la première partie de ce document. L'initialisation a été obtenue au moyen d'un ensemble de 100 particules de vortex. La distribution de vorticité estimée peut être comparée à la vraie vorticité initiale sur la figure 8.9, à l'instant $t_k = 0$. Les champs de déplacements correspondants peuvent également être comparés à partir des figures 8.10 et 8.11. Il a déjà été constaté dans la première partie de ce document que l'estimation paramétrique à l'aide d'un modèle réduit permet de retrouver les structures de grande échelle de vorticité, tandis que les petites échelles de l'écoulement ont tendance à être lissées.

¹La séquence d'images a été fournie par le CEMAGREF de Rennes dans le cadre du projet européen FLUID "Fluid Image Analysis and Description" <http://fluid.irisa.fr>.

La méthode de suivi est appliquée au vecteur d'état construit à partir des 100 particules de vortex, à partir des données initiales estimées sur les deux premières images de la séquence. Les observations discrètes sont extraites de la séquence d'images simulées. Le vecteur d'état étant de taille 200, la résolution du problème de filtrage est plus difficile que dans l'exemple précédent. Le nombre de particules de filtrage nécessaire dans l'algorithme du filtrage particulaire est en théorie très élevé, en raison de l'approximation de type Monte-Carlo des équations du filtrage. Dans la mesure où nous sommes limités en pratique par les ressources calculatoires, nous nous sommes restreints à un ensemble de $N = 1000$ trajectoires.

La figure 8.9 permet de visualiser l'évolution temporelle des cartes de vortacité correspondant à la simulation numérique et l'évolution des cartes estimées par la méthode de suivi proposée. Le vecteur d'état ne permettant qu'une représentation des grandes échelles de l'écoulement, la technique de filtrage ne permet pas de suivre les structures fines de vortacité. Néanmoins, nous pouvons constater sur cette figure que les principaux vortex de l'écoulement sont correctement suivis. L'évolution temporelle du vortex situé en bas à droite de l'image au temps $t_k = 0$ peut par exemple être observée. Sa trajectoire est correctement suivie tout au long de la séquence.

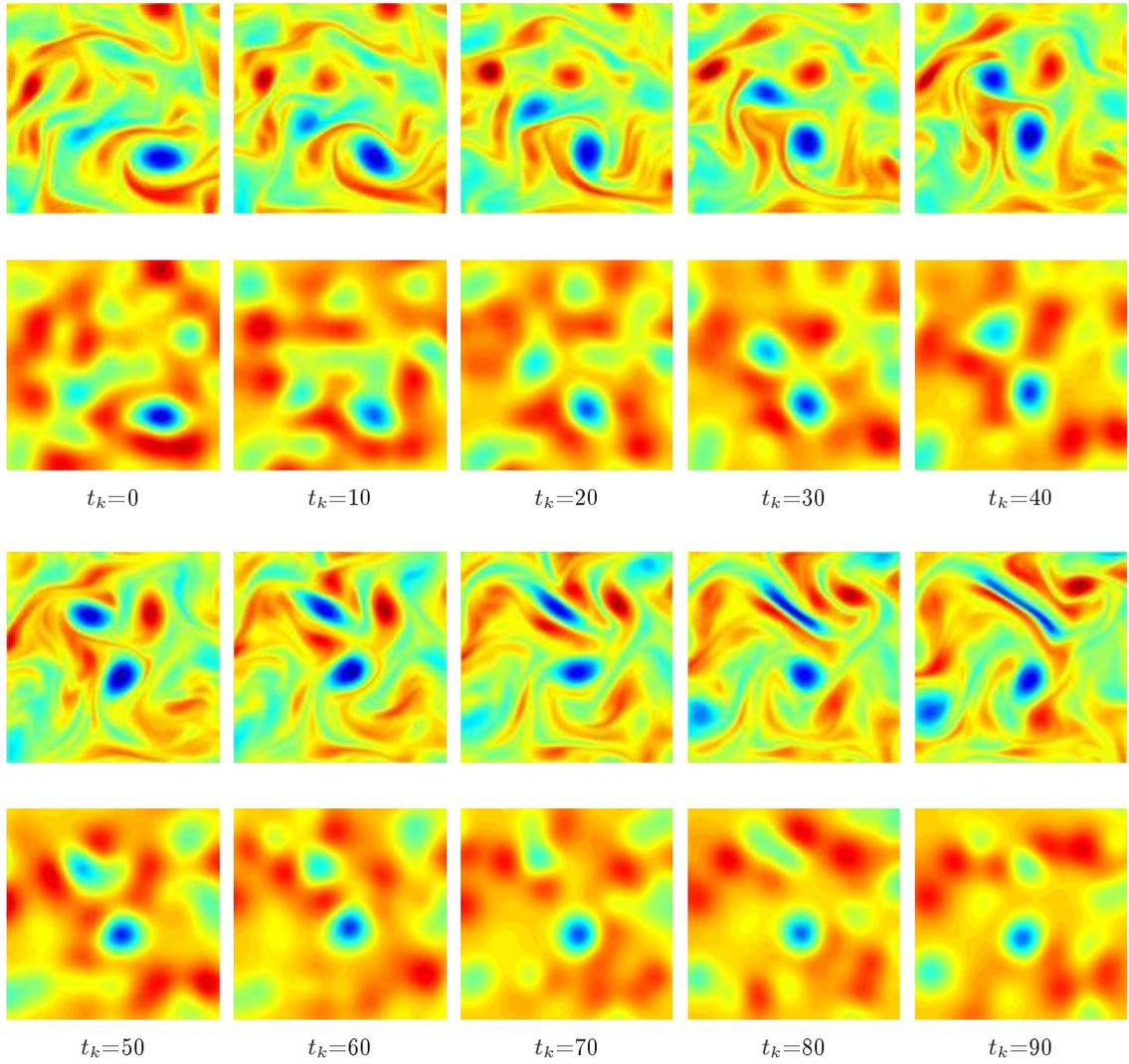


FIG. 8.9: *Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des cartes de vorticité.* Pour chaque instant, la vérité terrain est présentée sur la première ligne, le résultat du suivi sur la deuxième.

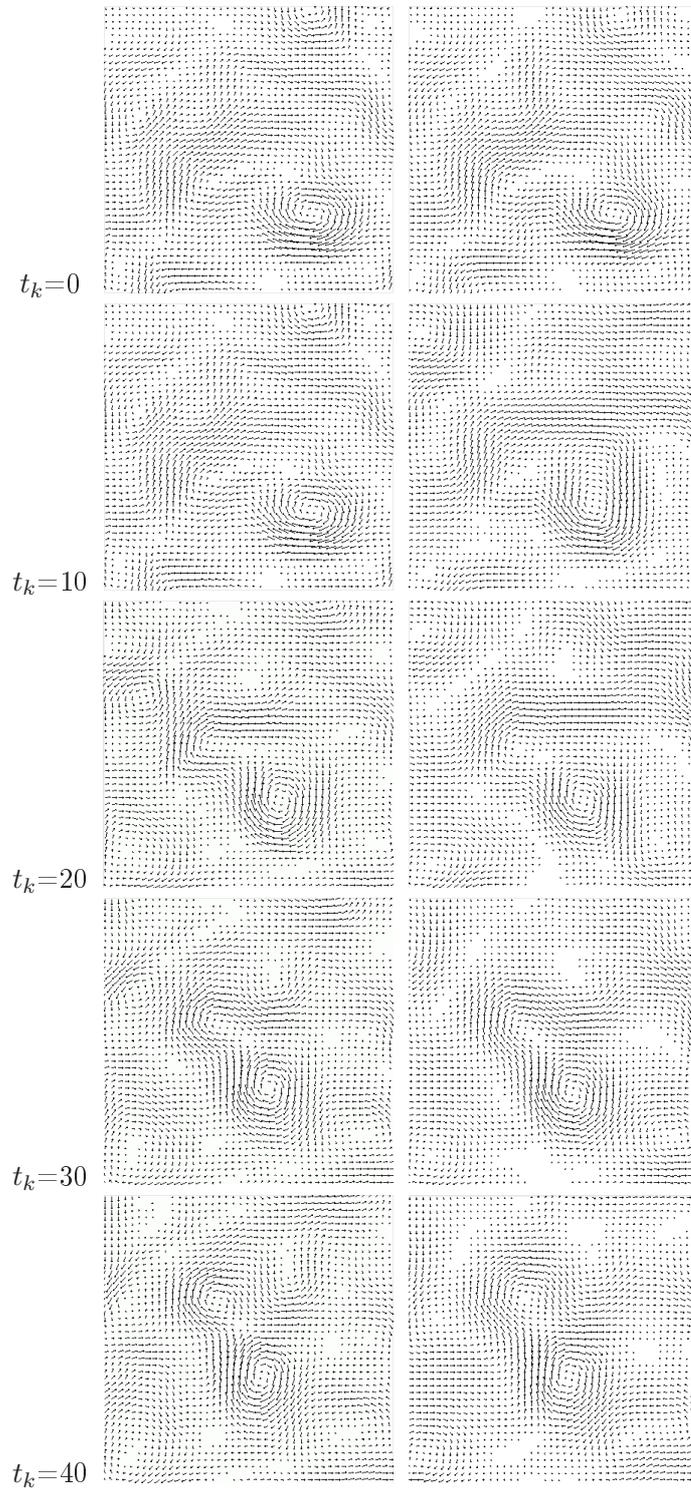


FIG. 8.10: *Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des champs de déplacements.* Pour chaque instant, la vérité terrain est présentée sur la première colonne, le résultat du suivi sur la deuxième.

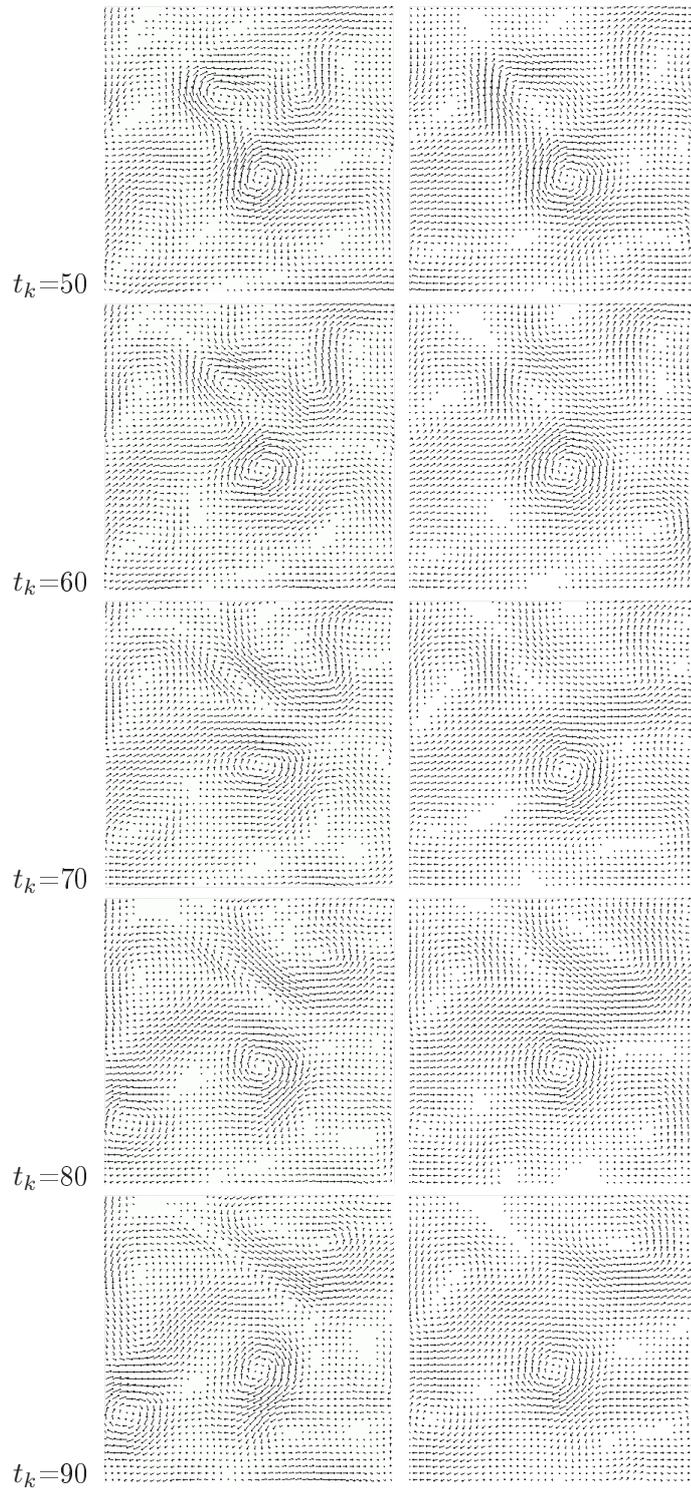


FIG. 8.11: *Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des champs de déplacements.* Pour chaque instant, la vérité terrain est présentée sur la première colonne, le résultat du suivi sur la deuxième.

Une analyse quantitative du résultat du suivi est présentée sur la figure 8.12. Cette figure décrit l'évolution temporelle des erreurs de vorticité absolue moyennées sur l'image, calculées entre la vraie vorticité et la vorticité estimée par la méthode de filtrage. Cette courbe d'erreur peut être comparée à l'évolution temporelle de l'erreur d'estimation obtenue par une simple prédiction du modèle. L'erreur moyenne d'estimation de la vorticité est loin d'être négligeable par rapport à la vorticité absolue moyenne sur cette séquence. Nous pouvons cependant noter que la méthode de suivi apporte une amélioration notable par rapport au résultat donné par une simple prédiction du modèle réduit.

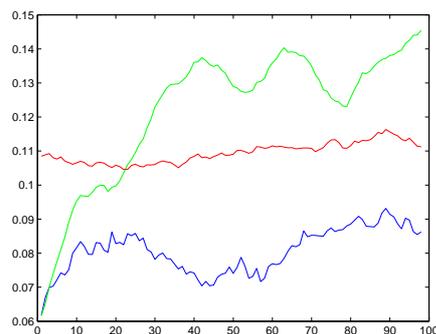


FIG. 8.12: *Évolution temporelle de l'erreur absolue de vorticité moyennée sur l'image.* L'erreur d'estimation consécutive à une simple propagation du modèle d'évolution est tracée en vert, l'erreur d'estimation de la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu. La vorticité absolue moyenne correspondant à la vérité terrain est tracée en rouge.

8.3 Application en mécanique des fluides expérimentales

La méthode de suivi a été testée sur une séquence d'images réelles. Cette séquence de tomographie laser montre l'évolution d'un vortex généré au bout d'une aile d'avion². La séquence est reproduite en partie sur la figure 8.13.

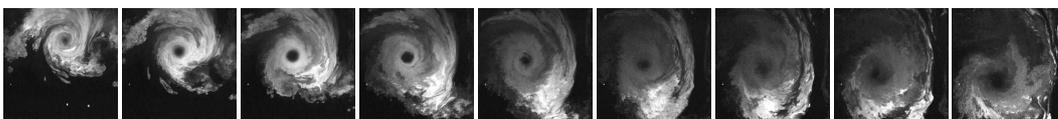


FIG. 8.13: *Séquence d'images montrant l'évolution d'un vortex généré au bout d'une aile d'avion.*

L'initialisation du modèle est réalisée sur la première paire d'images de la séquence. La distribution de vorticité initiale est décrite par un ensemble de 15 particules de vortex. La carte de vorticité et le champ de déplacements initiaux sont visibles sur la figure 8.14 pour $t_k = 0$.

L'ensemble de la figure 8.14 montre le résultat obtenu par simple simulation du modèle d'évolution réduit construit à partir de cette initialisation. Nous pouvons constater qu'une

²La séquence a été fournie par l'ONERA (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales).

simple propagation du modèle dynamique ne permet pas de suivre correctement l'évolution du vortex sur toute la séquence. Dès l'instant $t_k = 20$, la forme du vortex est mal restituée. Le champ de déplacements prédit est décalé par rapport au centre du vortex observé dans l'image. Par la suite, les champs de déplacements prédits présentent des élongations qui ne correspondent pas au phénomène observé. La trajectoire du vortex est complètement erronée dans la partie finale de la séquence.

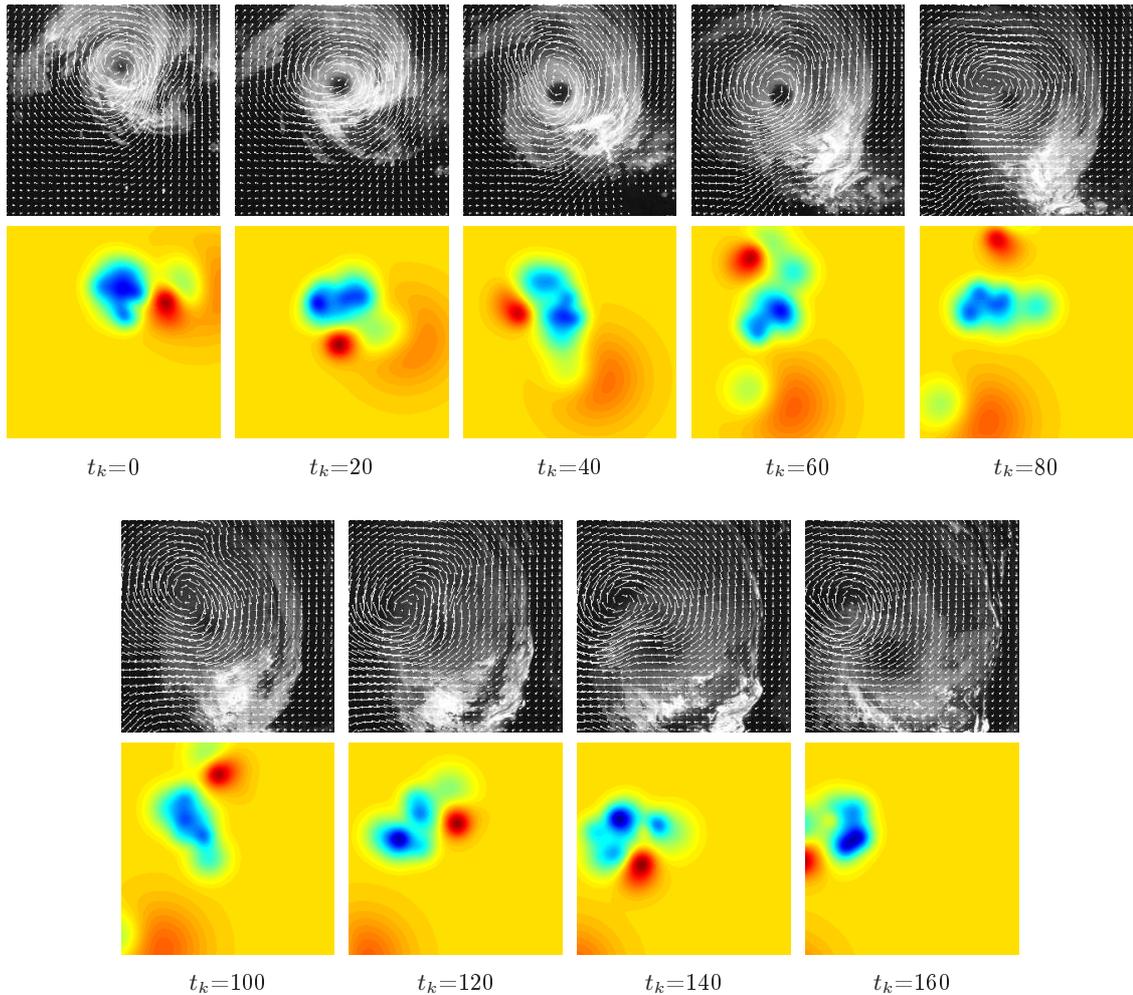


FIG. 8.14: *Résultat du suivi de vortex sur la séquence ONERA par simple propagation du modèle d'évolution.*

La figure 8.15 expose la solution obtenue par la méthode de suivi, pour $N = 1000$ trajectoires dans l'algorithme de filtrage. Cette solution semble visuellement satisfaisante. Le mouvement du vortex est bien reconstruit à chaque instant, et sa trajectoire est correctement suivie jusqu'à la fin de la séquence. Nous pouvons notamment observer que la diffusion du vortex dans la deuxième moitié de la séquence est bien représentée par les champs de déplacements estimés. La déformation du mouvement de rotation estimé suit les contours photométriques de l'image. L'évolution des cartes de vorticité associées montre

une diffusion spatiale des positions des particules de vortex. La diffusion du vortex est décrite par le fait que la zone de vorticité associ e est moins concentr e spatialement.

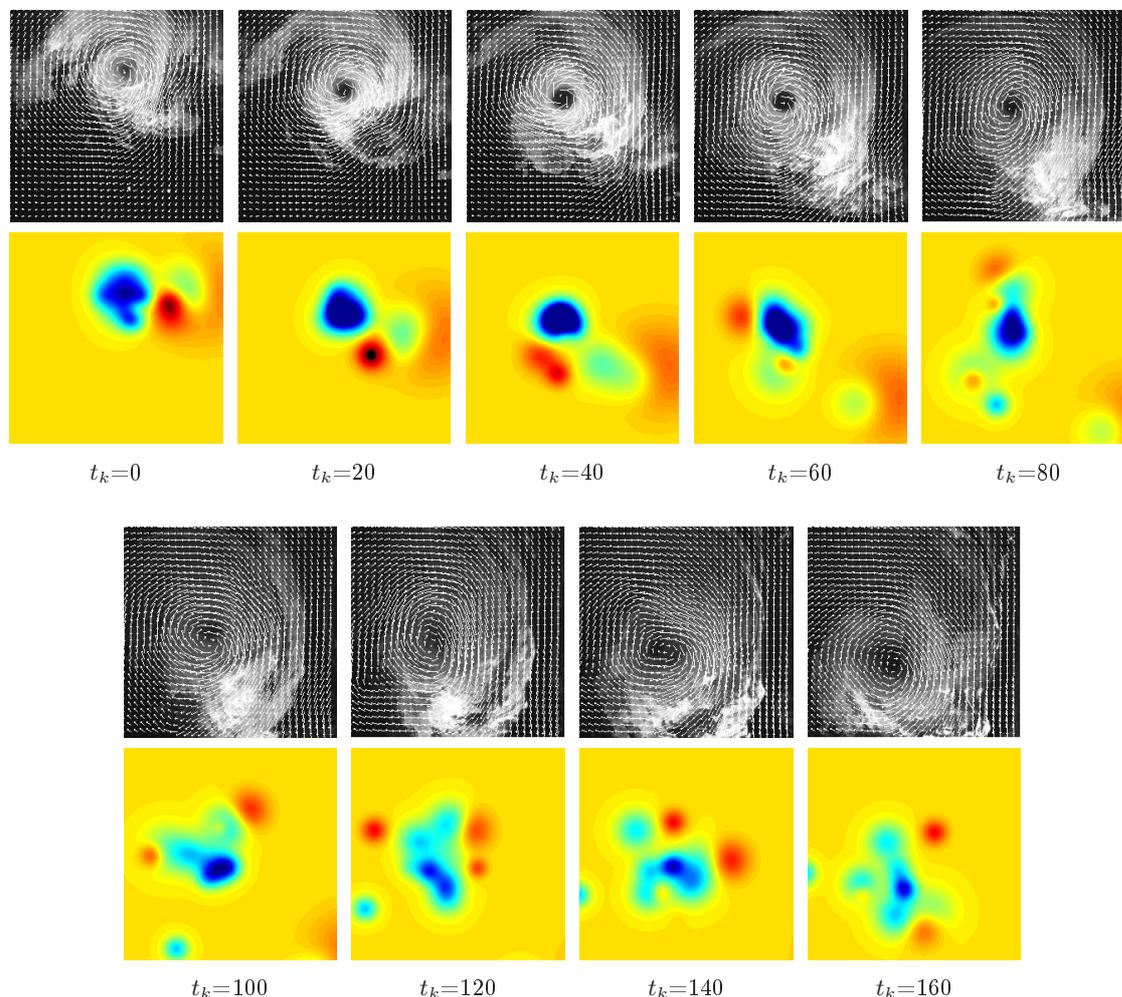


FIG. 8.15: *Résultat du suivi de vortex sur la séquence ONERA par la méthode de filtrage propos e.*

Pour ces exemples réels, les vrais champs de déplacements et les cartes de vorticité associ es ne sont pas connus. Une indication sur la qualité des résultats peut néanmoins être donn e en construisant une erreur de reconstruction moyenne sur le domaine image à partir des champs estimés. Cette erreur est définie à tout instant d'observation t_k par $|I_{k+1}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{w}}_{t_k}(\mathbf{x})) - I_k(\mathbf{x})| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$.

L'évolution temporelle de ces erreurs est repr sent e sur la figure 8.16. La qualité du résultat donné par la prédiction peut être comparé au résultat estimé par la méthode de suivi propos e. Le filtrage a été reconduit 20 fois afin de tester la robustesse de la méthode. Le résultat moyen et la dispersion des estimations autour de cette moyenne sont représentés à chaque instant sur la figure. Nous pouvons observer que l'erreur de reconstruction associ e à la prédiction est largement diminu e par la prise en compte des

observations dans le modèle de filtrage. Ceci corrobore la comparaison qualitative effectuée à partir des figures 8.14 et 8.15.

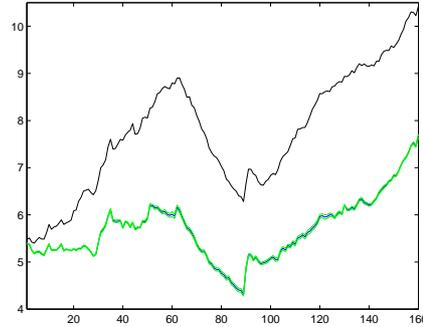


FIG. 8.16: *Évolution temporelle de l'erreur de reconstruction moyenne sur la séquence ONERA.* L'erreur associée à une simple prédiction du modèle est tracée en noir, l'erreur moyenne correspondant à la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu, la dispersion autour de cette moyenne en vert.

8.4 Applications en météorologie

Nous présentons dans cette section un résultat obtenu sur une séquence provenant du canal infrarouge de Météosat³. La série d'images décrit la trajectoire d'un cyclone dans l'Océan Indien. La séquence est représentée en partie sur la figure 8.17.

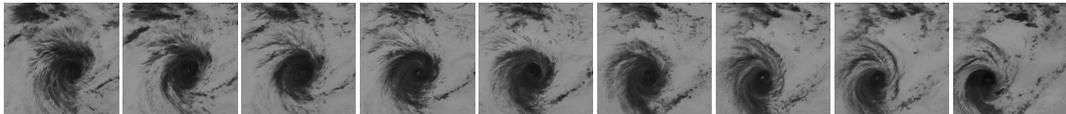


FIG. 8.17: *Séquence d'images montrant l'évolution d'un cyclone dans l'Océan Indien.*

Le résultat du suivi par filtrage est représenté sur la figure 8.18. L'initialisation est décrite par le champ et la distribution de vorticités estimés au temps $t_k = 0$ sur la première paire d'images, à partir d'un ensemble de 15 particules de vortex. Le mouvement de rotation décrit par le cyclone est bien reconstruit et sa trajectoire est correctement suivie jusqu'à la fin de la séquence. L'évolution temporelle de l'erreur de reconstruction moyenne est illustrée sur la figure 8.19.

³La séquence a été fournie par le LMD (Laboratoire de Météorologie Dynamique).

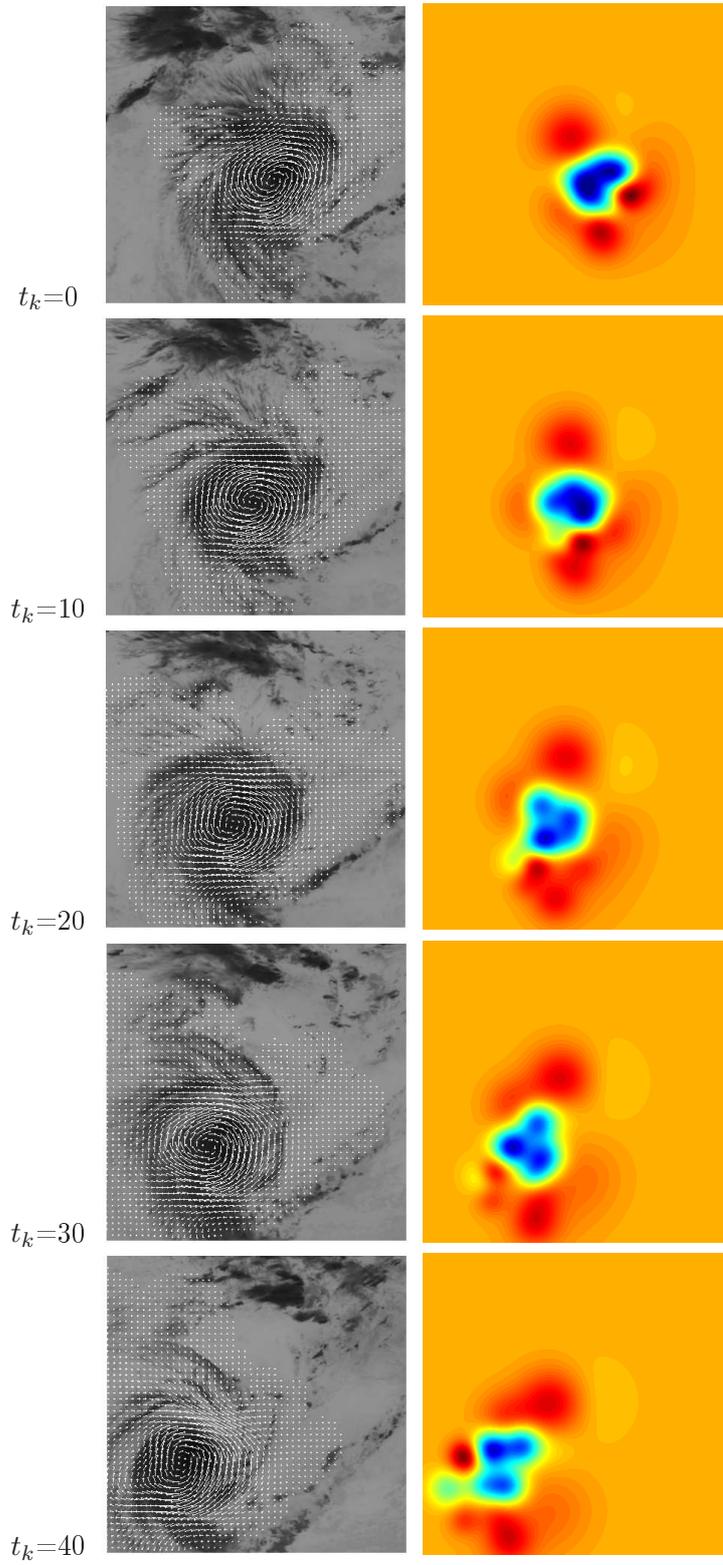


FIG. 8.18: *Résultat du suivi de cyclone par la méthode de filtrage proposée.*

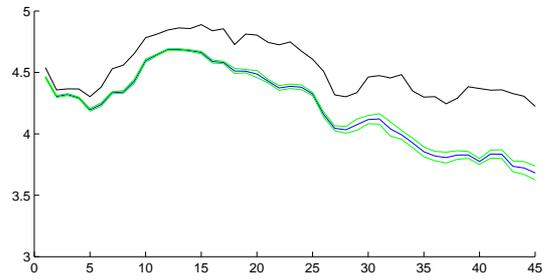


FIG. 8.19: *Évolution temporelle de l'erreur de reconstruction moyenne sur la séquence du cyclone.* L'erreur associée à une simple prédiction du modèle est tracée en noir, l'erreur moyenne correspondant à la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu, la dispersion autour de cette moyenne en vert.

Conclusion

La synthèse des travaux présentés dans le chapitre 5 a mis en avant le fait que le suivi de champs denses de vitesses à partir de séquences d'images décrivant des écoulements fluides est un problème de recherche ouvert. Afin d'améliorer la robustesse et la cohérence temporelle des estimations successives, il est en particulier nécessaire d'intégrer des lois dynamiques physiques dans les méthodes d'estimation.

La méthode que nous avons proposée dans cette deuxième partie se base sur cette idée. En nous plaçant dans le cadre du filtrage stochastique, nous avons formulé le problème de suivi de champs de vitesses comme un problème de filtrage bayésien non linéaire à temps continu-discret.

L'équation d'évolution du modèle de filtrage est définie à partir de la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes. La discrétisation de la vorticité sur un ensemble de fonctions de bases (appelées particules de vortex) conduit à la description du modèle dynamique par une équation différentielle stochastique. Cette équation est construite à partir d'un nombre réduit de particules de vortex et n'est donc qu'une version approchée de l'équation de Navier-Stokes. Cependant, ce modèle dynamique continu apporte une information précieuse sur l'évolution de l'écoulement fluide. Le problème d'estimation des champs de vitesses étant formulée dans un contexte de filtrage bayésien, la faiblesse du modèle peut être corrigée par les observations discrètes extraites de la séquence d'images.

L'équation d'évolution du système et la relation liant les données des images au vecteur d'état étant non linéaires, il est nécessaire de mettre en place une technique de filtrage adaptée. Le filtrage particulaire formulé dans un cadre continu-discret apporte une réponse à ce problème. Il est alors possible d'estimer les champs de vitesses à tous les instants d'observations, et de prédire l'évolution de ces champs de manière continue entre ces intervalles de temps. La mise en place du filtrage particulaire étant limitée à des espaces d'état de taille réduite, une méthode de réduction de dimension du problème de filtrage a été envisagée. Le principe de cette approche est de réaliser l'échantillonnage des trajectoires dans un espace de taille restreint.

Les résultats présentés dans le dernier chapitre ont montré que la méthode de suivi conduit à des résultats robustes et cohérents dans le temps sur des séquences synthétiques et réelles lorsque les champs de déplacements caractérisant l'écoulement peuvent être décrits par un nombre raisonnable de particules de vortex. Dans le cas contraire, la résolution du problème de filtrage est difficile en raison des ressources de calcul nécessaires. Pour un tel écoulement complexe, nous avons pu constater qu'il est néanmoins possible de représenter l'évolution des grandes échelles de l'écoulement de manière cohérente. L'approche de réduction de dimension envisagée, basée sur les instabilités du système dynamique, est à approfondir. Un gain de calcul peut être espéré si le degré de réduction est important. Sur

l'exemple synthétique traité, la réduction d'un facteur 2 ne compense pas le coût de calcul lié à la détermination des directions stables et instables. Néanmoins le résultat obtenu est intéressant car la qualité des résultats obtenus avec ou sans réduction est similaire. En outre, il semble envisageable d'améliorer les résultats du suivi en n'utilisant la technique de réduction de dimension qu'à des instants donnés de la séquence, déterminés selon un critère à définir.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce document, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation cohérente de champs denses de vitesses d'écoulements fluides à partir de séquences d'images.

Dans une première partie notre intérêt s'est porté sur la définition d'un nouvel estimateur paramétrique de mouvement. Cet estimateur permet d'estimer une représentation de faible dimension d'un champ de déplacements à partir d'une paire d'images. La paramétrisation repose sur la discrétisation de la vorticité et la divergence du champ de déplacements par un ensemble de fonctions de base de natures différentes, appel es particules de vortex et de source. La représentation compacte obtenue est interprétable physiquement puisqu'elle correspond aux composantes à grande échelle du déplacement. Outre cette représentation simplifi e, l'estimateur développé permet également l'estimation précise du champ de vitesses, pour un nombre de paramètres plus grand. Enfin, la méthode propos e autorise l'estimation du déplacement dans des zones très localis es.

La deuxième partie du document traite du problème de suivi temporel des champs de déplacements. Une succession d'estimations des champs de déplacements à partir des paires d'images consécutives de la séquence est facilement mise en échec dès que les images sont bruit es ou lorsque les déplacements sont de grande amplitude et chaotiques. L'introduction d'une loi dynamique physique dans les méthodes d'estimation de champs denses de vitesses à partir de séquences d'images permet alors d'améliorer la robustesse et la cohérence temporelle des estimations. Partant de cette constatation, des contributions très récentes ont ainsi été propos es. Les méthodes d'estimation dense, bas es sur une régularisation spatiale des champs de déplacements, ont ainsi été étendues de manière à intégrer une régularisation temporelle, contrainte par la formulation vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes. Parallèlement, des méthodes de suivi de champs de déplacements bas es sur des techniques d'assimilation variationnelle (et li es à des concepts de contrôle optimal) ont été d velopp es. Ces approches permettent de reconstruire les champs de déplacements tout au long de la séquence, en garantissant la cohérence temporelle de la solution grâce au modèle dynamique sous-jacent. Dans ce contexte, il n'y a aucune restriction sur la dimension du vecteur d' tat. En contrepartie, la méthode repose sur une hypothèse gaussienne, qui peut s'avérer trop restrictive dans certains cas.

L'approche que nous avons propos e dans la deuxième partie de ce document ne repose quant à elle sur aucune hypothèse gaussienne ou de linéarité du modèle. L'estimation des champs de vitesses le long de la séquence d'images est formul e comme un problème de filtrage bayésien non linéaire. La connaissance sur la loi dynamique physique du système est introduite dans le modèle, en tenant compte de sa nature continue. Le principe est alors de décrire l'état du système par une densité de probabilité plutôt qu'une valeur moyenne. Ainsi, la non linéarité du système est pleinement prise en compte. Cet aspect est crucial car

si le système est non linéaire ou chaotique, une distribution gaussienne ne sera pas préservée au cours du temps, et l'évolution d'une distribution multimodale sera mal décrite.

L'inconvénient de cette approche probabiliste est liée à la restriction imposée sur la dimension du vecteur d'état. Le problème de suivi de champs dense de vitesses étant caractérisé par un vecteur d'état de très grande dimension (correspondant initialement à la taille de l'image), la mise en place d'un suivi par filtrage non linéaire impose de se baser sur une représentation réduite de cet état. L'utilisation de la forme réduite basée sur les particules de vortex et proposée dans la première partie de ce document est une première réponse au problème. En effet, la méthode de suivi s'est montrée très efficace pour des écoulements dont les champs de déplacements peuvent être décrits par un nombre raisonnable de particules de vortex. Pour des écoulements plus complexes nécessairement décrits par un espace d'état de taille élevée, il est nécessaire d'envisager des méthodes alternatives. En effet, nous avons pu constater que les résultats obtenus sur de telles séquences sont prometteurs mais que le problème de suivi n'est pas complètement résolu dans ce cas. L'approche de réduction de dimension envisagée, basée sur les instabilités du système dynamique, est à approfondir.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses, liées à l'amélioration ou à l'extension des contributions proposées dans ce document.

Dans la continuité de la première partie, il est naturel de s'intéresser à l'extension en dimension 3 de la méthode d'estimation de champs de vitesses. La loi de Biot-Savart reliant la vorticité et la divergence aux composantes solénoïdale et irrotationnelle du champ de déplacement s'écrit de manière similaire, en modifiant l'expression du noyau de Green. La difficulté majeure est que contrairement à la divergence, la vorticité devient vectorielle en 3D. L'extension des particules de vortex est alors loin d'être triviale, et deux approches sont utilisées dans les méthodes de simulation d'écoulements tridimensionnels. Il est possible de considérer que les particules sont centrées en des points (comme en 2D) et transportent des vecteurs. Inversement, il est possible de définir les éléments de calcul comme étant des courbes transportant des quantités scalaires. L'estimation de la composante irrotationnelle en 3D peut donc être envisagée comme une extension directe de la méthode proposée, mais le traitement de la composante solénoïdale est beaucoup plus complexe.

Afin d'améliorer la méthode de suivi proposée dans la seconde partie de ce document, les perspectives de travail sont principalement liées à la gestion de la grande dimension du problème. L'approche de réduction de dimension envisagée doit être approfondie afin de mieux comprendre les résultats et de l'utiliser à bon escient, en vue d'accroître la qualité des estimations.

Le problème de la dimension étant lié au nombre de trajectoires à échantillonner dans l'algorithme du filtrage particulaire, une partie du problème a été résolue en réduisant la taille du vecteur d'état associé au suivi de champ de vitesses. Lorsque l'écoulement est complexe, la dimension du vecteur d'état ne peut cependant pas être réduite outre mesure. Afin de diminuer le nombre de trajectoires à simuler, il serait intéressant de réfléchir au moyen de simuler le processus de diffusion conditionnellement aux observations à venir, et ceci de manière simple (en évitant notamment des propagations "avant-arrière"). Notons enfin que pour un nombre de trajectoires donné, une réduction du temps de calcul est possible en parallélisant l'algorithme du filtrage particulaire (hormis l'étape de rééchantillonnage). Ce travail est en cours de développement et devrait permettre de tester les

performances de la méthode de suivi sur des exemples plus complexes.

La technique de suivi proposée étant adaptée au suivi de représentations de taille réduite des champs de vitesses, il serait intéressant d'envisager un suivi temporel basé sur d'autres modèles réduits existants. Ainsi, la décomposition POD en modes propres ou une décomposition en ondelettes pourraient être intégrées à la méthode de suivi par filtrage proposée. L'objectif serait alors de suivre les modes principaux de ces décompositions au cours du temps, correspondant aux structures à grande échelle de l'écoulement.

Enfin, l'utilisation des méthodes de type Kalman d'ensemble pour la résolution de notre problème est à envisager, en réfléchissant sur leur capacité à appréhender une relation fortement non linéaire entre l'état et la mesure du système. Une perspective de travail plus générale serait de réfléchir à la construction de méthodes de suivi alliant les avantages des méthodes variationnelles aux avantages des méthodes probabilistes séquentielles.

Liste des figures

1.1	Décomposition de Helmholtz d'un champ de vecteurs. (a) Composante irrotationnelle; (b) Composante solénoïdale; (c) Somme des deux composantes.	18
3.1	Comparaison entre le module du noyau K original et sa version K_ϵ lissée par une gaussienne pour des valeurs d' ϵ proches de 0.	35
3.2	Exemple de représentation paramétrique d'un mouvement fluide. (a) Champ de vecteurs décrit par une combinaison de particules de vortex et de source; (b) Carte de vortacité correspondante; (c) Carte de divergence correspondante.	37
4.1	<i>Exemple synthétique.</i> (a) Image PIV; (b) Champ de vecteurs paramétrique; (c) Carte de vortacité (vortacité absolue moyenne = $1.5 \cdot 10^{-3}$); (d) Carte de divergence (divergence absolue moyenne = $1.5 \cdot 10^{-3}$).	47
4.2	<i>Résultat en connaissant les positions des particules.</i> (a) Mouvement estimé; (b) Vortacité estimée (valeur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-4}$); (c) Divergence estimée (valeur absolue moyenne = $1.3 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $2.7 \cdot 10^{-4}$).	48
4.3	<i>Résultat avec des positions initiales des particules perturbées.</i> (a) Déplacement estimé; (b) Les positions initiales des particules de vortex sont indiquées en blanc, leurs positions à la fin de l'algorithme en noir; (c) Vortacité estimée (valeur absolue moyenne = $1.4 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $3.4 \cdot 10^{-4}$); (d) Positions initiales et finales des particules de source; (e) Divergence estimée (valeur absolue moyenne = $1.3 \cdot 10^{-3}$, erreur absolue moyenne = $5.3 \cdot 10^{-4}$).	49
4.4	Évolution de l'estimation des cartes de vortacité et divergence au fil des itérations du schéma en deux étapes (<i>estimation de la vortacité ou divergence portée par chaque particule / ajustement des centres par la procédure mean shift</i>).	49
4.5	<i>Exemple synthétique obtenu par DNS (Direct Numerical Simulation).</i> (a) Image PIV; (b) Champ de déplacements synthétiques obtenu par simulation de l'équation de Navier-Stokes; (c) Carte de vortacité (vortacité absolue moyenne = 0.0117).	50
4.6	<i>Résultat obtenu par une méthode d'estimation dense dédiée aux fluides [44]</i> (a) Champ de vecteurs estimé; (b) Carte de vortacité associée (vortacité absolue moyenne = 0.0172, erreur absolue moyenne = 0.012).	51

4.7	<i>Résultat avec un grand nombre de particules de vortex</i> (a) Composante de transport estimée; (b) Champ de vecteurs solénoïdal estimé; (c) Champ de vecteurs complet, somme des composantes solénoïdale et de transport; (d) Carte de vortacité (vortacité absolue moyenne = 0.0159, erreur absolue moyenne = 0.0106).	52
4.8	<i>Résultat avec un nombre minimal de particules de vortex</i> (a) Composante de transport estimée; (b) Champ de vecteurs solénoïdal estimé; (c) Champ de vecteurs complet, somme des composantes solénoïdale et de transport; (d) Carte de vortacité (vortacité absolue moyenne = 0.011, erreur absolue moyenne = 0.0091).	53
4.9	<i>Écoulement 2D turbulent.</i> (a) Vrai champ de déplacements; (b) Carte de vortacité (vortacité absolue moyenne = 0.0639); (c) Champ de déplacements estimé par une méthode dense dédiée [44]; (d) Carte de vortacité associée (vortacité absolue moyenne = 0.0663, erreur absolue moyenne = 0.0286); (e) Champ de déplacements estimé par la technique proposée; (f) Carte de vortacité associée (vortacité absolue moyenne = 0.062, erreur absolue moyenne = 0.0363).	55
4.10	<i>Lignes de contours de vortacité (pour $\text{curl } \mathbf{w} = 0.08$).</i> (a) Contours de référence; (b) Contours associés à la méthode dense; (c) Contours pour l'estimateur paramétrique.	56
4.11	<i>Profils de vortacité le long de deux lignes (représentées sur les images de gauche).</i> Les courbes verte, rouge et bleue représentent respectivement les profils de vortacité pour l'estimateur paramétrique, l'estimateur dense et le vrai champ de déplacements.	56
4.12	Météosat image, infrared channel.	57
4.13	<i>Résultat sur une séquence du canal infrarouge de Météosat.</i> (a) Image de la dépression sur l'Atlantique Nord; (b) Composante de transport estimée; (c) Composante solénoïdale estimée; (d) Carte de vortacité correspondante.	58
4.14	<i>Résultat sur des images du canal vapeur d'eau de Météosat.</i> (a)-(b) Première et deuxième images; (c) Composante de transport estimée; (d) Composante irrotationnelle estimée.	59
4.15	<i>Illustration de l'ajustement des positions des particules.</i> (a) Les positions initiales des particules sont tracées en blanc sur l'image, les positions finales en noir; (b) Évolution de la carte de divergence estimée (convergence après 3 itérations).	59
4.16	<i>Vortex générés au bout d'une aile d'avion</i> (a) Cartes de vortacité estimées à partir d'un ensemble de 15 particules de vortex, superposées sur les images à des instants successifs; (b) Champs de déplacement estimés.	60
4.17	<i>Évolution d'une lésion de sclérose en plaques</i> (a) Coupe au temps t_0 ; (b) Coupe correspondante au temps t_0+6 mois; (c)-(d) Zoom centré sur la lésion.	61
4.18	(a) Déplacement automatique des particules de source vers la région d'intérêt. Les points noirs représentent les positions initiales, les points blancs les positions finales; (b) Zoom sur le champ divergent estimé, centré sur la lésion; (c) Image recalée (image au temps t_0+6 mois recalée vers l'image t_0).	61

4.19	(a) Différence entre les deux images après le recalage rigide ; (b) Différence après le recalage non rigide. L'accroissement de la lésion a été capté par le recalage non rigide.	62
6.1	Graphe de dépendances du modèle à espace d'état discret.	78
7.1	Graphe de dépendances du modèle de filtrage.	100
8.1	<i>Exemple de deux réalisations obtenues par simulation du modèle construit à partir de 5 particules de vortex.</i> (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la réalisation correspondant à la vérité terrain est tracée en rouge) ; (b) Évolution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état.	108
8.2	<i>Évolution temporelle des cartes de vorticité associ�es à deux réalisations distinctes du modèle.</i> (a)Vérité terrain ; (b)Autre réalisation simul�e.	108
8.3	<i>Exemple d'image de particules utilis�e pour créer la séquence synthétique.</i>	109
8.4	<i>Résultat de suivi obtenu par la méthode de filtrage non linéaire propos�e, moyenné sur 50 filtrages.</i> (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat moyen du suivi en bleu) ; (b) �volution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état (la dispersion des estimations autour de leur moyenne est affich�e en vert).	110
8.5	<i>Résultat de suivi obtenu dans le cas d'une modélisation discrète, moyenné sur 50 filtrages.</i> (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat moyen du suivi en bleu) ; (b) �volution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état (la dispersion des estimations autour de leur moyenne est affich�e en vert).	111
8.6	<i>Résultat de suivi obtenu dans le cas où les observations sont des champs de déplacements.</i> (a) Trajectoires des 5 particules de vortex dans le plan image (la vérité terrain est tracée en rouge, le résultat du suivi en bleu) ; (b) �volution temporelle des 10 composantes du vecteur d'état.	112
8.7	<i>Comparaison des résultats de la méthode de suivi par filtrage avec et sans réduction de dimension.</i> L'erreur moyenne d'estimation de la vorticité associ�e à la méthode de réduction de dimension est tracée en rose, l'erreur associ�e au résultat présenté sur la figure 8.4 est repr�sent�e en bleu. La courbe noire représente l'écart entre les deux.	113
8.8	<i>Exemple d'image de particules de la séquence simul�e.</i>	113
8.9	<i>Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des cartes de vorticité.</i> Pour chaque instant, la vérité terrain est pr�sent�e sur la première ligne, le résultat du suivi sur la deuxième.	115
8.10	<i>Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des champs de déplacements.</i> Pour chaque instant, la vérité terrain est pr�sent�e sur la première colonne, le résultat du suivi sur la deuxième.	116
8.11	<i>Résultat du suivi de turbulence bidimensionnelle par filtrage : comparaison des champs de déplacements.</i> Pour chaque instant, la vérité terrain est pr�sent�e sur la première colonne, le résultat du suivi sur la deuxième.	117

8.12	<i>Évolution temporelle de l'erreur absolue de vortacité moyennée sur l'image.</i> L'erreur d'estimation consécutive à une simple propagation du modèle d'évolution est tracée en vert, l'erreur d'estimation de la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu. La vortacité absolue moyenne correspondant à la vérité terrain est tracée en rouge.	118
8.13	<i>Séquence d'images montrant l'évolution d'un vortex généré au bout d'une aile d'avion.</i>	118
8.14	<i>Résultat du suivi de vortex sur la séquence ONERA par simple propagation du modèle d'évolution.</i>	119
8.15	<i>Résultat du suivi de vortex sur la séquence ONERA par la méthode de filtrage proposée.</i>	120
8.16	<i>Évolution temporelle de l'erreur de reconstruction moyenne sur la séquence ONERA.</i> L'erreur associée à une simple prédiction du modèle est tracée en noir, l'erreur moyenne correspondant à la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu, la dispersion autour de cette moyenne en vert.	121
8.17	<i>Séquence d'images montrant l'évolution d'un cyclone dans l'Océan Indien.</i>	121
8.18	<i>Résultat du suivi de cyclone par la méthode de filtrage proposée.</i>	122
8.19	<i>Évolution temporelle de l'erreur de reconstruction moyenne sur la séquence du cyclone.</i> L'erreur associée à une simple prédiction du modèle est tracée en noir, l'erreur moyenne correspondant à la méthode de filtrage proposée est tracée en bleu, la dispersion autour de cette moyenne en vert.	123

Bibliographie

- [1] R. ADRIAN : Twenty years of particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 39:159–169, août 2005.
- [2] D.L. ALSPACH et H.W. SORENSON : Non linear Bayesian estimation using Gaussian sum approximation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 17:439–447, 1972.
- [3] L. ALVAREZ, J. WEICKERT et J. SANCHEZ : Reliable estimation of dense optical flow fields with large displacements. *Int. J. Computer Vision*, 39(1):41–56, 2000.
- [4] A. AMINI : A scalar function formulation for optical flow. *In Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, pages 125–131, 1994.
- [5] B.D.O. ANDERSON et J.B. MOORE : *Optimal filtering*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1979.
- [6] R.M. ANDERSON et R.M. RAY : *Infectious Diseases of Humans : Transmission and Control*. Oxford University Press, 1991.
- [7] C. ANDRIEU et S.J. GODSILL : A particle filter for model based audio source separation. *In Int. Work. on ICA and Blind Signal Separation (ICA 2000)*, Helsinki, Finland, 2000.
- [8] E. ARNAUD : Méthodes de filtrage pour du suivi dans des séquences d’images - application au suivi de points caractéristiques. Thèse de l’université de Rennes I, Nov. 2004.
- [9] E. ARNAUD et E. MÉMIN : Partial linear Gaussian models for tracking in image sequences using sequential Monte Carlo methods. *to appear, Int. J. Computer Vision (IJCV)*, 2006.
- [10] E. ARNAUD, E. MÉMIN et B. CERNUSCHI-FRIAS : Conditional filters for image sequence based tracking - application to point tracking. *IEEE Trans. on Image Processing*, 14(1):63–79, 2005.
- [11] E. ARNAUD, E. MÉMIN, R. SOSA et G. ARTANA : A fluid motion estimator for Schlieren imaging velocimetry. *In Proc. European Conf. Comp. Vision (ECCV’06)*, Graz, Austria, May 2006.
- [12] N. AZZABOU, N. PARAGIOS et F. GUICHARD : Application of particle filtering to image enhancement. Rapport technique 05-18, CERTIS, ENPC, Dec 2005.
- [13] Y. BAR-SHALOM et X.R. LI : *Multitarget-multisensor tracking : Principles and techniques*. YBS Publishing, 1995.
- [14] Y. BAR-SHALOM, X.R. LI et T. KIRUBARAJAN : *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2002.

- [15] J. BARRON, D. FLEET et S. BEAUCHEMIN : Performance of optical flow techniques. *Int. J. Computer Vision*, 12(1):43–77, 1994.
- [16] A. BARTOLI et A. ZISSERMAN : Direct estimation of non-rigid registrations. *In Proceedings of the 15th British Machine Vision Conference, London, UK*, volume II, pages 899–908, Sept 2004.
- [17] J. T. BEALE et A. MAJDA : High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels. *J. Comp. Phys.*, 58:188–208, 1985.
- [18] A.F. BENNET : *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge University Press, 1992.
- [19] D. BÉRÉZIAT, I. HERLIN et L. YOUNES : A generalized optical flow constraint and its physical interpretation. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, volume 2, pages 487–492, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.
- [20] G. BERKOOZ, P. HOLMES et J. LUMLEY : The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review Fluid Mechanics*, 25:539–575, 1993.
- [21] L. BERTINO, G. EVENSEN et H. WACKERNAGEL : Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, 71:223–241, 2003.
- [22] M.J. BLACK : Recursive non-linear estimation of discontinuous flow fields. *In Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, pages 138–145, Stockholm, Sweden, 1994.
- [23] M.J. BLACK et P. ANANDAN : Robust dynamic motion estimation over time. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 296–302, 1991.
- [24] M.J. BLACK et P. ANANDAN : The robust estimation of multiple motions : Parametric and piecewise-smooth flow fields. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(1): 75–104, 1996.
- [25] M.J. BLACK et D. FLEET : Probabilistic detection and tracking of motion discontinuities. *In International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 551–558, 1999.
- [26] A. BLAKE, B. NORTH et M. ISARD : Learning multi-class dynamics. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 1999.
- [27] F.L. BOOKSTEIN : Principal warps : Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 11(6):567–585, 1989.
- [28] M. BOSSY : Some stochastic particle methods for nonlinear parabolic pdes. *ESAIM : PROCEEDINGS*, 15:18–57, 2005.
- [29] T. BRÉHARD et J.P. LE CADRE : Closed-form posterior Cramér-Rao bound for bearings-only tracking. *IEEE Trans. Aerospace Elec. Systems*, to appear, 2006.
- [30] P.J. BURT : The pyramid as a structure for efficient computation. *In A. ROZENFELD, éditeur : Multiresolution Image Processing and Analysis*, pages 6–35. Springer-Verlag, 1984.
- [31] D. BÉRÉZIAT : *Détection et suivi de structures déformables en mouvement, application à la météorologie*. Thèse de doctorat, Université de Paris Sud, Octobre 1999.
- [32] F. CAMPILLO : Filtrage particulaire et modèles de Markov cachés. Cours master recherche, Université du Sud-Toulon-Var, 2006.

- [33] C. CANUTO, M. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T. ZANG : *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer, 1988.
- [34] R. CASARIN : Bayesian Monte Carlo filtering for stochastic volatility models. *Cahier du CEREMADE N. 0415, Université Paris Dauphine*, 2004.
- [35] Y. CHENG : Mean shift, mode seeking and clustering. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 17(8):790–799, 1995.
- [36] A.J. CHORIN : Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57:785–796, 1973.
- [37] A.J. CHORIN et P. KRAUSE : Dimensional reduction for a Bayesian filter. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 101, 42, 2004.
- [38] A.J. CHORIN et J.E. MARSDEN : *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, 1993.
- [39] I. COHEN et I. HERLIN : Optical flow and phase portrait methods for environmental satellite image sequences. *In Proc. Europ. Conf. Computer Vision*, numéro 1064 de LNCS, pages 141–150. Springer-Verlag, avril 1996.
- [40] I. COHEN et I. HERLIN : Tracking meteorological structures through curve(s) matching using geodesic paths. *In Proc of 6th IEEE Int. Conf on Computer Vision*, pages 396–401, Bombay, 1998.
- [41] D. COMANICIU et P. MEER : Mean shift : A robust approach toward feature space analysis. *IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intelligence*, 24(5):603–619, 2002.
- [42] D. COMANICIU, V. RAMESH et P. MEER : Real-time tracking of non-rigid objects using mean shift. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 142–149, 2000.
- [43] T. CORPETTI : Estimation et analyse de champs denses de vitesses d’écoulements fluides. Thèse de l’université de Rennes I, juin 2002.
- [44] T. CORPETTI, E. MÉMIN et P. PÉREZ : Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 24(3):365–380, 2002.
- [45] T. CORPETTI, E. MÉMIN et P. PÉREZ : Extraction of singular points from dense motion fields : an analytic approach. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 19(3):175–198, 2003.
- [46] M. COSTAGLI, E.E. KURUOGLU et A. AHMED : Astrophysical source separation using particle filters. *In ICA*, pages 930–937, 2004.
- [47] G.-H. COTTET et P. KOUMOUTSAKOS : *Vortex methods : theory and practice*. Cambridge University Press, 2000.
- [48] G.H. COTTET, P. KOUMOUTSAKOS et M.L. OULD-SALIHI : Vortex methods with spatially varying cores. *J. Comp. Phys.*, 162:164–185, 2000.
- [49] D. CRISAN, P. DEL MORAL et T.J. LYONS : Interacting particle systems approximations of the Kushner Stratanovitch equation. *Advances in applied probability*, 31(3):819–838, 1999.
- [50] D. CRISAN et A. DOUCET : A survey of convergence results on particle filtering for practioners. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(3), 2002.

- [51] P. DEL MORAL : Some contributions to non linear estimation and interacting particle systems. with applications to non linear filtering, optimal control, Feynmann-Kac formulae and Schrödinger operators. Habilitation à diriger des recherches Université Paul Sabatier, Toulouse, 2002.
- [52] P. DEL MORAL : *Feynman-Kac formulae - Genealogical and interacting particle systems with applications*. Springer, 2004.
- [53] P. DEL MORAL, J. JACOD et Ph. PROTTER : The Monte-Carlo method for filtering with discrete-time observations. *Probab. Theory Relat. Fields*, 120:346–368, 2001.
- [54] R. DOUC, O. CAPPE et E. MOULINES : Comparison of resampling schemes for particle filtering. *Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2005)*, pages 64–69, 2005.
- [55] A. DOUCET, S. GODSILL et C. ANDRIEU : On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10(3):197–208, 2000.
- [56] J. DURBIN et S.J. KOOPMAN : *Time series analysis by state space methods*. Oxford University Press, 2001.
- [57] J. D. ELDRIDGE, T. COLONIUS et A. LEONARD : A vortex particle method for two-dimensional compressible flow. *J. Comput. Phys.*, 179(2):371–399, 2002.
- [58] W. ENKELMANN : Investigation of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences. *Comp. Vision Graph. and Image Proces.*, 43:150–177, 1988.
- [59] G. EVENSEN : Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of geophysical research*, 99(C5):10,143–10,162, 1994.
- [60] G. EVENSEN : The ensemble Kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean dynamics*, 53:343–367, 2003.
- [61] M. FARGE, K. SCHNEIDER et N. KEVLAHAN : Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Physics of Fluids*, 11(8):2187–2201, 1999.
- [62] J.M. FITZPATRICK : A method for calculating velocity in time dependent images based on the continuity equation. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 78–81, San Francisco, USA, 1985.
- [63] R.M. FORD et R. STRICKLAND : Representing and visualizing fluid flow images and velocimetry data by nonlinear dynamical systems. *Graph. Mod. Image Proc.*, 57(6):462–482, 1995.
- [64] R.M. FORD, R. STRICKLAND et B. THOMAS : Image models for 2-d flow visualization and compression. *Graph. Mod. Image Proc.*, 56(1):75–93, 1994.
- [65] K. FUKANAGA et L.D. HOSTETLER : The estimation of the gradient of a density function, with applications in pattern recognition. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 21(1):32–40, 1975.
- [66] A.F. GHONIEM, A.J. CHORIN et A.K. OPPENHEIM : Numerical modelling of turbulent flow in a combustion tunnel. *Philos. Trans. R. Soc. London A304*, pages 303–325, 1982.

- [67] J.C. GILBERT et J. NOCEDAL : Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. *SIAM J. Optimization*, 2:21–42, 1992.
- [68] S.J. GODSILL et P.J. RAYNER : *Digital audio restoration : a statistical model based approach*. Springer-Verlag, London, 1998.
- [69] N.J. GORDON, A. DOUCET et J.F.G. De FREITAS : *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer-Verlag, 2001.
- [70] N.J. GORDON, D.J. SALMOND et A.F.M. SMITH : Novel approach to non-linear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proc. F, Radar and signal processing*, 140(2), April 1993.
- [71] S. GUPTA et J. PRINCE : Stochastic models for div-curl optical flow methods. *Signal Proc. Letters*, 3(2):32–34, 1996.
- [72] A.C. HARVEY : *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press, 1989.
- [73] P. HEAS, E. MEMIN et N. PAPADAKIS : Dense estimation of layer motions in the atmosphere. *In Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, Hong-Kong, Aug 2006.
- [74] F. HEITZ et P. BOUTHEMY : Multimodal estimation of discontinuous optical flow using Markov random fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 15(12):1217–1232, 1993.
- [75] P. HELLIER, C. BARILLOT, E. MÉMIN et P. PÉREZ : Hierarchical estimation of a dense deformation field for 3D robust registration. *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 20(5):388–402, 2001.
- [76] G. HERMOSILLO, C. CHEFD’HOTEL et O. FAUGERAS : Variational methods for multimodal matching. *Int. J. Computer Vision*, 50(3):329–343, 2002.
- [77] H.W. HETHCOTE : The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, 42(4):599–653, 2000.
- [78] B. HORN et B. SCHUNCK : Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 1981.
- [79] P.L. HOUTEKAMER et H.L. MITCHELL : A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly weather review*, 129:123–137, 2001.
- [80] P.L. HOUTEKAMER, H.L. MITCHELL, G. PELLERIN, M. BUEHNER, M. CHARRON, L. SPACEK et B. HANSEN : Atmospheric data assimilation with an ensemble Kalman filter : Results with real observations. *Monthly weather review*, 133:604–620, 2005.
- [81] E. HUOT, T. ISAMBERT, I. HERLIN, J.P. BERROIR et G. KOROTAEV : Data assimilation of satellite images within an oceanographic circulation model. *In In Proceedings of ICASSP (International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing)*, Toulouse, France, mai 2006.
- [82] J.M. HYMAN et M.J. SHASHKOV : Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. *Comput. Math. Appl.*, 33(4):81–104, 1997.
- [83] E.L. IONIDES, K.S. FANG, R.R. ISSEROFF et G.F. OSTER : Stochastic models for cell motion and taxis. *Journal of Mathematical Biology*, 2003.

- [84] T. ISAMBERT, I. HERLIN, J.P. BERROIR et E. HUOT : Estimation du mouvement fluide apparent dans un cadre de splines vectorielles. *In Congrès Jeunes Chercheurs en Vision par Ordinateur (ORASIS'05)*, Fournols, France, mai 2005.
- [85] M. ISARD et A. BLAKE : Condensation – conditional density propagation for visual tracking. *Int. J. Computer Vision*, 29(1):5–28, 1998.
- [86] M. ISARD et A. BLAKE : A mixed-state CONDENSATION tracker with automatic model-switching. *In International Conference on Computer Vision*, pages 107–112, 1998.
- [87] A.H. JAZWINSKI : *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, 1970.
- [88] S.J. JULIER et J. UHLMANN : A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *In International Symposium Aerospace/Defense Sensing, Simulations and Controls*, 1997.
- [89] S.J. JULIER et J. UHLMANN : Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422, 2004.
- [90] R.E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:34–45, 1960.
- [91] R.E. KALMAN et R.S. BUCY : New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83:95–108, 1960.
- [92] I. KARATZAS et S.E. SHREVE : *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, Second Edition, 1991.
- [93] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS : Snakes : Active contour models. *Int. J. Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [94] G. KITAGAWA : Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5:1–25, 1996.
- [95] P.E. KLOEDEN et E. PLATEN : *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [96] T. KOHLBERGER, E. MÉMIN et C. SCHNÖRR : Variational dense motion estimation using the Helmholtz decomposition. *In Int. conf on Scale-Space theories in Computer Vision(Scale-Space '03)*, Isle of Skye, june 2003.
- [97] A. KONG, J.S. LIU et W.H. WONG : Sequential imputations and Bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425):278–288, March 1994.
- [98] P. KORNPORST, R. DERICHE et G. AUBERT : Image sequence analysis via partial differential equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 11(1):5–26, September 1999.
- [99] S. LAI et B. VEMURI : Reliable and efficient computation of optical flow. *Int. J. Computer Vision*, 29(2):87–105, 1998.
- [100] E. LAMBALLAIS et J.H. SILVESTRINI : Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. *Journal of Turbulence*, 3(028), 2002.
- [101] F.X. LE DIMET et O. TALAGRAND : Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus A*, 38:97–110, 1986.

- [102] F. LE GLAND : Introduction au filtrage en temps discret - filtre de Kalman, filtrage particulière, modèles de markov cachés. Cours master recherche, Université de Rennes 1, 2006.
- [103] S. LEE, G. WOLBERG et S. Y. SHIN : Scattered data interpolation with multilevel b-splines. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(3):228–244, 1997.
- [104] B. LEGRAS et R. VAUTARD : A guide to Lyapunov vectors. Predictability vol I, editor T. Palmer ECWF Seminar, ECMWF, Reading,UK, pp. 135-146, 1996.
- [105] H. LESTER et S. ARRIDGE : A survey of hierarchical non-linear medical image registration. *Pattern Recognition*, 32:129–149, 1999.
- [106] J.S. LIU et R. CHEN : Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association*, 93:1032–1044, 1998.
- [107] F. MAES, A. COLLIGNON, D. VANDERMEULEN, G. MARCHAL et P. SUETENS : Multimodality image registration by maximisation of mutual information. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 16(2):187–198, 1997.
- [108] J. MAINTZ et MA. VIERGEVER : A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1):1–36, 1998.
- [109] C. MARCHIORO et M. PULVIRENTI : Hydrodynamics in two dimensions and vortex theory. *Comm. Math. Phys.*, 84:483–503, 1982.
- [110] S. MAS-GALLIC : *Contribution à l'analyse numérique des méthodes particulières*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1987.
- [111] M. MAURIZOT, P. BOUTHEMY et B. DELYON : Direct localization, motion characterization and tracking of centers of atmospheric disturbances in meteosat image sequences. In *The Eumetsat Meteorological Satellite Data Users' Conference, EUMETSAT'97*, Brussel, Belgium, October 1997.
- [112] M. MAURIZOT, P. BOUTHEMY et B. DELYON : 2d fluid motion analysis from a single image. In *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 184–189, Santa Barbara, 1998.
- [113] M. MAURIZOT, P. BOUTHEMY, B. DELYON, A. IOUDITSKI et J.-M. ODOBEZ : Determination of singular points in 2D deformable flow fields. In *2nd IEEE Int. Conf. Image Processing*, Washington DC, October 1995.
- [114] S. MÉLÉARD : Monte-Carlo approximations for 2d Navier-Stokes equations with measure initial data. *Probab. Theory Related Fields*, 121(3):367–388, 2001.
- [115] E. MÉMIN : Estimation du flot-optique : contributions et panorama de différentes approches. Habilitation à diriger des recherches - Université de Rennes 1, IRISA-IFSIC, 2003.
- [116] E. MÉMIN et P. PÉREZ : Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(5):703–719, 1998.
- [117] E. MÉMIN et P. PÉREZ : Fluid motion recovery by coupling dense and parametric motion fields. In *Int. Conf. on Computer, ICCV'99*, pages 620–625, 1999.

- [118] E. MÉMIN et P. PÉREZ : Hierarchical estimation and segmentation of dense motion field. *Int. J. Computer Vision*, 46(2), 2002.
- [119] R. Van Der MERWE, A. DOUCET, N. De FREITAS et E. WAN : The unscented particle filter. Rapport technique, Cambridge University Engineering Department, 2000.
- [120] R. N. MILLER et L.L. EHRET : Ensemble generation for models of multimodal systems. *Monthly Weather Review*, 130:2313–2333, 2002.
- [121] J.D. MURRAY : *Mathematical biology*, volume 19. Springer, 1993.
- [122] H. NAGEL et W. ENKELMANN : An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 8:565–593, 1986.
- [123] H.H. NAGEL : Extending the oriented smoothness constraint into the temporal domain and the estimation of derivatives of optical flow. *In Proc. First European Conference On Computer Vision*, pages 139–148, Antibes, France, Apr 1990. Springer.
- [124] S.J. NIEMAN, J. SCHMETZ et W.P. MENZEL : A comparison of several techniques to assign heights to cloud tracers. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 1993.
- [125] H. NOGAWA, Y. NAKAJIMA et Y. SATO : Acquisition of symbolic description from flow fields : a new approach based on a fluid model. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 19(1), 1997.
- [126] B. NORTH et A. BLAKE : Learning dynamical models using Expectation-Maximisation. *In International Conference on Computer Vision*, 1998.
- [127] B. OKSENDAL : *Stochastic differential equations : an introduction with applications*. Springer-Verlag, 1998.
- [128] S. OSHER et J.A. SETHIAN : Fronts propagating with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [129] N. PAPADAKIS et E. MÉMIN : A variational technique for time consistent tracking of curves and motion. *submitted to Int. J. Comp. Vision (IJCV)*, 2006.
- [130] C. PAPIN : Analyse spatio-temporelle d’images satellitaires météorologiques : détection et suivi de structures nuageuses critiques. Thèse de l’Université de Rennes I, décembre 1999.
- [131] C. PAPIN, P. BOUTHEMY, E. MÉMIN et G. ROCHARD : Tracking and characterization of highly deformable cloud structures. *In European Conference on Computer Vision, ECCV 2000, LNCS 1843*, volume 2, pages 428–442, Dublin, Irlande, June 2000.
- [132] P. PÉREZ, J. VERMAAK et A. BLAKE : Data fusion for visual tracking. *Proc. IEEE*, 92(3):495–513, 2004.
- [133] D.T. PHAM, J. VERRON et M. Ch. ROUBAUD : A singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16(3-4):323–340, 1998.
- [134] M.K. PITT et N. SHEPHARD : Filtering via simulation : Auxiliary particle filter. *Journal of the American Statistical Association*, 94:590–599, 1999.

- [135] P. PÉREZ, C. HUE et M. GANGNET : Color-based probabilistic tracking. *In European Conference on Computer Vision*, pages 661–675, 2002.
- [136] M. RAFFEL, C. WILLERT et J. KOMPENHANS : *Particle Image Velocimetry, a Practical Guide*. Springer-Verlag, 2000.
- [137] A.R. RAO et R.C. JAIN : Computerized flow field analysis : Oriented texture fields. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 14(7):693–709, July 1992.
- [138] J. RITTSCHER et A. BLAKE : Classification of human body motion. *In International Conference on Computer Vision*, pages 634–639, 1999.
- [139] L. ROSENHEAD : The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Roy. Soc. London, A* 134:170–192, 1931.
- [140] L. RUDIN et S. OSHER : Total variation based image restoration with free local constraints. *In Proc. Int. Conf. Image Processing*, volume 1, pages 31–35, 1994.
- [141] D. RUECKERT, I. SOMODA, C. HAYES, D. HILL, M. LEACH et D. HAWKES : Nonrigid registration using free-form deformations : application to breast MR images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(8):712–721, 1999.
- [142] P. RUHNAU, A. STAHL et C. SCHNOERR : On-line variational estimation of dynamical fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. *In 28th Annual Symposium of the German Association for Pattern Recognition (DAGM 2006)*, sept 2006.
- [143] S. SARKKA : *Recursive Bayesian inference on stochastic differential equations*. Thèse de doctorat, Helsinki University of technology, 2006.
- [144] J. SCHMETZ, K. HOLMLUND, J. HOFFMAN, B. STRAUSS, B. MASON, V. GAERTNER, A. KOCH et L. Van De BERG : Operational cloud-motion winds from Meteosat infrared images. *Journal of Applied Meteorology*, 32:1206–1225, 1993.
- [145] J.A. SETHIAN : *Level set methods*. Cambridge University-Press, 1996.
- [146] S. SHANKAR et L. VAN DOMMELEN : A new diffusion procedure for vortex methods. *J. Comp. Physics*, 127:88–109, 1996.
- [147] C.F. SHU et R.C. JAIN : Vector field analysis for oriented patterns. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 16(9):946–950, September 1994.
- [148] H. SIDENBLADH, M.J. BLACK et L. SIGAL : Implicit probabilistic models of human motion for synthesis and tracking. *In European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 784–800, 2002.
- [149] H. SINGER : Continuous-discrete unscented Kalman filtering. Rapport technique, FernUniversität in Hagen, Diskussionsbeitrag Fachbereich Wirtschaftswissenschaft Nr. 384, février 2006.
- [150] S.M. SONG et R.M. LEAHY : Computation of 3d velocity fields from 3d cine and CT images of human heart. *IEEE trans. on medical imaging*, 10(3):295–306, 1991.
- [151] D. SUTER : Motion estimation and vector splines. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 939–942, Seattle, USA, juin 1994.
- [152] O. TALAGRAND et P. COURTIER : Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. *I - Theory. Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 113:1311–1328, 1987.

- [153] A. TOGA et P. THOMPSON : The role of image registration in brain mapping. *Image and Vision Computing*, 19:3–24, 2001.
- [154] J. VERMAAK, C. ANDRIEU, A. DOUCET et S.J. GODSILL : Particle methods for Bayesian modeling and enhancement of speech signals. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 10(3):173–185, 2002.
- [155] J. VERMAAK, P. PÉREZ, M. GANGNET et A. BLAKE : Towards improved observation models for visual tracking : selective adaptation. *In European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 645–660, 2002.
- [156] J. WEICKERT et C. SCHNÖRR : Variational optic-flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 14(3):245–255, 2001.
- [157] R. WILDES, M. AMABILE, A.M. LANZILLOTTO et T.S. LEU : Physically based fluid flow recovery from image sequences. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 969–975, 1997.
- [158] J. YUAN, P. RUHNAU, E. MÉMIN et C. SCHNÖRR : Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *In 5th Int. Conf. on Scale-Space and PDE methods in Computer Vision (Scale-Space'05), Hofgeismar, Germany*, April 2005.
- [159] J. YUAN, C. SCHNOERR et E. MÉMIN : Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *accepted for publication in Journ. of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, 2006.
- [160] M. ZAKAI : On the optimal filtering of diffusion processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandete Gebiete*, 11:230–243, 1969.
- [161] L. ZHOU, C. KAMBHAMETTU et D. GOLDFOF : Fluid structure and motion analysis from multi-spectrum 2D cloud images sequences. *In Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, volume 2, pages 744–751, Hilton Head Island, South Carolina, USA, 2000.
- [162] B. ZITOVA et J. FLUSSER : Image registration methods : a survey. *Image and Vision Computing*, 21:977–1000, 2003.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images et plus particulièrement au problème de l'estimation cohérente de champs denses de vitesses. Dans une première partie nous proposons un estimateur paramétrique de mouvement, fournissant une représentation de faible dimension du champ de déplacements à partir d'une paire d'images. La paramétrisation repose sur la discrétisation de la vorticité et la divergence du champ sur un ensemble de fonctions de base appel es particules de vortex et de source. L'estimation consiste à minimiser une fonctionnelle construite à partir d'une version int gr e de l'équation de continuité de la mécanique des fluides. La méthode d'estimation est valid e expérimentalement sur des images synthétiques et réelles issues de divers domaines d'applications : mécanique des fluides expérimentale, météorologie, imagerie médicale. La deuxième partie traite du suivi temporel des champs denses de déplacements. L'estimation des champs de vitesses le long de la séquence d'images est formul e comme un problème de filtrage stochastique non linéaire. Le filtre que nous proposons combine un processus de diffusion issu d'une formulation stochastique de l'équation de Navier-Stokes sous sa forme vorticité-vitesse, et des observations discrètes extraites de la séquence d'images. La non linéarité du système impose la mise en place d'une technique de filtrage adapt e. Le filtrage particulaire formulé dans un cadre continu apporte une réponse au problème. Afin de traiter un espace d'état de dimension raisonnable, le modèle de filtrage est construit à partir de la représentation réduite propos e dans la première partie. Nous présentons des résultats de suivi sur des séquences synthétiques et des exemples réels issus de la météorologie et de la mécanique des fluides expérimentale.

Mots-clefs : analyse du mouvement, écoulements fluides, suivi temporel, méthodes séquentielles de Monte Carlo, filtre particulaire.

Abstract

This thesis is concerned with the analysis of fluid flows from image sequences and most particularly with the consistent estimation of dense velocity fields. In a first part we propose a parametric motion estimator which provides a low dimensional representation of the velocity field from a pair of images. The parameterization relies on the discretization of the vorticity and divergence maps on a set of basis functions called vortex and source particles. The estimation process consists in minimizing a functional relying on an integrated version of continuity equation of fluid mechanics. The method is validated experimentally on synthetic images and on different real applications : fluid mechanics, meteorology, medical imaging. The second part deals with the temporal tracking of dense velocity fields. The estimation of the vector fields along the whole image sequence is formulated as a non linear stochastic filtering problem. The filter we propose combines a diffusion process coming from a stochastic formulation of the Navier-Stokes equation in its vorticity-velocity form and discrete measurements extracted from the image sequence. The non linearity of the system imposes the setting of an appropriate filtering technique. The particle filter in its continuous form brings an answer to the problem. In order to handle a state space of reasonable size, the filtering model is constructed from the reduced representation proposed in the first part. We present tracking results on synthetic sequences and real examples coming from meteorology and fluid mechanics.

Keywords : motion analysis, fluid flows, temporal tracking, sequential Monte-Carlo methods, particle filter.