

UN PROBLÈME DE FILTRAGE NON LINÉAIRE AVEC VARIANCE D'ÉTAT  
INCONNUE:  
LE PISTAGE MONO-CIBLE PAR MESURE D'ANGLE SEUL

Thomas Bréhard & Jean-Pierre Le Cadre

*IRISA  
Campus de Beaulieu  
35042 Rennes Cedex*

**Résumé**

Le problème classique de pistage mono-cible par mesure d'angle seul (BOT) appartient à la classe des problèmes de filtrage non linéaires. Récemment, des algorithmes utilisant des techniques de type Monte Carlo (filtrage particulaire) ont été proposés utilisant les coordonnées polaires modifiées. Ces dernières se sont révélées fondamentales dans la résolution des problèmes d'initialisation et d'observabilité. Nous nous intéressons ici à un problème appartenant à une classe plus générale: les problèmes de filtrage non linéaires avec variance d'état inconnue. Une paramétrisation largement inspirée des coordonnées polaires modifiées est proposée dans le but de construire un algorithme particulaire adapté au problème.

**Mots-clefs**

pistage mono-cible, méthode de Monte Carlo séquentielle, initialisation, problème de filtrage non linéaire

**Abstract**

The classical bearings-only tracking problem for a single object (BOT) belongs to the class of non linear filtering problems. Recently, algorithms based on sequential Monte Carlo methods (particle filtering) have been proposed in the modified polar coordinate framework. This latter has been shown to be fundamentally relevant in this context as regards observability and initialization problems. In this paper, we adress a problem which belongs to a more general class of problems: non linear filtering problems with unknown variance state. A coordinate system inspired by the modified polar coordinates is suggested to solve the problem using a particle filtering algorithm.

**Keywords**

target tracking, sequential Monte Carlo methods, initialization, non linear filtering problem

## 1 Introduction

Le pistage mono-cible par mesure d'angle seul (BOT) consiste à déterminer la trajectoire d'une cible en utilisant des mesures d'angles bruitées obtenues par un observateur. Nous supposons dans la suite que la cible suit un modèle de diffusion <sup>1</sup>. Classiquement le problème est composé de deux équations stochastiques. La première appelée équation d'état représente l'évolution de la cible, la seconde reliant la mesure d'angle à l'état de la cible à l'instant  $t$  (équation d'observation). Cette dernière étant non linéaire, le filtrage particulaire<sup>2</sup> est la méthode la mieux adaptée pour résoudre le problème. Nous étudions ici

---

<sup>1</sup>une liste exhaustive des modèles de diffusion les plus étudiés est proposée par Rong Li et Jilkov (2000).

<sup>2</sup>présenté notamment dans les articles de Gordon, Salmond et Smith (1993), Doucet, Freitas et Gordon (2001) ainsi que Arulampalam, Maskell, Gordon et Clapp (2002).

une extension du BOT appelé " $\sigma$ -BOT" caractérisée par une variance de diffusion inconnue, cette quantité représentant la manoeuvrabilité de la cible. Dans ce cadre, le problème appartient à la classe des problèmes de filtrage non linéaires avec variance d'état inconnue. Par ailleurs, Aidala et Hammel ont introduit les coordonnées polaires modifiées dans le contexte du BOT qui se sont révélées fondamentales en particulier concernant l'initialisation du filtre particulière proposée par Brehard et Le Cadre (2004) ainsi que pour trouver une solution analytique au problème dans le cas déterministe (Nardone et Graham (1997)). Nous proposons dans la section 2 une paramétrisation inspirée de ce système de coordonnées pour résoudre le " $\sigma$ -BOT" et ainsi construire un algorithme particulière adapté au problème en section 3. La section 4 présente des résultats de simulations.

## 2 $\sigma$ -BOT

Historiquement, le BOT est présenté en coordonnées cartésiennes. On définit:

$$X_t = (X_1(t), X_2(t), X_3(t), X_4(t))^T = (v_x(t), v_y(t), r_x(t), r_y(t))^T \text{ et } \sigma, \quad (1)$$

l'état de la cible à l'instant  $t$  composé de la vitesse relative et de la position de la cible dans le plan  $x - y$  et la variance d'état " $\sigma^2$ ". Cette dernière quantité représente la manoeuvrabilité de la cible. Nous supposons ici que la cible suit un mouvement rectiligne uniforme. L'équation d'état discrétisée s'écrit alors:

$$X_{t+1} = F X_t + H U_t + \sigma W_t \text{ où } W_t \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad (2)$$

et

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_t & 1 \end{pmatrix} \otimes Id_2, H = (1 \delta_t) \otimes Id_2, Q = \begin{pmatrix} \delta_t & \frac{\delta_t^2}{2} \\ \frac{\delta_t^2}{2} & \frac{\delta_t^3}{3} \end{pmatrix} \otimes Id_2,$$

où  $\delta_t$  est le pas de discrétisation et  $U_t$  la différence de vitesse relative entre les instants  $t + 1$  et  $t$  (manoeuvres de l'observateur),  $\otimes$  désignant le produit de Kronecker et  $Id_2$  la matrice identité de dimension 2. Par ailleurs, on note  $Z_t$  l'angle sous lequel l'observateur voit la cible à l'instant  $t$ . L'état de la cible est relié à la mesure d'angle au travers de l'équation suivante:

$$Z_t = \arctan \left( \frac{r_x(t)}{r_y(t)} \right) + V_t, \quad (3)$$

où  $V_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ . La variance de mesure  $\sigma_v^2$  est connue. Ainsi le système (2-3) a deux composantes : une équation d'état linéaire (2) et une équation d'observation non linéaire (3). Le filtrage particulière est alors la technique la mieux adaptée pour résoudre ce type de problème.

Toutefois, Nardone et Aidala (1981) ont remarqué qu'un problème d'observabilité était caché dans la formulation cartésienne. Plus précisément, ces derniers ont montré que si la cible suit un mouvement rectiligne uniforme, la distance radiale n'est pas estimable tant que l'observateur n'a pas manoeuvré d'où l'idée d'utiliser un autre système de coordonnées ayant la propriété de découpler la distance radiale des autres composantes. Ceci est la principale motivation de Aidala et Hammel (1983) pour définir les coordonnées polaires modifiées (MP). Peach (1995) propose un filtre de Kalman étendu utilisant ce système de coordonnées pour résoudre le BOT. Dans le contexte du  $\sigma$ -BOT, nous ajoutons aux composantes précédemment citées, une cinquième composante  $\rho_t$  appelée rapport variance-distance qui, nous le verrons, apparaît comme un paramètre naturel dans le cadre du  $\sigma$ -BOT. On note alors:

$$Y_t = (Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t), Y_4(t))^T = \left( \dot{\beta}(t), \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}, \beta(t), \frac{1}{r(t)} \right)^T \text{ et } \rho_t = \frac{\sigma}{r(t)}, \quad (4)$$

l'état de la cible à l'instant  $t$  en coordonnées polaires modifiées où  $\beta(t)$  et  $r(t)$  sont respectivement l'angle relatif et la distance relative.  $\dot{\beta}(t)$  et  $\dot{r}(t)$  sont les dérivées de  $\beta(t)$  et  $r(t)$ . Ecrivons maintenant

le problème de filtrage avec ce système de coordonnées. Remarquons en premier lieu que le système stochastique (2–3) peut être réécrit:

$$Y_{t+1} = f_c^{mp} [F f_{mp}^c(Y_t) + H U_t + \sigma W_t], \quad (5)$$

$$Z_t = H(f_{mp}^c(Y_t)) + V_t, \quad (6)$$

où  $f_c^{mp}$  et  $f_{mp}^c$  sont les fonctions de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. Si on note:

$$Y_t^r = (Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t))^T = \left( \dot{\beta}(t), \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}, \beta(t) \right)^T, \quad (7)$$

on peut alors réécrire le système (5–6) avec les notations précédemment introduites:

$$Y_{t+1}^r = F_1(Y_t^r, Y_4(t)U_t, \rho_t W_t), \quad (8)$$

$$Y_4(t+1) = Y_4(t)F_2(Y_t^r, \rho_t W_t), \quad (9)$$

$$\rho_{t+1} = \rho_t F_2(Y_t^r, \rho_t W_t), \quad (10)$$

$$Z_t = Y_3(t) + V_t. \quad (11)$$

Comme dans le cas cartésien, le système stochastique (8–11) est un problème de filtrage non linéaire avec covariance inconnue. Toutefois, la covariance d'état  $\rho_t$  dépend maintenant du temps. De plus, on peut noter que si l'observateur ne manoeuvre pas ( $U_t$  est le vecteur nul),  $Y_4(t)$  n'est clairement pas observable puisqu'il n'apparaît pas dans les équations (8,10,11). Enfin,  $\rho_t$  apparaît lui comme le paramètre naturel de variance d'état. L'avantage principale de cette paramétrisation est qu'elle permet de comprendre le problème d'inobservabilité lié à  $Y_4(t)$  et ainsi de construire un algorithme particulière adapté au problème.

### 3 Résolution par filtrage particulière

Un algorithme de filtrage particulière est généralement composé de trois étapes à chaque pas de temps. Le nuage de particules qui représente l'ensemble des états possibles de la cible est tout d'abord propagé à l'aide de l'équation d'état. Puis les poids des particules sont mis à jour en utilisant la formule de Bayes et l'équation d'observation. La distribution approchée de l'état de la cible est alors une somme pondérée de lois de Dirac centrées en chaque particule. La troisième étape consiste à rééchantillonner ce qui permet d'éviter la dégénérescence du nuage de particules. De nombreuses approches ont été étudiées pour améliorer la convergence du filtrage particulière. On citera notamment les noyaux de régularisation étudiés par Musso, Oudjane et Legland (2001) ainsi que la fréquence de rééchantillonnage par Hue, Le Cadre et Perez (2002). Le but de cette section est de présenter l'initialisation du filtrage particulière qui est l'une des principales difficultés ainsi que l'estimation et la phase de rééchantillonnage qui ne sont pas classiques du fait de l'inobservabilité de  $Y_4(t)$ .

#### 3.1 Initialisation du filtrage particulière

Cette méthode proposée par Brehard et Le Cadre (2004) consiste à déterminer un temps d'initialisation suffisant pour assurer une bonne initialisation de l'algorithme de filtrage particulière. La méthode consiste à initialiser les particules par échantillonnage dans une région de confiance, la quatrième composante et  $\rho_t$  étant échantillonnés uniformément en utilisant un a priori faible.

Si on suppose que la cible a un comportement déterministe, le système stochastique (8–10) devient:

$$Z_t = Y_3(k) + \tan^{-1} \left( \frac{(t-k)\delta_t Y_1(k)}{1 + (t-k)\delta_t Y_2(k)} \right) + V_t, \forall t \geq 0, \quad (12)$$

qui est un problème de régression non linéaire. On note  $\hat{Y}_k^r$ , l'estimateur du maximum de vraisemblance pour les composantes observables de l'état à l'instant  $k$  utilisant les  $2k + 1$  premières mesures d'angles. Cet estimateur peut être obtenu à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton. De plus, une région de confiance notée  $CA(\hat{Y}_k^r)$  peut être définie en utilisant des résultats de convergence classiques. Ainsi les trois premières composantes des particules peuvent être initialisées par échantillonnage uniforme dans  $CA(\hat{Y}_k^r)$  tel que:

$$CA(\hat{Y}_k^r) = \left\{ Y_k^r \mid \left\| \hat{Y}_k^r - Y_k^r \right\|_{J(\hat{Y}_k^r)^{-1}}^2 \leq \frac{\chi_3^2(1-\alpha)}{2k+1} \right\}, \quad (13)$$

où  $J(Y_k^r)$  est la matrice d'information de Fisher. On remarque notamment que  $CA(\hat{Y}_k^r)$  est une hyperellipsoïde. Par conséquent l'initialisation des trois premières composantes des particules peut être effectuée de manière efficace en utilisant l'algorithme proposé par Dezert et Musso (2001). Il reste à fixer  $Y_4(k)$  et  $\rho_k$ , les deux dernières composantes de l'état des particules. Remarquons en premier lieu que  $Y_4(k)$  est l'inverse de la distance radiale à l'instant  $k$ . Si l'on suppose que:

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max} \quad \text{et} \quad \sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}, \quad (14)$$

alors une idée intuitive consiste à fixer pour chaque particule une distance radiale tirée uniformément entre les distances minimale et maximale notées  $r_{min}$  et  $r_{max}$  et échantillonner la cinquième composante uniformément entre  $\frac{\sigma_{min}}{R_{max}}$  et  $\frac{\sigma_{max}}{R_{min}}$ . Il est possible de déterminer le temps suffisant pour assurer une initialisation correcte de l'algorithme particulaire. Intuitivement, le volume de  $CA(\hat{Y}_k^r)$  décroît avec le temps  $k$ . Si on associe à chaque particule un voisinage tel que l'état réel de la cible se trouve dans au moins un des voisinages alors le choix de  $k$  revient à vérifier que le nombre de particules est suffisant pour remplir la région de confiance  $CA(\hat{Y}_k^r)$ .

### 3.2 Estimation et rééchantillonnage

Tant que l'observateur n'a pas manoeuvré, la quatrième composante de l'état est inobservable et ne doit donc pas être corrélée avec les autres composantes et les observations. Par conséquent, cette composante doit être rééchantillonnée indépendamment des autres. De plus, les poids des particules ne doivent pas être utilisés pour estimer cette composante. Lorsque que la distance radiale devient observable, il est alors possible d'utiliser les formules classiques d'estimation et de rééchantillonnage.

## 4 Simulations

L'algorithme a été implémenté sous Matlab en utilisant le scénario suivant. Les paramètres de l'algorithme sont résumés dans le tableau 1. Les états de l'observateur et de la cible sont respectivement  $X_0^{obs} = (-10 \text{ ms}^{-1}, 2 \text{ ms}^{-1}, 10000 \text{ m}, 0 \text{ m})^T$  et  $X_0^{cible} = (8 \text{ ms}^{-1}, -3 \text{ ms}^{-1}, -5000 \text{ m}, 10000 \text{ m})^T$ . L'état relatif de la cible est alors  $X_0 = X_0^{target} - X_0^{obs}$ . Le pas de temps  $\delta_t$  est de 6 s. La variance de diffusion  $\sigma$  est de  $0.04 \text{ ms}^{-1}$ . La variance d'observation  $\sigma_v$  est de 0.05 rad (environ 3 deg.). La figure 1(b) présente un exemple de trajectoire tandis que la figure 1(a) présente un exemple de suite de mesures d'angles. La figure 2 présente les résultats de simulation. Au début du scénario, seules les composantes observables sont estimées i.e.  $\{Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)\}$  comme la solution du problème de régression non linéaire (12). Le filtrage particulaire est initialisé au temps 564. A partir de ce moment, l'ensemble de l'état est estimé à l'aide de l'algorithme de filtrage particulaire. Les trois premières composantes de l'état sont correctement estimées grâce à la méthode d'initialisation. Par ailleurs, on peut voir sur la figure 2(d) que la région de confiance associée à  $\rho_t$  est élevée mais que celle-ci décroît assez rapidement.

Cette dernière est correctement estimée à partir de l'instant 2000. Dans ce scénario, l'observateur ne manoeuvre pas par conséquent  $Y_4(t)$  n'est pas estimé. Le point important est que le rapport distance-variance  $\rho_t$  peut être correctement estimé.

## 5 conclusion

Nous avons présenté dans cette article une version plus générale du problème de pistage par mesure d'angle : le  $\sigma$ -BOT. Il s'agit d'un problème important en pratique, la variance de diffusion de la cible étant rarement connue dans les applications. Nous avons proposé une paramétrisation naturelle pour le problème largement inspirée des coordonnées polaires modifiées. Par ailleurs, nous avons montré que ce problème pouvait être résolu à l'aide d'un algorithme particulière utilisant une information a priori faible. Enfin, nous avons mis en exergue à l'aide de simulations que l'un des paramètres appelé rapport distance-variance pouvait être estimé relativement finement. Ce paramètre peut se révéler particulièrement important dans le contexte du suivie multi-cibles ainsi que dans les problèmes de classification de cibles.

## Bibliographie

- [1] Aidala, V.J. et Hammel, S.E.(1983) Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearing-Only Tracking. *IEEE Trans. Automatic control*, 28(3):283-294.
- [2] Arulampalam, M.S., Maskell, S., Gordon, N. et Clapp, T.(2002) A Tutorial on Particule Filters for Online Non-Linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(2):174-188, .
- [3] Bréhard, T. et Le Cadre, J.-P. (2004) Initialization of Particle Filter and Posterior Cramér-Rao Bound for Bearings-Only Tracking in Modified Polar Coordinate System. Technical report, IRISA, Rennes, France .
- [4] Dezert, J. et Musso, C. (2001) An Efficient Method for Generating Points Uniformly Distributed in Hyperellipsoids. in *Proceedings of the Workshop on Estimation, Tracking and Fusion: A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*.
- [5] Doucet, A., De Freitas, N. et Gordon, N. (2001) *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag, New-York.
- [6] Gordon, N., Salmond, D. et Smith, A. (1993) Novel Approach to Non-Linear/Non-Gaussian Bayesian State Estimation. *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, 140(2):107-113.
- [7] Hue, C., Le Cadre, J.-P. et Pérez, P. (2002) Performance Analysis of Two Sequential Monte Carlo Methods and Posterior. Cramér-Rao Bounds for Multi-Target Tracking. Technical report, IRISA, Rennes, France.
- [8] Nardone, S.C. et Aidala, V.J. (1981) Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis. *IEEE Trans. on Aerospace, Electronic and Systems*, 17:161-166.
- [9] Nardone, S.C. et Graham, M.L.(1997) A Closed-form Solution to Bearing-Only Target Motion Analysis. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 22(1).
- [10] Oudjane, N., Musso, C. et Legland, F. (2001) Improving regularised particle filters. In A. Doucet, N De Freitas and N. Gordon , editros, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, New-York, Springer-Verlag.
- [11] Peach, N. (1995) Bearing-Only Tracking using a Set of Range-Parametrised Extended Kalman Filters. *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, 142(1):73-80, January 1995.
- [12] Rong Li, X. et Jilkov, V.P. (2000) A Survey of Maneuvering Target Tracking : Dynamic Models, *SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, Florida, USA.

paramètre	valeur
$r_{min}$	5000m
$r_{max}$	20000m
$\sigma_{min}$	$0.01 \text{ ms}^{-1}$
$\sigma_{max}$	$0.05 \text{ ms}^{-1}$
$N$	5000
$N_{seuil}$	0.9

TAB. 1 – Paramètres de l’algorithme de filtrage particulaire

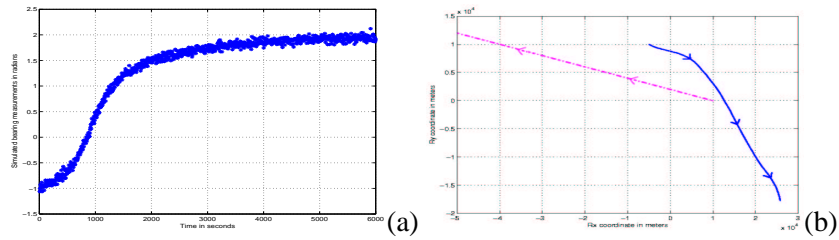


FIG. 1 – Scenario: (a) Mesures d’angles, en abscisse le temps . (b) Trajectoire de l’observateur en rouge et de la cible en bleu

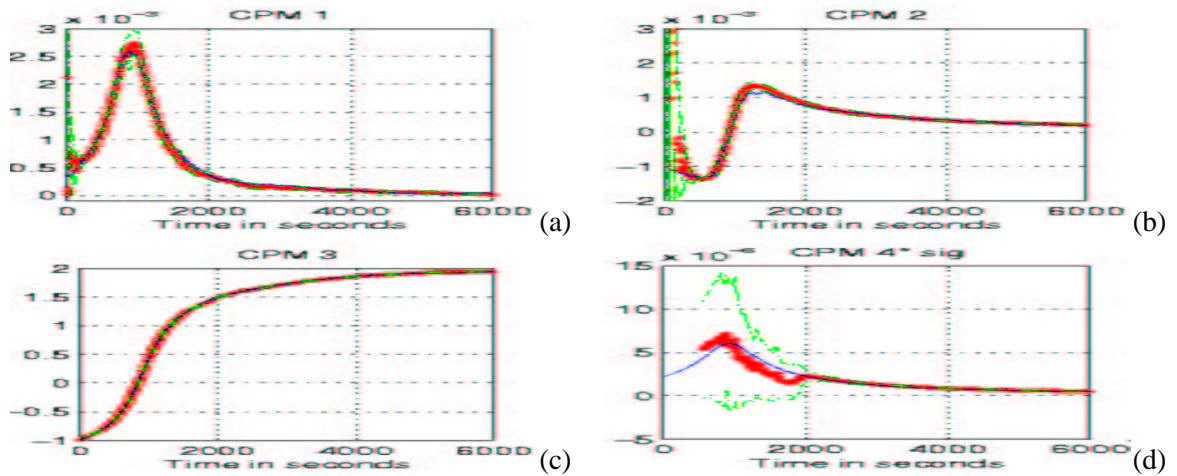


FIG. 2 – Estimé en rouge, région de confiance  $2\sigma$  en vert. Les valeurs réelles en bleu. En abscisse le temps. (a):  $Y_1(t)$ , (b):  $Y_2(t)$ , (c):  $Y_3(t)$ , (d):  $\rho_t$ .