

# Approche Non-paramétrique en Restauration d'Image avec Préservation des Discontinuités

## Non-parametric Approach for image Restoration with Preservation of Discontinuities

Charles Kervrann<sup>1</sup>

Silève Ba<sup>2</sup>

<sup>1</sup> INRA, Unité de Biométrie et Intelligence Artificielle

<sup>2</sup> IDIAP, Martigny, Suisse

INRA, Unité de Biométrie et Intelligence Artificielle, Domaine de Vilvert, 78352 Jouy-en-Josas  
charles.kervrann@jouy.inra.fr

### Résumé

*On propose une méthode d'estimation non-paramétrique pour supprimer le bruit en préservant les structures significatives dans les images. Dans notre formulation, à chaque pixel de l'image est associé une fenêtre optimale définissant le support d'estimation d'une fonction de régression inconnue. Celle-ci est définie localement comme la moyenne pondérée des observations disponibles à l'intérieur de la fenêtre d'estimation. Nous décrivons une méthode statistique pour choisir la taille optimale des fenêtres pour chaque pixel et le calcul des pondérations. L'approche, complètement adaptative et guidée par les observations, est prometteuse pour traiter des situations variées d'imagerie.*

### Mots Clef

Traitement d'image, modélisation des images, estimation, restauration, filtrage non-linéaire.

### Abstract

*A novel adaptive smoothing approach is proposed for noise removal and discontinuities preservation. The method is based on locally constant modeling of the image, with an adaptive choice of a window around each pixel in which the applied model fits the data well. The filtering technique associates with each pixel the weighted sum of data points within the window. We describe a statistical method for choosing the optimal window size with an adaptive choice of weights for every pair of pixels in the window. The proposed technique is data-driven and fully adaptive. Simulation results show that our algorithm yields promising smoothing results on a variety of real images.*

### Keywords

Image processing, image modeling, estimation, restoration, non-linear filtering.

## 1 Introduction

La restauration d'images a fait l'objet de nombreuses recherches en traitement d'image. La difficulté principale vient du fait que les contours des objets et les discontinuités de l'image doivent être préservés. Ceci rend nécessaire l'introduction de méthodes non-linéaires, variationnelles [22] ou stochastiques [13], qui permettent de lisser les régions homogènes à l'exception des zones de discontinuités de l'image. Les méthodes basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP) [5, 7, 18, 6, 10] et les techniques de filtrage anisotropiques [23, 3, 4], bien établies désormais, répondent à ces exigences et ont particulièrement été étudiées ces dernières années. On peut citer également quelques méthodes non-linéaires qui calculent une moyenne pondérée des valeurs d'intensité dans un voisinage local [14, 26, 24, 6, 1, 11].

Néanmoins, les méthodes non-linéaires évoquées doivent devenir plus autonomes et donc davantage s'appuyer sur les données observées. Par exemple, une question centrale qui pose problème lorsqu'une méthode de diffusion anisotrope est privilégiée en restauration, est la détermination de l'instant final de la diffusion [27, 20], qui ne correspond pas à une solution triviale ; par ailleurs, le paramètre d'échelle doit être choisi de manière judicieuse selon les images, afin de préserver les discontinuités sémantiques, c'est-à-dire les bords des objets [3, 4]. Nous proposons donc de répondre partiellement à ces questions et de développer une méthode de filtrage non-linéaire guidée par les données. Celle-ci repose notamment sur une modélisation statistique simple de l'image par des fonctions localement constantes par morceaux. Les fonctions et les degrés de lo-

calité inconnus sont estimés selon un critère statistique qui sélectionne un voisinage optimal pour chaque pixel. Nous estimons donc une fonction de régression en faisant croître une fenêtre autour de chaque point de l'image. Ceci revient à effectuer une moyenne pondérée des intensités des points de la fenêtre et à vérifier, à chaque étape, la taille optimale de celle-ci sur la base d'un critère d'équilibre biais-variance [19, 15]. La procédure itérative est arrêtée lorsque la corrélation entre l'image restaurée et le bruit estimé est minimale [20].

Cette procédure non-paramétrique est sensible aux discontinuités et permet donc de préserver les détails de l'image [25]. Elle est complètement adaptative puisque le degré de lissage sous-jacent de l'image n'est pas à spécifier. Enfin, le choix des paramètres internes de l'algorithme est guidé par les observations. La complexité de la méthode dépend surtout de la taille maximale des fenêtres d'estimation, prévue par un opérateur.

Après avoir décrit le principe de la méthode d'estimation non-paramétrique, nous présentons un algorithme pratique pour restaurer des images. Une méthode qui s'adapte au contenu des images, est proposée dans une seconde partie de l'article, afin de déterminer les paramètres internes de l'algorithme. En particulier, pour initialiser notre procédure d'estimation, des statistiques locales sont calculées sur l'image. Nous examinons également les propriétés de notre méthode et établissons une brève comparaison avec quelques techniques de filtrage non-linéaires [14, 26, 1, 11]) en imagerie, les techniques de diffusion anisotropique [23, 3, 4] et les méthodes statistiques robustes (M-estimateurs locaux [8]). Enfin, nous illustrons la méthode en présentant quelques exemples de restauration d'images synthétiques et réelles.

## 2 Méthode d'estimation non-paramétrique

On suppose l'existence d'une fonction de régression inconnue  $u$ , c'est-à-dire l'image idéale définie de  $S$  sur  $\mathbb{R}$ . En chaque point  $X_i$  de de l'image, nous observons une variable bruitée  $Y_i$ . Les observations sont réparties régulièrement sur une grille  $S$  discrète et bidimensionnelle :

$$Y_i = u(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

où  $X_i \in \mathbb{R}^2$  représente les coordonnées spatiales 2D de l'image,  $n$  est le nombre de pixels de l'image et  $Y_i \in \mathbb{R}$  est l'intensité lumineuse observée à la position  $X_i$ . Nous supposons que les erreurs  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes, centrées, indépendantes et de variances inconnues  $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ .

### 2.1 Estimation locale

L'approche non-paramétrique classique consiste à supposer que la fonction de régression  $u(x)$  est localement constante dans un voisinage, de forme et de taille inconnues, d'un point  $x$ . Une question centrale en régression est

de caractériser ce voisinage qui sert de support d'estimation de la fonction inconnue. L'approche que nous envisageons ici, vise à déterminer ce voisinage, différent pour chaque point  $x$ , à partir des données observées. La fonction  $u$  localement constante par morceaux, est alors estimée à partir des observations  $Y_i$  qui se situent dans le voisinage de  $x$ , selon une méthode locale de maximum de vraisemblance.

La procédure d'estimation présentée est itérative et reprend cette idée. Lors de la première étape, on considère une fenêtre locale  $U_i^{(0)}$ , de taille non nulle, centrée au point d'estimation  $X_i$  de la grille  $S$ . Nous pouvons donc déterminer un premier estimateur  $\hat{u}^{(0)}(X_i)$  au sens du maximum de vraisemblance (ainsi que la variance associée  $\hat{\sigma}_i^{(0)}$ ) en calculant simplement la moyenne des données observées appartenant au voisinage initial  $U_i^{(0)}$  et centré au point  $X_i$ . On a :

$$\hat{u}^{(0)}(X_i) = \frac{1}{|U_i^{(0)}|} \sum_{X_j \in U_i^{(0)}} Y_j, \quad \hat{\sigma}_i^{(0)} = \frac{\hat{\sigma}_i^2}{|U_i^{(0)}|} \quad (2)$$

où  $\hat{\sigma}_i^2$  sont des estimateurs locaux de la variance du bruit et  $|U_i^{(0)}|$  représente le nombre de points  $X_j \in U_i^{(0)}$ . À l'itération suivante, on considère un voisinage de taille supérieure  $U_i^{(1)}$  tel que  $U_i^{(0)} \subset U_i^{(1)}$ , centré au même point  $X_i$ . Désormais, chaque point  $X_j$  appartenant à  $U_i^{(1)}$  reçoit un poids  $w_{i,j}^{(1)}$  fonction de  $\hat{u}^{(0)}(X_i)$  et  $\hat{u}^{(0)}(X_j)$ , obtenues lors de la première itération. Nous définissons alors l'estimateur  $\hat{u}^{(1)}(X_i)$  comme la moyenne pondérée des observations appartenant au voisinage  $U_i^{(1)}$ . La procédure fait croître, à chaque itération  $k$ , la taille du voisinage  $U_i^{(k)}$ . Formellement, à chaque itération  $k \geq 1$ , on a :

$$\hat{u}^{(k)}(X_i) = \frac{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)} Y_j}{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)}} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \in U_i^{(k)}\}} w_{i,j}^{(k)} Y_j}{\sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \in U_i^{(k)}\}} w_{i,j}^{(k)}} \quad (3)$$

où  $\mathbf{1}_{\{X_j \in U_i^{(k)}\}}$  est une fonction indicatrice qui vaut 1 si  $X_j \in U_i^{(k)}$  et 0 sinon, et les poids  $w_{i,j}^{(k)}$  sont des variables continues ( $0 \leq w_{i,j}^{(k)} \leq 1$ ), obtenues par une simple mesure de contraste entre  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i)$  et  $\hat{u}^{(k-1)}(X_j)$  calculées à l'itération précédente. Le détail du calcul des poids est présenté dans la section suivante [25]. La variance de cet estimateur  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  est alors obtenue comme suit :

$$\hat{\sigma}_i^{(k)} = \frac{\hat{\sigma}_i^2 \sum_{X_j \in U_i^{(k)}} \left( w_{i,j}^{(k)} \right)^2}{\left\{ \sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)} \right\}^2}. \quad (4)$$

Afin de stabiliser la procédure itérative, nous introduisons également une étape de contrôle pour valider la taille de fenêtre à retenir. Il s'agit de comparer les estimateurs  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  et  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i)$  obtenus lors de deux itérations consécutives (Section 2.3). Finalement, un critère global de corrélation entre les images restaurées successivement et l'image originale bruitée, est proposé en Section 2.4 pour mettre fin à la procédure algorithmique.

## 2.2 Poids adaptatifs

En comparant les deux estimateurs  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i)$  et  $\hat{u}^{(k-1)}(X_j)$ , il est possible de décider si les points  $X_i$  et  $X_j \in U_i^{(k)}$  appartiennent ou non à la même région. Cette analyse est nécessaire afin de ne pas lisser les discontinuités importantes. En fait, si l'estimateur  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i)$  diffère de manière significative de l'estimateur  $\hat{u}^{(k-1)}(X_j)$ , les points  $X_i$  et  $X_j$  sont probablement de part et d'autre d'une discontinuité. Pour chaque paire de points  $X_i$  et  $X_j \in U_i^{(k)}$ , cette significativité peut être quantifiée par une mesure de contraste:

$$c_{i,j}^{(k-1)} = \left| \hat{u}^{(k-1)}(X_i) - \hat{u}^{(k-1)}(X_j) \right|. \quad (5)$$

Ainsi, si le contraste  $c_{i,j}^{(k-1)}$  est très supérieur à l'estimateur  $\sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k-1)}}$ , alors  $X_j$  ne devrait pas participer à l'estimation de  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  et  $w_{i,j}^{(k)} \rightarrow 0$ .

Les variables continues  $w_{i,j}^{(k)}$  doivent être à présent spécifiées. Nous introduisons une fonction d'influence, symétrique, positive, décroissante en tout point le long du demi-axe positif et admettant une valeur maximale en 0 :

- si  $c_{i,j}^{(k-1)} \ll \sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k)}}$ , la fonction d'influence est proche de 1 et  $X_i$  et  $X_j$  appartiennent à la même région homogène ;
- si  $c_{i,j}^{(k-1)} \gg \sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k)}}$ , la fonction d'influence est proche de 0, suggérant que les points sont de part et d'autre d'une discontinuité.

Nous avons choisi arbitrairement comme fonction d'influence celle proposée par Perona et Malik [23] mais d'autres choix sont également possibles [3, 2]. Toutefois, dans notre formulation, le paramètre d'échelle dépend de la position spatiale puisque nous l'assimilons à une variance locale :

$$w_{i,j}^{(k)} = \left[ 1 + \left( \frac{c_{i,j}^{(k-1)}}{3\sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k-1)}}} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (6)$$

On peut donner un interprétation à cette modélisation adaptative [3, 4] : pour la majorité des points  $X_j \in U_i^{(k)}$ , les différences  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i) - \hat{u}^{(k-1)}(X_j)$  peuvent être décrites des variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes [25]. L'utilisation des statistiques robustes permet de quantifier la dispersion de ces différences. Par conséquent, la fonction de pondération  $w_{i,j}^{(k)}$  favorisera un

lissage local de l'image si les différences  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i) - \hat{u}^{(k-1)}(X_j)$  suivent une loi gaussienne et s'y opposera s'ils ne vérifient pas cette hypothèse statistique. D'après (6), le seuil à partir duquel l'influence des *outliers* est moins sensible survient lorsque le contraste  $c_{i,j}^{(k-1)}$  est supérieur à  $3\sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k-1)}}$ , selon la "règle des 3 sigma" bien établie pour les distributions gaussiennes.

## 2.3 Localisation par une fenêtre adaptative

L'inférence statistique repose ici sur une hypothèse structurelle du support d'estimation. Pour chaque point  $X_i$  de l'image, l'idée consiste à rechercher le plus grand voisinage (fenêtre) possible  $U_i$ , centré au point  $X_i$ , pour lequel l'hypothèse d'homogénéité n'est pas rejetée. Nous estimons une fonction de régression  $u$  à partir des données de l'image, en considérant un paramètre de nuisance, c'est à dire la taille de la fenêtre [16, 21]. Une métrique classique pour évaluer la qualité de l'estimateur  $\hat{u}(X_i)$  calculé pour un support  $U_i$ , est l'erreur quadratique moyenne (EQM) qui s'exprime généralement comme la somme de la variance et du biais au carré :

$$\begin{aligned} \text{EQM}(\hat{u}(X_i)) &= E[\hat{u}(X_i) - u(X_i)]^2 \\ &= [\text{Biais}(\hat{u}(X_i))]^2 + \hat{\vartheta}_i \end{aligned} \quad (7)$$

où  $E[\cdot]$  représente l'espérance mathématique. Comme nous l'avons brièvement évoqué dans l'introduction, l'idée directrice est de choisir une fenêtre d'estimation qui réalise l'équilibre biais-variance. Pour cela, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse que le biais au carré est une fonction croissante de la taille du voisinage, i.e.  $\text{Biais}(\hat{u}^{(k)}(X_i)) \leq \text{Biais}(\hat{u}^{(k+1)}(X_i))$ , et que la variance décroît selon ce même paramètre. Notre objectif est de déterminer la taille de fenêtre qui approximativement minimise l'erreur quadratique moyenne [16]. Si  $k^*$  désigne effectivement la valeur optimale qui équilibre exactement les deux termes, on a :

$$\text{EQM}(\hat{u}^{(k^*)}) = [\text{Biais}(\hat{u}^{(k^*)}(X_i))]^2 + \hat{\vartheta}_i^{(k^*)} = 2\hat{\vartheta}_i^{(k^*)}. \quad (8)$$

Considérons à présent un ensemble fini de fenêtres de tailles croissantes  $\{U_i^{(0)}, \dots, U_i^{(k_M)}\}$  centrées en  $X_i \in S$  tel que  $U_i^{(k)} \subset U_i^{(k+1)}$ , ainsi qu'une fenêtre initiale de petite taille  $U_i^{(0)}$  à laquelle est associé un estimateur  $\hat{u}^{(0)}(X_i)$ . Notons  $U_i^{(k^*)}$  la taille de fenêtre idéale qui réalise le minimum de l'erreur quadratique moyenne. On a alors les propriétés suivantes [19, 16]:

- i) pour la taille  $k^*$  qui définit la fenêtre idéale, le rapport  $\frac{\text{Biais}(\hat{u}^{(k^*)}(X_i))}{\sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k^*)}}}$  est constant ;
- ii) d'une part, si  $U_i^{(k)} < U_i^{(k^*)}$ , alors le biais est inférieur à la variance ( $\text{Biais}(\hat{u}^{(k)}(X_i)) < \sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k)}}$ ); d'autre part, si  $U_i^{(k)} > U_i^{(k^*)}$  la biais l'emporte sur la variance ( $\text{Biais}(\hat{u}^{(k)}(X_i)) > \sqrt{\hat{\vartheta}_i^{(k)}}$ ).

En conclusion, si la fenêtre  $U_i^{(k^*)}$  réalise l'équilibre biais-variance, la taille optimale  $k^*$  peut être obtenue à partir de la règle statistique suivante [19, 16] :

$$k^* = \max \left\{ k, \forall k' < k : \left| \hat{u}^{(k)}(X_i) - \hat{u}^{(k')}(X_i) \right|^2 \leq 8\hat{\sigma}_i^{(k')} \right\}. \quad (9)$$

Nous pouvons donner une interprétation à ce test : aussi longtemps que les estimateurs successifs  $\{\hat{u}^{(k)}(X_i)\}$  demeurent proches, on décide que le biais est petit, ce qui nous autorise à faire croître la taille de la fenêtre pour améliorer l'estimation du modèle constant (et diminuer la variance de l'estimateur  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$ ); si un estimateur  $\hat{u}^{(k')}(X_i)$  s'éloigne du précédent, nous interprétons cette situation comme une domination du biais sur le terme de variance. La détection de cette transition permet déterminer la taille critique de la fenêtre pour chaque pixel, au sens d'un critère d'équilibre biais-variance. Par ailleurs, ce choix de seuil nous assure que la taille de la fenêtre n'est presque jamais sous-estimée [16]. Ce seuil peut néanmoins être modifié et prendre des valeurs dans un intervalle restreint [2, 5; 4] selon les applications en traitement du signal [17].

## 2.4 Règle d'arrêt

Afin de réduire la complexité globale de l'algorithme, il est utile de prévoir un test statistique qui met fin à la procédure itérative précédemment décrite. Pour cela, nous prenons en compte l'ensemble des images filtrées (de moins en moins bruitées) obtenues à chacune des itérations, ainsi que l'image originale. Ce problème de la sélection non-manuelle du temps d'arrêt a déjà été évoqué dans le contexte du filtrage d'images par des techniques de diffusion anisotropique. Quelques efforts de recherche ont été entrepris en ce sens pour déterminer l'instant d'arrêt optimal, notamment en adoptant des critères de variance relative [27] et de corrélation [20].

Dans notre problématique, nous privilégions un critère de corrélation. On suppose alors que l'image restaurée et le bruit estimé sont idéalement non corrélés [20]. Ce critère semble plus performant que d'autres stratégies [20] et est cohérent avec les hypothèses statistiques que nous avons considérées (Section 2). Il suit que, si on fait l'hypothèse que le bruit inconnu  $\varepsilon$  est non corrélé avec l'image inconnue  $u$ , alors il est raisonnable de chercher à minimiser le coefficient de corrélation entre  $\hat{\varepsilon}^{(k)} = Y - \hat{u}^{(k)}$ , c'est-à-dire le bruit estimé à l'itération  $k$ , et l'image restaurée  $\hat{u}^{(k)}$  :

$$\text{corr}((Y - \hat{u}^{(k)}), \hat{u}^{(k)}) = \frac{\text{cov}((Y - \hat{u}^{(k)}), \hat{u}^{(k)})}{\sqrt{\text{var}(Y - \hat{u}^{(k)}) \cdot \text{var}(\hat{u}^{(k)})}}. \quad (10)$$

où  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$  désigne la covariance. Nous choisissons donc l'itération finale telle que l'expression suivante est la plus faible possible, c'est-à-dire :

$$k_c = \arg \min_k \text{corr}((Y - \hat{u}^{(k)}), \hat{u}^{(k)}). \quad (11)$$

En pratique, l'algorithme est arrêté à l'itération  $k_c = k$  ( $k_c \leq k_M$ ) si le coefficient de corrélation augmente à l'itération  $k + 1$ . Nous précisons que la taille des fenêtres augmente globalement à chaque itération  $k$  si le critère d'arrêt (11) n'est pas vérifié (ou si  $k \leq k_M$ ). Cependant, l'estimateur  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  est "gelé" au point  $X_i$  si le critère local (9) est validé, i.e.  $\hat{u}^{(k)}(X_i) = \hat{u}^{(k^*)}(X_i), \forall k > k^*$ . En pratique, le point  $X_i$  n'est plus traité par l'algorithme au cours des itérations suivantes dès que la règle (9) est vérifiée au point  $X_i$ .

## 3 Procédure d'estimation préservant les discontinuités

Dans la seconde partie de l'article, nous présentons une description synthétique de la méthode d'estimation en commençant par l'étape initiale de l'algorithme. L'ingrédient principal de la procédure est la définition d'une séquence de voisinages, de tailles croissantes, autour de chaque pixel. On définit une séquence de fenêtres  $\{U_i^{(k)}\}$ ,  $k = 0, \dots, k_M$  avec  $U_i^{(k)} \subset U_i^{(k+1)}$  centrée en  $X_i$ , où  $|U_i^{(k)}|$  représente le nombre de points  $X_j$  appartenant à  $U_i^{(k)}$ , c'est-à-dire  $|U_i^{(k)}| = \#\{X_j \in U_i^{(k)}\}$ . La procédure d'estimation adaptative réalise alors les étapes suivantes.

(a) *Initialisation* : pour chaque point  $X_i$ , nous calculons les estimateurs initiaux  $\hat{u}^{(0)}(X_i)$  et les variances associées  $\hat{\sigma}_i^{(0)}$  définis dans (2) et nous fixons  $k$  à 1. Dans cette dernière équation,  $\hat{\sigma}_i^{(0)}$  est l'estimateur local de la variance du bruit, préalablement calculée à partir des données initiales (Section 4.4).

(b) *Adaptation* : Les poids  $w_{i,j}^{(k)}$  sont calculés à partir de (6) et de nouvelles estimations sont obtenues pour tous les points  $X_i$  de la grille:

$$\hat{u}^{(k)}(X_i) = \frac{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)} Y_j}{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)}}, \quad \hat{\sigma}_i^{(k)} = \frac{\hat{\sigma}_i^2 \sum_{X_j \in U_i^{(k)}} (w_{i,j}^{(k)})^2}{\left\{ \sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w_{i,j}^{(k)} \right\}^2}.$$

(c) *Contrôle* : Une fois l'estimateur  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  obtenu au point  $X_i$ , nous le comparons aux estimateurs  $\{\hat{u}^{(k')}(X_i)\}$ , collectés au cours des itérations précédentes ( $k' < k$ ). D'après la règle (9), s'il existe un seul index  $k' < k$  tel que :

$$\left| \hat{u}^{(k)}(X_i) - \hat{u}^{(k')}(X_i) \right| > 2\sqrt{2} \sqrt{\hat{\sigma}_i^{(k')}},$$

alors nous n'acceptons pas l'estimateur courant  $\hat{u}^{(k)}(X_i)$  et retenons définitivement  $\hat{u}^{(k-1)}(X_i)$  comme l'estimateur final au point  $X_i$  (c'est-à-dire  $k^* = k - 1$  au point  $X_i$ ). Au cours des itérations suivantes de l'algorithme qui fait croître la taille des fenêtres, l'estimateur au point  $X_i$  est alors inchangé.

(d) *Règle d'arrêt* : La procédure est arrêtée si  $k = k_M$  ou si  $\text{corr}((Y - \hat{u}^{(k+1)}), \hat{u}^{(k+1)}) > \text{corr}((Y - \hat{u}^{(k)}), \hat{u}^{(k)})$ . Dans le cas contraire,  $k$  est augmenté de 1 et l'étape d'*adaptation* est répétée.

## 4 Paramètres de la procédure

Nous présentons à présent un cadre général permettant de fixer les paramètres de la procédure d'estimation résumée précédemment. Une modification des paramètres ainsi obtenus a un impact relativement faible sur les résultats finaux de restauration.

### 4.1 Taille de la fenêtre initiale $U^{(0)}$

La fenêtre initiale  $U^{(0)}$  doit être aussi petite que possible. Dans les expérimentations que nous avons menées, nous avons choisi  $|U^{(0)}| = 1$  ou encore  $U^{(0)} = X_i$ .

### 4.2 Séquence de voisinages $\{U^{(k)}\}$

La séquence de voisinages  $\{U^{(k)}\}$  est définie de manière pragmatique et ne repose pas sur des considérations théoriques particulières. La séquence doit seulement satisfaire les conditions suivantes:  $X_i \in U_i^{(0)}$  et  $U_i^{(k-1)} \subset U_i^{(k)}$ . Dans nos expérimentations, nous avons choisi une suite  $\{U^{(k)}\}$  de fenêtres telle que  $|U^{(k)}| = (2k+1) \times (2k+1)$  pixels avec  $k = 0, 1, 2, \dots, k_M$ . La valeur maximale  $|U^{(k_M)}|$  est supposée très grande (e.g.  $k_M = 15$ ).

### 4.3 Borne sur l'itération finale $k_M$

Nous pouvons fixer la taille maximale des fenêtres d'estimation afin de borner la complexité algorithmique de la procédure. Celle-ci sera d'autant plus faible que  $k_M$  est faible. Augmenter  $k_M$  permet potentiellement une réduction de la variance locale dans les zones homogènes de l'image mais n'altère pas les estimateurs aux points localisés dans le voisinage des discontinuités. Une valeur  $k_M = 15$  s'est avérée très satisfaisante dans la plupart des cas traités. Néanmoins, le critère de corrélation, introduit en section 2.4, permet d'éviter de fixer précisément ce paramètre dans beaucoup de cas traités.

### 4.4 Estimations locales de la variance du bruit

L'estimation locale de la variance du bruit (voir (4)) est une étape préliminaire de la procédure de restauration et sert d'initialisation à celle-ci. Dans des cas réels, la variance locale  $\sigma_i^2$  du bruit en chaque point  $X_i$  est inconnue. Un estimateur classique  $\hat{\sigma}_i^2$ , calculé à partir des données observées, est alors celui-ci :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{|W_i|} \sum_{X_j \in W_i} \hat{e}_j^2 \quad (12)$$

où  $W_i$  désigne une région (fenêtre) centrée au point  $X_i$  et les pseudo-résidus  $\hat{e}_j$  sont définis à partir des données (on note  $Y_{j_1, j_2}$  l'observation  $Y_j$  au site  $j = (j_1, j_2)$ ) [12] :

$$\hat{e}_j = \frac{4Y_{j_1, j_2} - (Y_{j_1+1, j_2} + Y_{j_1-1, j_2} + Y_{j_1, j_2+1} + Y_{j_1, j_2-1})}{\sqrt{20}}. \quad (13)$$

Le coefficient de normalisation est ici indispensable car les variables  $\{Y_i\}$  sont des variables aléatoires gaussiennes et de variance  $\sigma_i^2$ .

En présence de discontinuités dans la fenêtre  $W_i$ , un estimateur local robuste de la variance du bruit semble préférable. Les fortes discontinuités à l'intérieur  $W_i$  sont en fait assimilées à des *outliers* vis-à-vis des contrastes locaux dans la fenêtre  $W_i$ . D'après [4], nous suggérons d'estimer localement  $\hat{\sigma}_i^2$  selon le critère suivant :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \max(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_{W_i}^2) \quad (14)$$

où  $\hat{\sigma}^2$  et  $\hat{\sigma}_{W_i}^2$  sont les estimateurs robustes de la variance du bruit, calculés respectivement sur l'image entière et à l'intérieur d'une fenêtre locale  $W_i$  centrée au point  $X_i$ . La variance du bruit calculée sur l'image entière est obtenue classiquement [3] :

$$\hat{\sigma} = 1.4826 \text{ median}_{\hat{e}} (|\hat{e}| - \text{median}_{\hat{e}}(|\hat{e}|)) \quad (15)$$

où  $\hat{e} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$  est l'ensemble des  $n$  pseudo-résidus calculées et la constante vient du fait que l'écart absolu médian pour une distribution gaussienne centrée de variance unitaire, est  $0.6745 = 1./1.4826$ . L'estimateur local de la variance du bruit  $\hat{\sigma}_{W_i}^2$  est calculée de manière analogue [4] :

$$\hat{\sigma}_{W_i} = 1.4826 \text{ median}_{\hat{e}_{W_i}} (|\hat{e}_{W_i}| - \text{median}_{\hat{e}_{W_i}}(|\hat{e}_{W_i}|)) \quad (16)$$

où  $\hat{e}_{W_i}$  est l'ensemble des  $|W_i|$  pseudo-résidus associés à la fenêtre  $W_i$ . La variance  $\hat{\sigma}_{W_i}^2$  joue un rôle essentiel pour filtrer les textures fines très localisées. Enfin, notons que la variance globale estimée  $\hat{\sigma}^2$  correspond aussi à une borne inférieure qui permet d'éviter une amplification du bruit au cours de la restauration, notamment dans les zones relativement homogènes.

Sur le plan pratique, le calcul des estimateurs locaux de la variance du bruit est par exemple effectué sur des fenêtres  $W_i$  de taille  $(2k_M + 1) \times (2k_M + 1)$  pixels, c'est-à-dire  $W_i = U_i^{(k_M)}$  pour chaque position  $X_i$  de  $S$ . Toutefois, une grande précision pour déterminer  $W_i$  n'est pas nécessaire à ce niveau de l'algorithme. Si l'image traitée est très faiblement texturée, on peut même s'affranchir de calculer ces estimateurs locaux et considérer  $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2$ . En effet, la variance  $\hat{\sigma}_i$  est probablement inférieure à  $\hat{\sigma}^2$  pour ce type de situations. Ceci n'est plus vrai pour des images comportant des régions avec de fortes variations.

## 5 Propriétés

Dans ce paragraphe, nous énonçons quelques propriétés de l'algorithme d'estimation.

### 5.1 Robustesse aux outliers

La méthode décrite reconnaît automatiquement les *outliers* en leur assignant des poids faibles  $0 \leq w_{ij} \leq 1$ . Dans les zones homogènes, l'estimateur favorise l'émergence de régions presque constantes notamment lorsque la taille du voisinage est très élevée. Par ailleurs, si l'image traitée est

une fonction constante bruitée (bruit additif gaussien), l'estimateur non-paramétrique que nous avons décrit est similaire à l'estimateur paramétrique global de cette fonction constante.

## 5.2 Complexité

Le nombre d'opérations nécessaire pour restaurer une image de  $n$  pixels, est de l'ordre de  $O(n|U_i^{(k^*)}|)$  opérations où  $|U_i^{(k)}|$  désigne le nombre de points d'un voisinage typique  $U_i^{(k)}$  à l'étape  $k$ , et si la séquence  $\{U_i^{(k)}\}$  est une séquence de fenêtres de tailles croissantes.

## 5.3 Comparaison avec d'autres filtrages

Le problème du filtrage non-linéaire a largement été abordé dans la littérature. Nous proposons ici de comparer notre approche à quelques techniques usuelles de restauration qui lui sont proches.

Les techniques de filtrage gaussien non-linéaire [14] et leurs évolutions récentes [26, 1, 11] (filtrage itératif ou non) considère un voisinage de taille constante, qui peut être élevée. La méthode que nous proposons convient mieux aux structures locales observées puisque le voisinage est adapté au contenu des images. En ce sens, notre méthode d'estimation a des propriétés communes avec l'algorithme dynamique adaptatif *Mean Shift* [9], qui déplace une fenêtre d'estimation de taille fixe.

Pour mettre en évidence les caractéristiques de notre méthode, il nous semble important de rappeler la définition des M-estimateurs locaux [8]. En reprenant les notations introduites en Section 2, un M-estimateur local  $\hat{u}_M^{(k)}(X_i)$  est défini comme suit :

$$\hat{u}_M^{(k+1)}(X_i) = \frac{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w(Y_j - \hat{u}_M^{(k)}(X_j)) Y_j}{\sum_{X_j \in U_i^{(k)}} w(Y_j - \hat{u}_M^{(k)}(X_j))}$$

où  $w(z)z = \rho'(z)$  et  $\rho(z)$  est une fonction robuste, symétrique, positive, non décroissante pour  $z \geq 0$ , admettant un maximum unique à l'origine. En conséquence,  $\hat{u}_M^{(k)}(X_i)$  et  $\hat{u}_M^{(k)}(X_j)$ , bien que voisins sur la grille discrète, peuvent être de variabilité différente. En effet, aucune dépendance explicite entre deux estimateurs voisins est introduite dans cette formulation. Les images restaurées comportent alors très peu de zones homogènes de grande taille.

Enfin, nous rappelons que les techniques de filtrage anisotrope pour la restauration, ignorent les données originales dès la seconde itération [23, 3]. Dans notre méthode, les données initiales qui contiennent toute l'information sur les discontinuités, sont recyclées à chaque itération.

## 6 Résultats expérimentaux

Nous présentons quelques résultats expérimentaux qui permettent d'évaluer la performance de l'algorithme pour restaurer des images 2D scalaires. Sur un premier exemple,

nous évaluons la méthode d'estimation non-paramétrique sur l'image originale "house-garden" (figure 1) perturbée par un bruit additif gaussien d'écart-type 12 (Fig.2a) et d'écart-type 25 (Fig.2c). Les images restaurées, obtenues au bout de 7 itérations, sont respectivement présentées Figs. 2b et 2d. Les larges zones homogènes sont ici bien reconstruites et les détails structurels ne sont pas exagérément délocalisés.

Sur un second exemple, l'image synthétique est perturbée avec un bruit non-gaussien (Fig. 3a). À des fins de comparaison, nous reportons également en figure 3, les résultats obtenus avec des techniques de diffusion anisotrope [3] (Fig. 3b) et une méthode de restauration qui minimise la variation totale [10] (Fig. 3c). Ces résultats ont déjà été publiés dans [10]. Nous avons également appliqué notre méthode d'estimation non-paramétrique en précisant que la variance du bruit est identique en tout point de l'image (Fig. 3d). Les résultats présentés mettent en évidence le bon comportement de notre algorithme, notamment si on examine la préservation des discontinuités : les caractéristiques géométriques telles que les coins et les bords ainsi que les contrastes originaux sont bien restitués. La règle d'arrêt, basée sur une critère de corrélation, permet automatiquement de mettre fin à l'algorithme. Sur cet exemple et ceux qui suivent, la régularisation est assurée par la prise en compte du contexte définie par le support de la fenêtre et des estimations voisines du point traité.

Un troisième exemple est présenté Figs. 4 et 5. La méthode d'estimation non-paramétrique est appliquée à l'image "cameraman" de taille  $256 \times 256$  pixels (Fig. 4a). Les figures 4b et 5b mettent en évidence le potentiel du filtrage adaptatif pour éliminer la texture fine après  $k_c = 7$  itérations (le nombre d'itérations est automatiquement détecté). Sur ces figures, les détails tels que les contours des bâtiments en arrière-plan, sont relativement préservés. Par ailleurs, la figure 4c présente les résultats d'estimation de  $\sigma_i^2$  à l'intérieur d'une fenêtre locale de taille  $k_M = 15$ . Les régions sombres correspondent à de fortes valeurs de



FIG. 1 – Image originale "house-garden".



(a) Image avec bruit additif gaussien ( $\sigma = 12$ )



(b) Image restaurée ( $\sigma = 12$ )



(c) Image avec bruit additif gaussien ( $\sigma = 25$ )



(d) Image restaurée ( $\sigma = 25$ )

FIG. 2 – Restaurations d’images artificiellement bruitées (“house-garden”).

$\hat{\sigma}_i^2$ , c’est-à-dire des régions avec de fortes variations. Les régions claires sur la figure 4c correspondent aux régions uniformes dans l’image, c’est-à-dire  $\hat{\sigma}_i^2 = \sigma^2$ . La figure 4d présente les moyennes des poids  $\{w_{ij}^{(k^*)}\}$  calculées sur un support défini par la fenêtre optimale centrée au point  $X_i$ ; les zones sombres correspondent aux régions présentant de fortes variations. La figure 4e décrit par ailleurs la localisation et la taille des fenêtres d’estimation optimale; nous avons codé du plus sombre au plus clair la taille des fenêtres optimales, respectivement des plus petites aux plus grandes. On remarque aussitôt que les fenêtres de petite taille se situent dans le voisinage des discontinuités de l’image. Enfin, l’évolution du coefficient de corrélation en fonction du nombre d’itérations est présenté en figure 4e: le coefficient de corrélation décroît très rapidement jusqu’à atteindre un minimum à l’itération 7.

Finalement, nous avons testé l’algorithme sur trois images de microscopie confocale qui décrivent des neurones (figures 6a-c). La microscopie confocale est une technologie de visualisation non-invasive pour observer des spécimens biologiques dans un environnement naturel ou en culture. Les images restaurées comportent davantage de zones homogènes que les images originales avec une bonne préservation des objets de petites tailles et des structures fines (Figs. 6d-f), ce qui facilite l’extraction des régions d’intérêt ou le comptage des entités.

La méthode complète (i.e. estimation locale de la variance du bruit) nécessite approximativement une dizaine de secondes de temps CPU sur une station de travail 2,6 Ghz, pour traiter une image de taille  $256 \times 256$  pixels. Les temps de calcul sont inférieurs à 5 secondes si on suppose que la variance du bruit est identique en tout point de l’image.

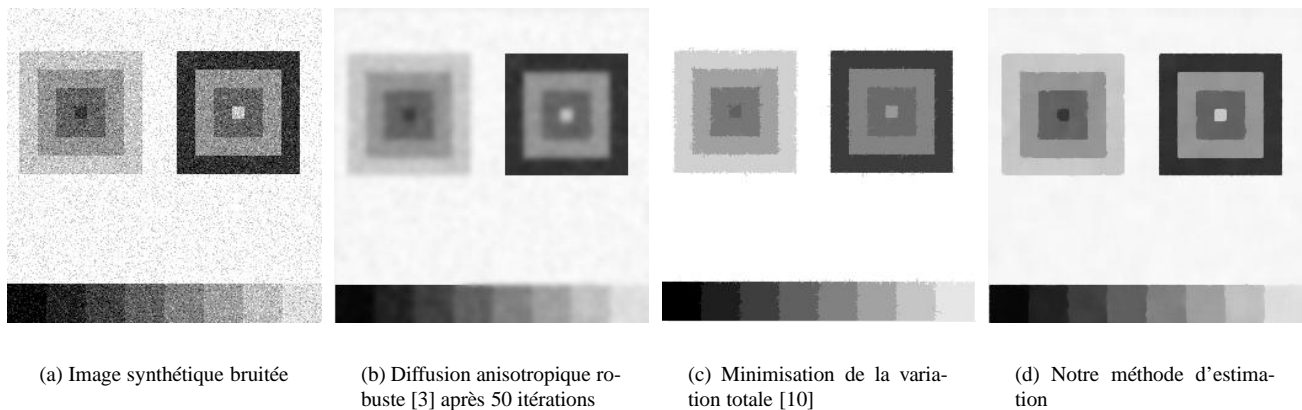


FIG. 3 – Restauration d'une image synthétique bruitée.

## 7 Conclusion

Nous avons décrit un algorithme d'estimation non-paramétrique, s'appuyant sur une description structurelle du support d'estimation par des fenêtres locales, pour supprimer le bruit dans les images tout en préservant des caractéristiques géométriques. Il s'avère très performant et peut constituer une alternative possible aux méthodes de restauration usuelles. Néanmoins, l'algorithme est relativement lent par rapport à d'autres méthodes de restauration, mais peut être parallélisé. Par ailleurs, la méthode ne repose pas sur la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie et la complexité de l'algorithme peut être prédite. Un autre avantage de la méthode est qu'aucun paramètre interne est ajusté comme cela est assez fréquent pour beaucoup d'autres méthodes. Les résultats expérimentaux ont démontré son efficacité pour traiter des images de modalités différentes. Plusieurs pistes de recherche sont toutefois à envisager pour prolonger ce travail. En particulier, il serait utile de faire croître la fenêtre bord après bord si la proposition de faire croître simultanément les quatre bords est rejetée. Cette stratégie permettra ainsi une meilleure adaptation aux structures locales des images, avec cependant une augmentation de la charge calculatoire. Nous prévoyons aussi d'étudier précisément la modélisation des poids intervenant dans l'estimation et d'étendre la méthode au cas de bruits non-gaussiens dans les images. L'algorithme peut être également étendu au cas du traitement d'images 3D multispectrales (imagerie de microscopie confocale). Enfin, les propriétés mathématiques de la méthode sont également à établir de manière plus complète.

## Références

- [1] D. Barash, A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing and the nonlinear diffusion equation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 6, pp. 844-847, 2002.
- [2] A. Ben Hamza, H. Krim. A variational approach to maximum a posteriori estimation for image denoising, In *Proc. EMMCVPR'01*, LNCS 2134, pp. 19-34, Sophia-Antipolis, France, 2001.
- [3] M.J. Black, G. Sapiro, D. Marimont, D. Heeger, Robust anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 7, No. 3, pp. 421-432, 1998.
- [4] M.J. Black, G. Sapiro, "Edges as outliers: Anisotropic smoothing using local image statistics", In *Scale-Space Theories in Computer Vision*, pp. 259-270, Kerkyra, Greece, 1999.
- [5] F. Catté, P.-L. Lions, J.-M. Morel, T. Coll, Image selective smoothing and edge-detection by nonlinear diffusion, *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 29, No.1, pp. 182-193, 1992.
- [6] T. Chan, S. Osher, J. Shen, The digital TV filter and nonlinear denoising, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 10, No. 2, pp. 231-241, 2001.
- [7] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, M. Barlaud, Deterministic edge-preserving regularization in computer imaging, *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2): 298-311, 1997.
- [8] C.K. Chu, I. Glad, F. Godtliebsen, J.S. Marron, Edge-preserving smoothers for image processing, *J. American Statistical Association*, Vol. 93, No 442, pp. 526-541, 1998.
- [9] D. Comaniciu, P. Meer, Mean-shift analysis and its applications, In *International Conference on Computer Vision*, pp. 1197-1203, Kerkyra, Greece, 1999.
- [10] F. Dibos, G. Koepfler, P. Monasse, Total Variation Minimization for Scalar and Vector Image Regularization, *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*, Springer Verlag, S. Osher and N. Paragios (eds), 2002.



(a) Image originale "cameraman"



(b) Résultats de la méthode de restauration après 7 itérations



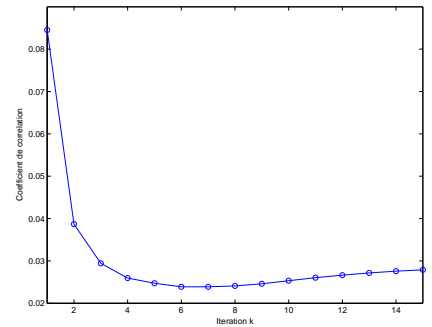
(c) Estimation des variances locales du bruit (voir texte)



(d) Image des poids  $w_{ij}^{(k^*)}$



(e) Localisation et taille des fenêtres d'estimation



(f) Evolution du coefficient de corrélation en fonction du nombre d'itérations

FIG. 4 – Élimination de la texture fine sur l'image réelle "cameraman".



FIG. 5 – Élimination de la texture fine sur une région d'intérêt de l'image "cameraman".

[11] M. Elad, On the origin of the bilateral filter and ways to improve it, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 11, No. 10, pp. 1141-1151, 2002.  
 [12] T. Gasser, L. Sroka, C. Jennen Steinmetz, Residual

variance and residual pattern in nonlinear regression, *Biometrika*, Vol. 73, pp. 625-633, 1986.

[13] S. Geman, D. Geman, Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, Vol. 6, No. 6, pp. 721-741, 1984.  
 [14] F. Godtliebsen, E. Spjotvoll, J.S. Marron, A nonlinear gaussian filter applied to images with discontinuities, *J. Nonparametric Statistics*, Vol. 8, pp. 21-43, 1997.  
 [15] A. Goldenshluger, A. Nemirovski, On spatial adaptive estimation of nonparametric regression, *Math. Methods of Statistics*, Vol. 6, No. 2, pp. 125-170, 1997.  
 [16] A. Juditsky, Wavelet estimators: adapting to unknown smoothness, *Math. Methods of Statistics*, No. 1, pp. 1-20, 1997.  
 [17] V. Katkovnik, K. Egiazarian, J. Astola, Application of the ICI principle to window size adaptive median

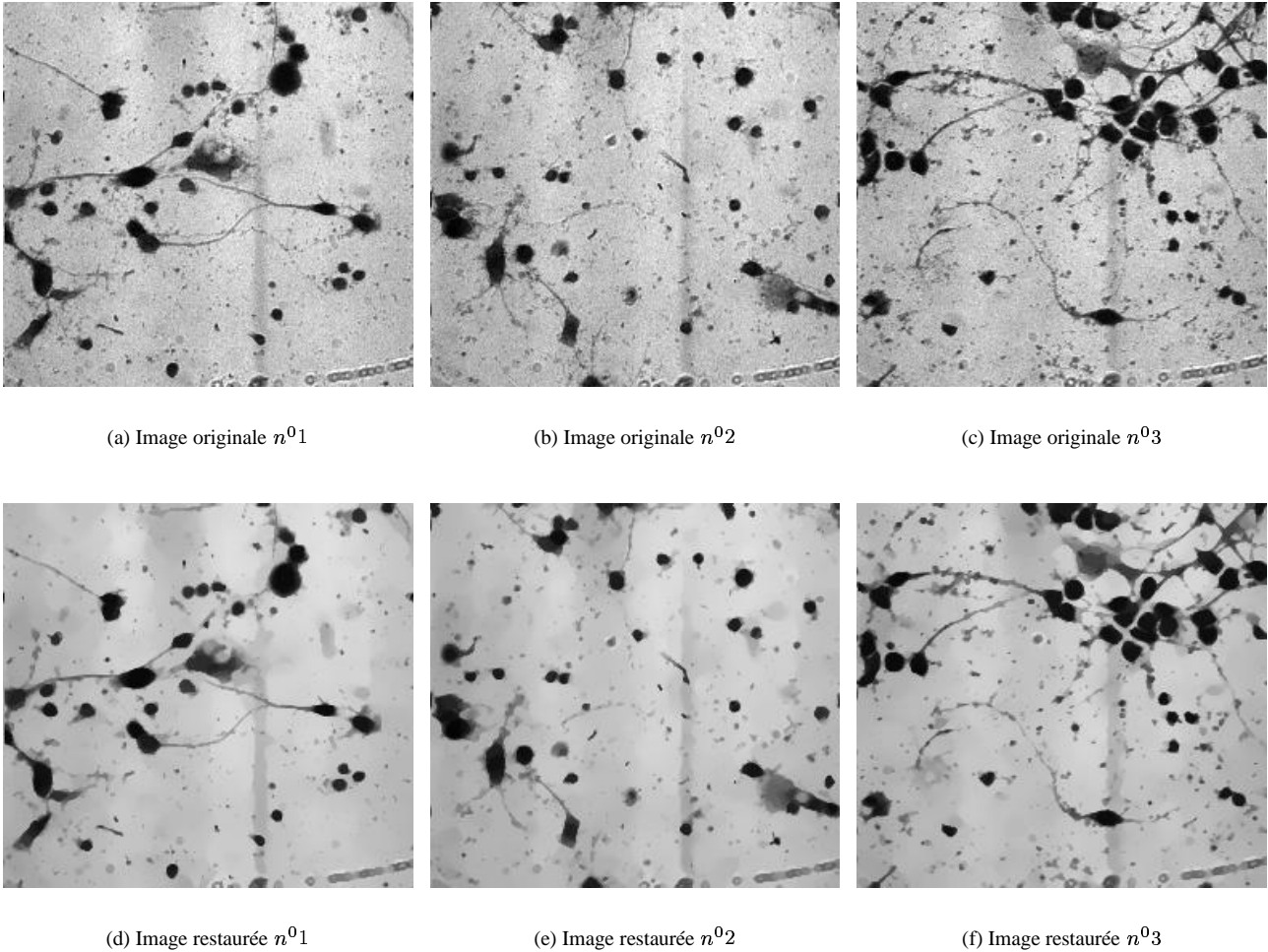


FIG. 6 – Restauration d'images de neurones en microscopie confocale.

- filtering, *Signal Processing*, N. 83, pp. 251-257, 2003.
- [18] P. Kornprobst, *Contributions à la Restauration d'Images et à l'Analyse de Séquences: Approches Variationnelles et Solutions de Viscosité*, Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [19] O. Lepski, Asymptotically minimax adaptive estimation 1: upper bounds, *SIAM J. Theory of Probability and Applications*, Vol. 36, No. 4, pp. 654-659, 1991.
- [20] P. Mrazek, Selection of optimal stopping time for nonlinear diffusion filtering, In *Scale-Space and Morphology in Computer Vision*, pp. 290-298, Vancouver, Canada, 2001.
- [21] M. Maurizot, *Analyse du mouvement fluide 2D dans des séquences d'images numériques: localisation, caractérisation et suivi des points singuliers*, Thèse doctorat, Université de Rennes 1, 1997.
- [22] D. Mumford, J. Shah, Optimal approximations by piecewise smooth functions and variational problems, *Communication on Pure and applied Mathematics*, Vol. 42, No.5, pp. 577-685, 1989.
- [23] P. Perona, J. Malik, Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 12, No. 7, pp. 629-239, 1990.
- [24] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi, A geometrical framework for low-level vision, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 7, No. 3, pp. 310-318, 1998.
- [25] J. Polzehl, V. Spokoiny, Adaptive weights smoothing with application to image restoration, *J. Royal Statistical Society B.*, Vol. 62, Part 2, pp. 335-354, 2000.
- [26] C. Tomasi, R. Manduchi, Bilateral filtering for gray and color images, In *International Conference on Computer Vision.*, pp. 839-846, Bombay, India, 1998.
- [27] J. Weickert, Coherence-enhancing diffusion of colour images, *Image and Vision Computing*, Vol. 17, pp. 201-212, 1999.