Trajectographie passive d'un objet en mouvement uniformément accéléré en dimension 3

Claude JAUFFRET[1], Jean Pierre LE CADRE[2]
[1]UTV, MS/GESSY,
Avenue Georges Pompidou, BP 56, 83 162 LA VALETTE DU VAR CEDEX

[2]IRISA,
Campus de Beaulieu, 35 042 RENNES CEDEX

jauffret@isitv.univ-tln.fr, lecadre@irisa.fr

Résumé - Le problème de la trajectographie passive par mesures d'angle d'un objet en mouvement uniformément accéléré, dans un espace de dimension 3, à partir d'un observateur fixe est considéré dans ce papier. On démontre dans un premier temps que, pourvu qu'une des composantes du vecteur accélération soit connue, la trajectoire du mobile est complètement observable à partir d'un continuum de mesures d'azimut-site. La confrontation d'estimateurs classiques aux données permet de d'apprécier le maximum de vraisemblance et le filtre de Kalman étendu en coordonnées polaires modifiées.

Abstract – Angles-only tracking of an accelerated objet in a 3D environment is analyzed. We prove that if one of the components of acceleration vector is known, the mobile trajectory is observable from an elevation-bearing history collected by a motionless observer. Classical estimators are then confronted to data.

1. Présentation du problème et notations

L'observateur (fixe) se trouve au centre du repère $(0, x, y, z)$. Il mesure continûment le couple azimut-site $(\theta(t), \varphi(t)), t \geq 0$. Le mobile se déplace selon un mouvement uniformément accéléré. Sa base de lancement est au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), son vecteur-vitesse initial est de coordonnées $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ et son vecteur-accélération de coordonnées $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ est supposé constant. Seule l'accélération verticale $\ddot{z}$ est parfaitement connue ; on la notera dans la suite g. La trajectoire déterministe du mobile peut donc être entièrement caractérisée par le vecteur

$$X(t_0) = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \ddot{x}_0, \ddot{y}_0)^T .$$

Le mouvement du mobile peut être décrit par l'équation d'état (pour $t_0 = 0$)

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 g/2 \\ 0 \\ 0 \\ tg \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

synthétisée sous la forme

$$X(t) = \phi(t, t_0) X(t_0) + R(t) .$$

L'équation de mesure après linéarisation [2] s'écrit

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta(t)\sin\varphi(t) & \cos\theta(t)\sin\varphi(t) & -\cos\varphi(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

ou de manière plus concise,

$$Z(t) = C(t) X(t) .$$

Notons que cette mesure est toujours nulle, i.e.

$$Z(t) \equiv [0 \quad 0]^T .$$

Le système complet est ainsi décrit par le système linéaire (non-stationnaire)

$$\begin{cases} X(t) = \phi(t, t_0) X(t_0) + R(t) \\ Z(t) = C(t) X(t) \equiv (0,0)^T \end{cases}$$

2. Etude de l'observabilité

Deux analyses de l'observabilité sont envisageables : l'une portant sur le système à temps discret, l'autre sur le système à temps continu [2,3]. Si la première est plus en accord avec la réalité, la seconde est plus rapide pour le problème qui nous intéresse.

La démonstration de l'observabilité du système (ou encore de l'état *X(t)*) est fondée sur le résultat suivant [2] :

Le système est observable sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ si et seulement si

$$(C(t)\phi(t, t_0) Y = 0, \forall t \in [t_0, t_1]) \Rightarrow (Y = 0).$$

On aboutit alors à la conclusion suivante :

La trajectoire d'un mobile en mouvement uniformément accéléré peut être entièrement reconstituée à partir du continuum de mesures azimut-site délivré par un observateur fixe, pourvu que l'on connaisse parfaitement l'accélération verticale (la constante de gravité) et que les mesures varient dans le temps.

Démonstration :
La démonstration de ce résultat est fondée sur une technique de linéarisation des mesures exactes, employée auparavant dans [1,2] pour les modèles dynamiques à temps continu.
Soit un vecteur Y tel que $C(t)\phi(t,t_0)Y = 0, \forall t \in [t_0, t_1]$. Désignons ses coordonnées par $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)^T$; alors

$$C(t)\phi(t,t_0)Y = \Gamma(t)\left\{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

où

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t)\sin\varphi(t) & \cos\theta(t)\sin\varphi(t) & -\cos\varphi(t) \end{bmatrix}.$$

Le noyau de $\Gamma(t)$, noté classiquement $Ker[\Gamma(t)]$, est donc une droite de $\mathbf{R}^3$.
Désignons, par souci de simplification des écritures, les coordonnées de $X(t_0)$ par $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)^T$ et posons

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ g \end{bmatrix},$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} et\ Y_2 = \begin{bmatrix} y_7 \\ y_8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque $Ker[\Gamma(t)]$ est une droite et que par définition,

$$C(t)X(t) = C(t)[\phi(t,t_0)X(t_0) + R(t)]$$
$$= \Gamma(t)\left[X_0 + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_2\right] \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le vecteur $X_0 + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_2$ est colinéaire au vecteur $Y_0 + tY_1 + \frac{t^2}{2}Y_2$, dans la mesure où $Y \neq 0$.
Faisons ici l'hypothèse que Y n'est pas nul ; il existe donc une fonction réelle $\alpha(t) \in C^\infty$ telle que

$$X_0 + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_2 = \alpha(t)\left[Y_0 + tY_1 + \frac{t^2}{2}Y_2\right].$$

Montrons dans un premier temps que $y_7 = y_8 = 0$.
En effet, la colinéarité des deux vecteurs entraîne en particulier que

$$dét\begin{bmatrix} x_1 + tx_4 + \frac{t^2}{2}x_7 & y_1 + ty_4 + \frac{t^2}{2}y_7 \\ x_2 + tx_5 + \frac{t^2}{2}x_8 & y_2 + ty_5 + \frac{t^2}{2}y_8 \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

et

$$dét\begin{bmatrix} x_2 + tx_5 + \frac{t^2}{2}x_8 & y_2 + ty_5 + \frac{t^2}{2}y_8 \\ x_3 + tx_6 + \frac{t^2}{2}g & y_3 + ty_6 \end{bmatrix} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

.

Le second déterminant étant un polynôme de degré 4, sa nullité n'est possible que si $y_8 = 0$. Puis, la même argumentation implique que $y_7 = 0$.
Le vecteur $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, 0, 0)^T$ satisfait donc l'équation

$$\alpha(t)[Y_0 + tY_1] - \left[X_0 + tX_1 + \frac{t^2}{2}X_2\right] = 0, \forall t \in [t_0, t_1] \quad (*)$$

Calculons alors les dérivées successives du membre de gauche de l'équation précédente :

$$\alpha'(t)[Y_0 + tY_1] + \alpha(t)Y_1 - X_1 - tX_2 = 0, \forall t \in [t_0, t_1] (1)$$
$$\alpha''(t)[Y_0 + tY_1] + 2\alpha'(t)Y_1 - X_2 = 0, \forall t \in [t_0, t_1] (2)$$
$$\alpha'''(t)[Y_0 + tY_1] + 3\alpha''(t)Y_1 = 0, \forall t \in [t_0, t_1] (3).$$

En conclusion, si $Y \neq 0$, alors l'équation (3) entraîne que Y_0 et Y_1 sont liés (à moins que l'un des deux soient nuls). Notons que les deux ne peuvent pas être nuls simultanément, car ce serait contraire à notre hypothèse. Examinons les trois cas :

1) Y_0 et Y_1 ne sont pas nuls : dans ce cas, ils sont colinéaires et par l'équation (2) sont colinéaires à X_2. L'équation (1) nous permet de conclure que X_1 est colinéaire à X_2.
2) Y_0 est nul et Y_1 ne l'est pas : l'examen de l'équation (2) puis celui de l'équation (1) nous conduisent à la même conclusion : X_1 est colinéaire à X_2.
3) Enfin, Y_0 n'est pas nul alors que Y_1 l'est : on conclut encore que X_1 est colinéaire à X_2.

Dans tous les cas de figure, si $Y \neq 0$, l'équation (*) entraîne que X_0 est colinéaire à X_1 et à X_2.
De deux choses l'une :

- soit X_0, X_1 et X_2 sont réellement colinéaires : c'est le cas où les mesures demeurent constantes et le système n'est pas observable.

- Soit ce n'est pas le cas ; alors nécessairement $Y = 0$ et par conséquent le système est observable.

Remarque : la connaissance de g est fondamentale ; la gravité est équivalente à une manœuvre de l'observateur.

3. Le cas particulier d'une trajectoire parabolique inscrite dans un plan

On considère, dans cette partie, le cas particulier où le mobile a une trajectoire parabolique inscrite dans le plan vertical d'équation $\{y = 0\}$. Lancé selon un vecteur vitesse $(\dot{x}_0, \dot{z}_0)$, le mobile n'est soumis qu'à la pesanteur g supposée connue. Dès lors, sa trajectoire est entièrement décrite par l'équation

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 g/2 \\ 0 \\ tg \end{bmatrix}$$

avec $X(t_0) = (x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)^T$.

On dispose également des seules mesures de site $\varphi(t) \underline{\underline{\Delta}} Arctg\left(\dfrac{x(t)}{z(t)}\right) = h_t\left[X(t_0)\right]$ délivrées par l'observateur. L'observabilité de $X(t_0)$ à partir du continuum de mesures $(\varphi(t)), t \geq 0$) est encore assurée. Dans un premier temps nous quantifions l'estimabilité du mobile (pour des bruits additifs gaussiens sur un ensemble fini de mesures discrètes) suivant [3]. Puis nous passons en revue quelques estimateurs classiques en trajectographie passive.

3.1 Analyse de l'estimabilité du mobile

On note le vecteur des mesures disponibles $\mu = (\mu_0, \cdots, \mu_n)^T$ où μ_k , le site observé à l'instant t_k est défini par $\mu_k = \varphi(t_k) + \varepsilon_k$, ε_k étant le bruit de mesure à l'instant t_k supposé gaussien, blanc de variance constante σ^2. Un calcul théorique [6] fournit l'expression de la matrice d'information de Fisher (FIM), relative à l'estimation du vecteur d'état de la source à un instant de référence (i.e. $X(t_0)$, soit pour n observations :

$$FIM = \sigma^{-2} \sum_{k=1}^{n} G_k G_k^T \text{ , où } G_k = \nabla_{X(t_0)} \left\{ h_{t_k}\left[X(t_0)\right] \right\}$$

Une mesure de l'estimabilité de $X(t_0)$ est le déterminant de cette matrice. Restreignons-nous tout d'abord au cas de 4 observations consécutives ; on a alors : $FIM = \sigma^{-2} G G^T$, où $G = [G_1, \cdots, G_4]^T$; d'où l'on déduit : $dét(FIM) = \sigma^8 \left[dét(FIM)\right]^2$. En considérant un D.L. d'ordre 4 de chacun des vecteurs G_k, on montre aisément [3] que $dét(G) \underline{\underline{4}}\, dét\left[G_1, \dot{G}_1, \ddot{G}_1, \dddot{G}_1\right]$. Or $dét\left[G_k, \dot{G}_k, \ddot{G}_k, \dddot{G}_k\right]$ne dépend pas de $\varphi(t_k)$. Ceci conduit à l'approximation suivante :

$$dét(G) \cong \frac{3g}{r^8(t_k)}\left[-gx^2(t_k) + 2r^2(t_k)\dot{x}(t_k)\dot{\varphi}(t_k)\right] \text{où}$$

$\dot{\varphi}(t_k) = x(t_k)\dot{z}(t_k) - z(t_k)\dot{x}(t_k)$, soit finalement,

$$dét(FIM) \cong 9\frac{g^2\sigma^{-8}}{r^{16}(t_k)}\left[-gx^2(t_k) + 2r^2(t_k)\dot{x}(t_k)\dot{\varphi}(t_k)\right]^2$$

Dans le cas général ($n \geq 3$), on écrit de même $FIM = \sigma^{-2} G G^T$, où $G = [G_1, \cdots, G_n]^T$. Le calcul de dét(FIM) est alors obtenu par le théorème de Binet-Cauchy , i.e. $dét(GG^T) = \sum_E \left[dét(G_E)\right]^2$, où E est un ensemble de 4 indices $\{i_1, \cdots, i_4\}$parcourant l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ et tels que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$. On en déduit l'approximation suivante :

$$dét(FIM) \cong \frac{g^2\sigma^{-8}}{r^{16}(t_k)} P(n)\left[-gx^2(t_k) + 2r^2(t_k)\dot{x}(t_k)\dot{\varphi}(t_k)\right]^2$$

où $P(n) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left[ijk(k-i)(k-j)(j-i)\right]^2 \propto n^{16}$.

3.2 Estimateurs proposés :

a) le maximum de vraisemblance (MLE)

Il est connu que l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque l'on dispose de mesures polluées par un bruit additif gaussien s'identifie à celui des moindres carrés pondérés par l'inverse de la matrice de variance-covariance du vecteur-bruit. Si l'on note $h\left[X(t_0)\right] = \left[\varphi(t_0), \cdots, \varphi(t_n)\right]^T$ le vecteur-modèle de mesure, la méthode consiste à minimiser le critère

$$Q\left[X(t_0)\right] \underline{\underline{\Delta}} \left\| h\left[X(t_0)\right] - \mu \right\|_{R^{-1}}^2$$

où R est la matrice de variance-covariance du vecteur-bruit $(\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_n)^T$.

En trajectographie, comme dans bon nombre de problèmes d'estimation, la technique la plus employée (et avec raison car elle est facile à mettre

$dét\left[G_1, \dot{G}_1, \ddot{G}_1, \dddot{G}_1\right]$

en œuvre et donne des résultats satisfaisants) est celle de Gauss-Newton. Nous n'en détaillerons pas les étapes. Précisons que la technique de Levenberg-Marquardt doit être utilisée et que l'optimisation du pas de descente est réalisée par une simple dichotomie.

Remarque : la connaissance de l'accélération g par l'observateur fait de ce problème un cas de trajectographie passive par mesures d'angle (TPA) pour lequel d'autres méthodes ont été proposées.

b) Le Filtre de Kalman étendu en coordonnées polaires modifiées (MPK) [5] :

En TPA , c'est la représentation à ce jour qui assure le meilleur comportement du filtre. Facile à mettre en œuvre, la méthode a l'avantage d'assurer le temps réel.

3.2 Confrontation aux données :

Des simulations selon la technique de Monté-Carlo permettent d'apprécier « l'écart » de tout estimateur à la borne de Cramèr-Rao (BCR) en comparant la matrice empirique de variance-covariance d'un nuage d'estimés à cette dernière. Des mesures indépendantes entre elles ($R = \sigma^2 I_2$) ont été générées. La BCR prend alors l'expression suivante :

$$B = \sigma^2 \left[\sum_{k=0}^{n} \nabla_{X(t_0)} \{ h_{t_k} [X(t_0)] \} \nabla^T_{X(t_0)} \{ h_{t_k} [X(t_0)] \} \right]^{-1}.$$

Deux types de scenarii ont permis d'apprécier les performances « pratiques » des estimateurs proposés : des scenarii en rapprochement (relativement à l'observateur) et des scenarii en éloignement. Nous présentons ici les performances des deux estimateurs quant à leur biais et à leur matrice de variance-covariance sous la forme d'un tableau dont la première colonne indique les coordonnées de $X(t_0)$ couplées avec leur écarts-types minimaux (en fait la racine carrée de la diagonale de la BCR), les deux autres colonnes les coordonnées de la moyenne empirique des estimées $\hat{X}(t_0)$ fournis par le MLE ou le MPK (couplées avec leur écarts-types empiriques). Dans les deux scenarii, l'observateur est au point de coordonnées (30000, 0) et le missile est lancé depuis le point de coordonnées (0, 0). Chaque scenario dure 60s ; les mesures sont acquises toutes les secondes et l'écart-type de mesure est de 1°. Nous avons procédé à un jeu de simulations de 500 tirages pour calculer moyennes et matrices de variance-covariance empiriques. Dans les deux scenarii, le MLE a été initialisé au point (5000, 5000, 0, 0) et le PMK selon les recommandations de [5].

Les unités employées sont le mètre et le mètre par seconde.

a) Scenario en rapprochement :

Dans ce scenario, les coordonnées de la vitesse du missile est (200, 300).

Réalité	MLE	MPK
0 (2263)	-241(2282)	538 (2178)
0 (230)	31 (225)	-100 (285)
200 (64)	202.81 (67)	182 (63)
300 (6.2)	299.68(6.4)	303 (6.5)

b) Scénario en éloignement :

Dans ce scenario, les coordonnées de la vitesse du missile est (-200, 300).

Réalité	MLE	MPK
0 (4119)	-280 (417)	-449(4219)
0 (275)	19 (284)	115 (369)
-200 (144)	-196.8(144	-181 (128)
300 (91)	300 (95)	298 (99)

Si le MLE présente le biais le plus faible et la matrice de variance-covariance la plus proche de la BCR, le MPK a un comportement tout à fait acceptable.

4. Conclusion

L'observabilité d'un mobile uniformément accéléré dont on mesure le site et l'azimut a été etablie (une composante de l'accélération, soit *g*,étant connue). Nous avons évalué l'estimabilité et proposé quelques estimateurs. Reste pour la suite à étudier la convergence numérique des méthodes d'estimation envisagées, tenir compte du clutter et analyser le cas plus réaliste où *g* dépend de l'état.

Références

[1] Nardone, S.C. and Aidala, V.J. (1981)
Observability criteria for bearings-only target motion analysis.
IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, AES-17, 2 (Mar. 1981), 162-166.

[2] Jauffret, C. and Pillon, D. (1996)
Observability in passive target motion analysis
IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, AES-32, 4 (Oct. 1996), 1290-1300.

[3] Le Cadre, J.P. and Jauffret, C. (1997)
Discrete time observability and estimability analysis for bearings only target motion analysis.
IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, AES-33, 1 (Jan. 1997), 178-201.

[4] Berman, Z. (1997)
A reliable maximum likelihood algorithm for bearing-only target motion analysis
In Proceedings of 36th Conference & Control, San Diego, California, USA (Dec. 1997).

[5] Aidala, V.J and Hammel, S.E.
Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearings-Only Tracking.
IEEE Transaction on Automat. Contr., Vol A-C 28 (Mar. 1983), 283-294.

[6] Nardone, S.C., Lindgren, A.G. and Gong, K.F.
Fundamentals Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis.
IEEE Transaction on Automat. Contr., Vol A-C 29, n°9 (Sept. . 1984), 775-787.