

Modélisation mathématique pour la conception, l'analyse quantitative et le contrôle de la qualité de service des systèmes

Bruno Tuffin

IRISA/INRIA Rennes

Soutenance d'HDR, 10 AVRil 2005

HDR
2/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- 1 Contexte et contributions
 - Historique
 - Contributions
- 2 Simulation
 - Généralités, Monte Carlo
 - Quasi-Monte Carlo
 - Événements rares
- 3 Tarification
 - Contexte et principes
 - Ordonnancement
 - Enchères
- 4 Conclusions et perspectives
 - Activités en cours
 - Perspectives

HDR
3/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Conception, évaluation et amélioration des systèmes, plus particulièrement en télécommunications.

HDR
3/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Conception, évaluation et amélioration des systèmes, plus particulièrement en télécommunications.
- Travail réalisé à plusieurs niveaux :

HDR
3/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Conception, évaluation et amélioration des systèmes, plus particulièrement en télécommunications.
- Travail réalisé à plusieurs niveaux :
 - Modélisation des systèmes (réseaux de Petri stochastiques, modèles Markoviens, files d'attente...)

- Conception, évaluation et amélioration des systèmes, plus particulièrement en télécommunications.
- Travail réalisé à plusieurs niveaux :
 - Modélisation des systèmes (réseaux de Petri stochastiques, modèles Markoviens, files d'attente...)
 - Développement de techniques d'évaluation des systèmes (simulation Monte Carlo et quasi-Monte Carlo, théorie des jeux...)

HDR
3/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte Carlo
Événements rares

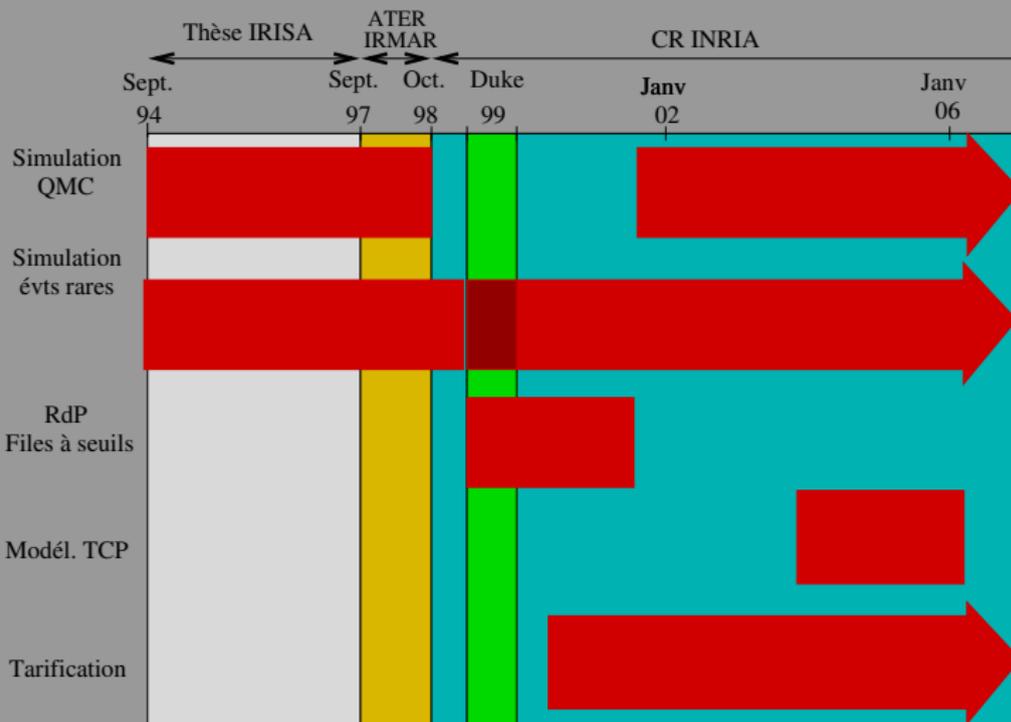
Tarifification

Contexte et principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et perspectives

Activités en cours
Perspectives

- Conception, évaluation et amélioration des systèmes, plus particulièrement en télécommunications.
- Travail réalisé à plusieurs niveaux :
 - Modélisation des systèmes (réseaux de Petri stochastiques, modèles Markoviens, files d'attente...)
 - Développement de techniques d'évaluation des systèmes (simulation Monte Carlo et quasi-Monte Carlo, théorie des jeux...)
 - Développement d'outils pour mieux les contrôler (tarification...).



HDR
5/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique

Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo

Quasi-Monte
Carlo

Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes

Ordonnancement

Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours

Perspectives

Deux activités majeures :

- Les méthodes de simulation

- La tarification des réseaux de communication

HDR
5/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique

Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo

Quasi-Monte
Carlo

Événements
rares

Tarifification

Contexte et
principes

Ordonnancement

Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours

Perspectives

Deux activités majeures :

- Les méthodes de simulation
 - Monte Carlo pour la simulation d'événements rares
 - Quasi-Monte Carlo
- La tarification des réseaux de communication

HDR
5/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique

Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo

Quasi-Monte
Carlo

Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes

Ordonnancement

Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours

Perspectives

Deux activités majeures :

- Les méthodes de simulation
 - Monte Carlo pour la simulation d'événements rares
 - Quasi-Monte Carlo
- La tarification des réseaux de communication

Description aujourd'hui de certaines contributions sur ces deux axes.

- Contexte : calcul de $\mathcal{I} = \int_{[0,1]^s} f(x) dx$.
- La majeure partie des problèmes de simulation peuvent se ramener à ce cadre.

- $\mathcal{I} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X^{(n)})$ avec $(X^{(n)})_{n \geq 1}$ i.i.d $\sim U[0, 1]^s$.

- Convergence presque sûre et, d'après le théorème de la limite centrale, intervalle de confiance

$$\mathcal{I} \in \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X^{(n)}) - \frac{c_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(X^{(n)}) + \frac{c_\alpha \sigma}{\sqrt{N}} \right]$$

au risque α , avec $\sigma = \sigma(f(X))$, $c_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ et Φ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- Convergence, en moyenne, en $O(1/\sqrt{N})$.

HDR
7/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte CarloQuasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
Perspectives

- Pour un utilisateur : l'intérêt est de connaître la précision pour un temps de simulation donné.
- Efficacité : $N/(\sigma^2 t_N)$ où t_N temps de calcul pour obtenir l'échantillon de taille N , de variance σ^2/N .
- Deux améliorations possibles :
 - réduire le temps de calcul de $f(X)$,
 - réduire la variance de l'estimateur.

- On considère une suite déterministe $\mathcal{P} = (\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.
- Elle doit être équi-distribuée : $\forall B$ Borélien de $[0, 1]^s$,

$$F_N(B, \mathcal{P}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_B(\xi^{(n)}) \longrightarrow \lambda_s(B)$$

\implies notion de discrédance :

La discrédance des N premiers points de \mathcal{P} est :

$$D_N^*(\mathcal{P}) = \sup_{x \in [0, 1]^s} |F_N([0, x[, \mathcal{P}) - \lambda_s([0, x[)|.$$

- $V(f)$: variation au sens de Hardy and et Krause d'une fonction f (notion complexe) ;

- **Théorème : borne de Koksma-Hlawka**

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi^{(n)}) - \int_{[0,1]^s} f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(\mathcal{P}).$$

- Vitesse de convergence : dépend de la vitesse de décroissance de $D_N^*(\mathcal{P})$.
- Pour $(\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, on ne peut avoir mieux que

$$D_N^*(\mathcal{P}) = \begin{cases} O(N^{-1} \log N) & \text{si } s = 1 \\ O(N^{-1} (\log N)^{\alpha(s)}) & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

où $\frac{s-1}{2} \leq \alpha(s) \leq s$.

- **Déf** : une suite est dite à *discrépance faible* si $D_N^*(\mathcal{P}) = O(N^{-1} (\log N)^s)$.

- $f : \begin{cases} [0, 1]^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \rightarrow \min(x_1 + x_2 + x_3, 1) \end{cases}$ fonction à variation infinie, alors que QMC converge très vite ;
- $V(f)$ difficile à déterminer en général ;
- Discrépance difficile à calculer en général. Bornes, asymptotiquement valables, mais inutiles en pratique :

N	10^3	10^4	10^6	10^9	10^{12}	10^{16}
$s = 5$	1.5	$3.3 \cdot 10^{-1}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$

N	10^3	10^9	10^{15}	10^{21}	10^{35}
$s = 25$	$2.9 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^5$	$5.2 \cdot 10^3$	$1.6 \cdot 10^{-3}$

- Fonctionne moins bien quand la dimension effective augmente.

- Objectif : obtenir une borne de l'erreur dans les méthodes de quasi-Monte Carlo.
- Pour $X \sim U([0, 1]^s)$, étude de la v.a.

$$\hat{f}(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{\xi^{(n)} + X\}).$$

- Si f à variation finie, $\sigma^2(\hat{f}) = O(N^{-2}(\ln N)^{2s})$.
- **Théorème** : (variation finie pas une condition nécessaire)

La variance moyenne de $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{X + \xi^{(n)}\})$, moyenne

sur l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, 1]^s$ muni de la mesure de Wiener, est $O(N^{-2}(\ln N)^{2s})$.

- Considérer I v.a. i.i.d. et appliquer le théorème de la limite centrale.

- Réseau de files d'attente multi-classes à forme produit
- Probabilités stationnaires connues à une constante de normalisation g près.
- Simulation nécessaire quand l'espace d'états est trop important pour une étude analytique.
- Largeurs d'IC pour le même nombre d'appels de la fonction, pour $g \approx 9.94e+64$ et $TH_{jm} \approx 9.61e-03$:

Var.	MC $l = 10^6$	$N = 10^2, l = 10^4$	$N = 10^4, l = 10^2$
g	8.1970e+60	3.0134e+60	6.9722e+59
TH_{jm}	5.4623e-07	1.6259e-07	2.5715e-08

- Si $N = 10^4$, le temps de calcul ≈ 0.7 fois celui obtenu par MC \Rightarrow l'efficacité $1/(\sigma^2 \times t)$ est alors **626 fois meilleure**.

- **Déf :** Pour $\alpha > 1$, $C > 0$ et $\forall h \in \mathbb{Z}^s$,
 $r(h) = \prod_{i=1}^s \max(1, |h_i|)$ soit $E_\alpha^s(C)$ la classe des
fonctions $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ de période 1 sur chaque
coordonnée et tq le coefficient de Fourier

$$|\hat{f}(h)| \leq Cr(h)^{-\alpha} \text{ pour tout } h \in \mathbb{Z}^s.$$

- **Déf :** étant donné un vecteur $g \in \mathbb{Z}^s$, Soit
 $S = (\{ng/N\})_{0 \leq n \leq N-1}$ ensemble de N points de $[0, 1]^s$.
- **Théorème** Soit $X \equiv U[0, 1]^s$. Pour tous réels $\alpha > 1$,
 $C > 0$ et tout entier $N \geq 1$, il existe $g \in \mathbb{Z}^s$ tq

$$\max_{f \in E_\alpha^s(C)} \sigma^2 \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \left(\left\{ \frac{n}{N}g + X \right\} \right) \right) = O(N^{-2\alpha} (\ln N)^{2\alpha s}).$$

- Tables pour le choix de g existent.

Quasi-Monte Carlo pour simuler les chaînes de Markov

- RQMC peu efficace pour simuler une chaîne de Markov $(X_n)_n$ avec $X_{n+1} = \phi_n(X_n, U_{n+1})$, $U_{n+1} \sim U[0, 1]^d$.
- Nouvel algorithme, sur un *espace d'états totalement ordonné* pour calculer $Y = \sum_{n=1}^T c_n(X_n)$.

1 (Entrée) : $\tilde{P}_N = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N-1})$ *d-dimensionnelle et randomisation* $P_N = \{\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{N-1}\}$.

2 (Simuler en parallèle N copies de la chaîne) :

Pour $(j = 1; X_{0,j-1} < \infty; j++)$

Re-randomiser \tilde{P}_N en P_N ;

Pour $(i = 0; i < N$ et $X_{i,j-1} < \infty; i++)$

$X_{i,j} = \varphi_j(X_{i,j-1}, \bar{u}_i)$; $X_{i,j} = \infty$ *si fini*;

Trier les chaînes tq $X_{i,j} < \infty$ *par ordre* \nearrow .

3 (Sortie) : \bar{Y}_N , *moyenne des N valeurs de Y .*

RQMC pour simuler les chaînes de Markov : résultats

HDR
15/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et perspectives

Activités en cours
Perspectives

- Algorithme répété I fois pour obtenir un intervalle de confiance
- Estimateur prouvé être sans biais
- Borne de l'erreur en $O(N^{-1/2})$ dans le cas non randomisé (déterministe), donc au pire cas équivalente à Monte Carlo, sous certaines conditions sur la chaîne.
- Borne de l'erreur (via la variance) *au pire cas* en $O(N^{-1/2})$ pour le cas randomisé sous les mêmes conditions.
- Borne en moyenne, en sous certaines fortes conditions, en $O(N^{-3/2})$.

RQMC pour simuler les chaînes de Markov : illustration

HDR
16/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte Carlo
Événements rares

Tarifcation

Contexte et principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et perspectives

Activités en cours
Perspectives

- File d'attente M/M/1. Taux d'arrivée $\lambda = 1$, taux de service $\mu > 1$. On cherche le temps moyen d'attente des $t = 100$ premiers clients, noté μ_t .
- Facteurs de réduction empirique par rapport à Monte Carlo

Korobov, $N =$	1021	4093	16381	65521	262139
Sobol, $N =$	1024	4096	16384	65536	262144
Array-Korobov, $\rho = 0.2$	52	125	336	826	2991
Array-Sobol, $\rho = 0.2$	53	303	748	3247	7964
Array-Korobov, $\rho = 0.5$	39	133	442	810	2464
Array-Sobol, $\rho = 0.5$	72	259	1340	3642	12460
Array-Korobov, $\rho = 0.8$	80	322	1064	1329	3674
Array-Sobol, $\rho = 0.8$	208	563	2333	11860	61290

- Méthode à appliquer aux problèmes de grande dimension et certaines suites à discrédance faible qui n'y sont pas adaptées.
- Soit $x^{(k)} = (\xi^{(k)}, X^{(k)})$ une suite en dimension s avec
 - $\xi^{(k)}, k \geq 1$, suite à discrédance faible en dimension d
 - $X^{(k)}, k \geq 1 \sim U[0, 1]^{s-d}$.
- $x^{(k)}, k \geq 1$, est appelée une *suite mixte*.
- MC and QMC cas limites des suites mixtes.
- Estimateur $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^{(k)})$ pour approcher $\int_{[0,1]^s} f(x) dx$.
- Soit $Y_k = f\left(\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_d^{(k)}, X_{d+1}^{(k)}, \dots, X_s^{(k)}\right)$,
 - $\mu_k = E[Y_k], \sigma_k^2 = \text{Var}(Y_k)$,
 - $s_N^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_N^2$.

- **Théorème** : Si f bornée sur $[0, 1]^s$ et les fonctions

$$g(x) = \int_{[0,1]^{s-d}} f(x, X_{d+1}, \dots, X_s)^2 dX$$

$$h(x) = \left(\int_{[0,1]^{s-d}} f(x, X_{d+1}, \dots, X_s)^2 dX \right)^2$$

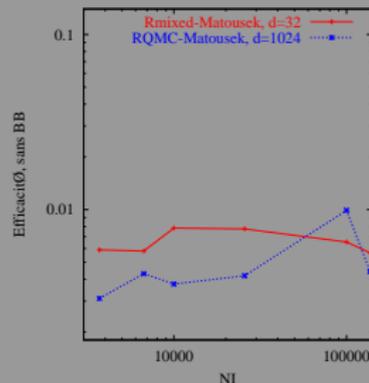
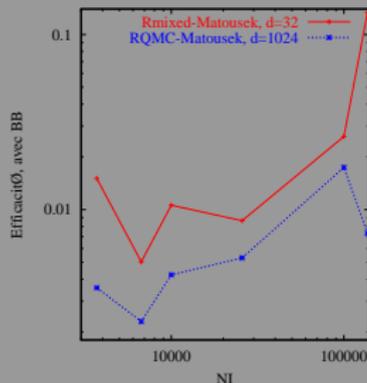
(dimension d) sont Riemann-intégrables,

- $\frac{\sum_{k=1}^N Y_k - \sum_{k=1}^N \mu_k}{s_N} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$

- $\frac{s_N^2}{N} \rightarrow \int_{[0,1]^s} f(x)^2 dx - \int_{I^d} \left(\int_{[0,1]^{s-d}} f(y, x) dx \right)^2 dy.$

- **Théorème** : Réduction de la variance systématique par rapport à MC.

- Estimateur biaisé, et variance difficile à estimer
- $\Rightarrow I$ randomisations indépendantes
- $x^{(k,i)} = (\xi^{(k,i)}, X^{(k,i)})$, $1 \leq k \leq N$, $1 \leq i \leq I$ avec
 - $(\xi^{(k,i)})_k$ i -ème randomisation du k -ème point de la suite QMC d -dimensionnelle
 - $(X^{(k,i)})_{i,k}$ vecteurs i.i.d $U[0, 1)^{s-d}$.
- Illustration : option asiatique, $s = 1024$. Gauche : avec pont Brownien (BB), Droite : sans BB



- Objectif : calculer $\gamma = E(\psi(X))$.
- Contexte de nos études
 - Problème de fiabilité des réseaux : graphe avec nœuds parfaits mais liens défailants. On cherche la probabilité que des nœuds ne peuvent communiquer :

$$X = 1_{\{\text{nœuds ne puissent communiquer}\}}, \text{ et } \psi(x) = x.$$

- Estimation du temps moyen d'atteinte de la défaillance (MTTF) pour un modèle Markovien

$$\text{MTTF} = \frac{E(\min\{U, V\})}{\Pr(V < U)},$$

où U v.a. : “temps de retour à 0”, V v.a. “temps d'absorption”, 0 état initial.

On se focalise sur le dénominateur $\gamma = \Pr(V < U)$.

- Pour des systèmes fiables, $\gamma \ll 1$.

- On suppose que X dépend d'un paramètre réel ε (ainsi, γ et la variance σ^2 sont aussi fonctions de ε).
- ε appelé *paramètre de rareté* si il vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma = 0.$$

- Exemple : modèle de fiabilité statique, la fiabilité du lien i

$$r_i = \Pr[\text{lien } i \text{ fonctionne}] = 1 - a_i \varepsilon^{b_i}.$$

avec a_i et b_i constantes positives.

- Exemple : pour les modèles Markoviens : défaillance d'un composant $\lambda_i = a_i \varepsilon^{b_i}$, réparation $\mu_i = \Theta(1)$.
- On peut prouver qu'il existe une constante $r > 0$ telle que

$$\gamma = \Theta(\varepsilon^r).$$

Mesure de robustesse d'un estimateur : Erreur relative bornée (BRErr)

- Soit un estimateur γ_n de γ avec $E(\gamma_n) = \gamma$ et $\sigma_n^2 = \text{Var}(\gamma_n)$.
- À partir de l'intervalle de confiance $C_n = (\gamma_n \pm z_\delta \sigma_n)$, l'**erreur relative** est $\text{RErr} = z_\delta \frac{\sigma_n}{\gamma}$.
- On a BRErr si RErr est borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Signification : la largeur relative de l'intervalle de confiance reste bornée, pour n fixé et $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Pour l'estimateur standard d'une indicatrice (Bernoulli), $\text{Var}(\gamma_n^{\text{STD}}) = \gamma(1 - \gamma)/n$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\delta \frac{\sqrt{\text{Var}(\gamma_n^{\text{STD}})}}{\gamma} = \frac{z_\delta}{\sqrt{n}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} = \infty,$$

En général, il ne peut être utilisé pour simuler les événements rares.

Mesure de robustesse d'un estimateur : Approximation normale bornée (ANB)

HDR
23/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo

Événements
rares

Tarifification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- L'erreur relative de l'intervalle reste bornée, mais quid de la validité de cet intervalle ?
- **Berry-Esseen** : si $F_n(\cdot)$ fonction de répartition de $(\gamma_n - \gamma)/\hat{\sigma}_n$, avec $\hat{\sigma}_n^2$ estimateur standard de σ^2 , on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|F_n(x) - \mathcal{N}(x)| \leq \frac{a\varrho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

avec $\varrho = E(|\gamma_1 - \gamma|^3)$.

- L'estimateur γ_n vérifie l'Approximation Normale Bornée si ϱ/σ^3 reste borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Signification : l'erreur de couverture de l'intervalle de confiance est contrôlée quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Simulation des systèmes Markoviens hautement fiables : échantillonnage préférentiel

- Technique d'accélération : échantillonnage préférentiel qui consiste à utiliser une autre matrice de transition P' de la chaîne de Markov induite au lieu de P , augmentant la probabilité des défaillances.

$$\begin{aligned}\gamma &= \Pr(V < U) \\ &= \sum_{(x_0, \dots, x_{\min(V,U)})} \mathbf{1}_{V < U} \prod_{i=0}^{\min(V,U)-1} P(x_i, x_{i+1}) \\ &= \sum_{(x_0, \dots, x_{\min(V,U)})} \mathbf{1}_{V < U} L(x_0, \dots, x_{\min(V,U)}) \prod_{i=0}^{\min(V,U)-1} P'(x_i, x_{i+1}) \\ &= E_{P'}(\mathbf{1}_{V < U} L)\end{aligned}$$

avec $L(x_0, \dots, x_{\min(V,U)}) = \prod_{i=0}^{\min(V,U)-1} \frac{P(x_i, x_{i+1})}{P'(x_i, x_{i+1})}$.

- Proposition de différents choix pour P' .

ANB et simulation des systèmes Markoviens hautement fiables

- Résultat : condition nécessaire et suffisante sur P' et les différents chemins pour obtenir l'ANB.

- **Déf.** Soit f fonction et $t \geq 0$ tel que $\nu = E(f(X_0, \dots, X_{\min(U, V)})) = \Theta(\varepsilon^t)$. On dira que ν est *bien estimé* sous P' si $\forall (x_0, \dots, x_{\min(V, U)})$ tel que $f(x_0, \dots, x_{\min(V, U)}) \prod_{i=0}^{\min(V, U)-1} P(x_i, x_{i+1}) = \Theta(\varepsilon^t)$,

$$\prod_{i=0}^{\min(V, U)-1} P'(x_i, x_{i+1}) = \Theta(1).$$

- Implications prouvées :
ANB $\Rightarrow \sigma^2$ bien estimé \Rightarrow BRErr $\Rightarrow \gamma$ bien estimé
- Aucune des implications n'est une équivalence (contre-exemples)
 \Rightarrow ANB, propriété importante

HDR
26/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
CarloÉvénements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
Perspectives

- BRErr ne prend pas en compte la 2ème caractéristique d'un estimateur : le *temps de simulation*.
- Le temps moyen pour une réplication peut augmenter ou diminuer quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Soit t_n le temps moyen pour simuler l'estimateur γ_n basé sur un échantillon de taille n .
L'efficacité relative de γ_n est

$$\text{REff} = \frac{\gamma^2}{\sigma_n^2 t_n}.$$

γ_n vérifie l'efficacité relative bornée (BREff) si il existe $d > 0$ tel que REff soit minoré par $d \forall \varepsilon$.

BREff et fiabilités statiques : estimer la probabilité de connection entre deux nœuds s et t

- Graphe G et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_H\}$ ensemble de chemins élémentaires disjoints entre s et t ,
- On suppose qu'une suite infinie de copies indépendantes de G est construite.
- Soit F r.v. "1er élément de la suite tel que tout chemin de \mathcal{P} a au moins un lien défaillant".
- F suit une loi géométrique de paramètre diminuant avec ε .
- Idée : tirer F . Sans les simuler, les $F - 1$ premières copies de G sont donc telles que s et t sont connectés.
- Pour $F = f$, réseau échantillonné conditionnellement au fait qu'au moins un lien de chaque chemin est défaillant.
- RErr non borné (même variance que MC standard), mais BREff?

HDR
28/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique

Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
CarloÉvénements
rares

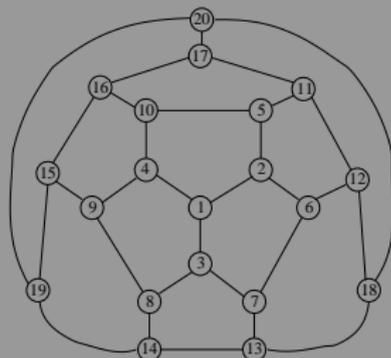
Tarification

Contexte et
principes
Ordonnement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
PerspectivesRésultats pour $n = 1000$:

$r_i \forall i$	Est.	Int. Conf.	RErr
0.5	7.08e-01	(6.99e-01, 7.17e-01)	1.3e-02
0.9	3.20e-03	(2.093e-03, 4.31e-03)	3.5e-01
0.99	0	(0, 0)	—
0.999	0	(0, 0)	—

Résultats pour une simulation de $T = 5$ secondes :

$r_i \forall i$	Est.	Int. Conf.	RErr
0.5	7.12e-01	(7.09e-01, 7.15e-01)	4.0e-03
0.9	2.89e-03	(2.78e-03, 3.00e-03)	3.9e-02
0.99	2.05e-06	(1.92e-06, 2.18e-06)	6.4e-02
0.999	2.00e-09	(1.87e-09, 2.14e-09)	6.6e-02
0.9999	1.98e-12	(1.85e-12, 2.11e-12)	6.7e-02

pour $s = 1$ et $t = 20$

HDR
29/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Sujet polémique : y a t'il besoin de changer le mode de tarification ?
- Augmentation du trafic Internet en raison
 - du nombre croissant d'utilisateurs
 - d'applications de plus en plus gourmandes.
- Conséquence : congestion, avec qualité de service irrégulière.
- Augmentation des capacités difficile, sinon impossible, pour les réseaux d'accès ("last mile problem").
- Aussi, tarification forfaitaire non-équitable et ne permettant pas la différenciation de service.
- Trouver une méthode permettant de contrôler la demande, partageant efficacement les ressources, tout en étant facile à implanter.

HDR
30/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarifification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Comportement des utilisateurs dirigé par les externalités : perte de valeur qu'une présence impose aux autres.
- Prix doit dépendre des externalités, qui dépendent de la technologie et des applications.
- Outils mathématiques :
 - Théorie des jeux non coopératifs
 - files d'attente, théorie du signal (selon la technologie)
 - optimisation
- Propriétés à vérifier :
 - Efficacité (revenu du fournisseur ou surplus social)
 - Compatibilité d'incitation (révélation de la vraie valuation)
 - Rationalité individuelle (l'intérêt de tous est de participer).
- Représentation des utilisateurs via la fonction d'utilité.
Problème pratique.

HDR
31/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Objectif : différencier les services en fournissant plusieurs classes.
- Sans différenciation de prix, tout le monde joindra la classe la plus prioritaire.
- Trouver les prix qui maximisent le revenu du fournisseur (ou le surplus social) problème d'intérêt.
- Quelle politique d'ordonnement appliquer ?
L'architecture DiffServ propose des priorités strictes ou la politique GPS.

HDR
32/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
Perspectives

- Nombre d'utilisateurs potentiellement infini à une file M/M/1 de taux de service μ représentant le goulot d'étranglement du réseau.
- Deux types de flux : voix et données (voix plus sensible au délai que données), de taux λ_v, λ_d par utilisateur.
- Deux classes de service, avec politique d'ordonnancement :
 - Priorités strictes , GPS et DPS : "Processor sharing" discriminatoire.
- Cas des classes *dédiées* ou *ouvertes*.
- Comportement des utilisateurs
 - Utilité fonction du *délai moyen* D et du prix p par paquet :
$$U_d(D) = D^{-\alpha_d} - p \text{ et } U_v(D) = D^{-\alpha_v} - p \text{ avec } \alpha_d < \alpha_v.$$
 - Un utilisateur j entre si $U_j > 0$ et quitte si $U_j < 0$.
 \Rightarrow Jeu entre utilisateurs, équilibre sur le nombre de sessions actives.

HDR
33/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

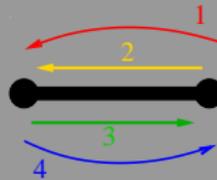
Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

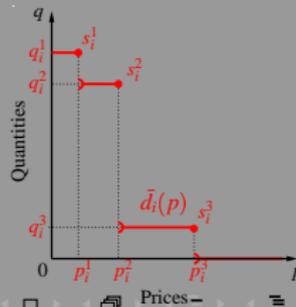
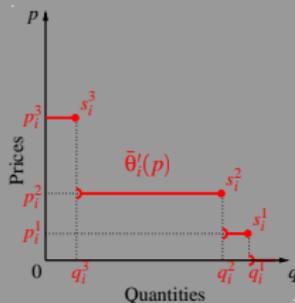
- Délai : forme close pour priorités et DPS seulement.
- Délai GPS : sous hypothèse de fort trafic, approché par des files indépendantes.
- Dans chaque cas, pour chaque couple de prix, un *équilibre de Nash* est trouvé.
- Prix optimisant le revenu trouvés pour chaque politique.
- Politique produisant le meilleur revenu : priorités.
- **Remarque : DPS et modélisation de TCP**
 - DPS pas applicable au niveau paquet.
 - Par contre, DPS sur une file M/M/1 bonne approximation de sessions TCP en compétition au niveau flux.
 - Résultats restent valides, mais avec λ taille de sessions, et nombre de sessions considéré *en moyenne*.

Exemple 2 : enchères multiples pour l'allocation de ressources



- Allouer la bande passante sur un lien de capacité Q
- Résultats obtenus aussi dans un cadre plus général (topologie d'arbre représentant un réseau d'accès...)
- En entrant dans le jeu, tout joueur i soumet M_i mises en dimension 2 de la forme $s_i^{m_i} = (q_i^{m_i}, p_i^{m_i})$ avec
$$\begin{cases} q_i^j & = \text{quantité de ressource demandée} \\ p_i^j & = \text{prix unitaire correspondant} \end{cases}$$
- Mécanisme en un coup, où il n'est pas requis de connaître le profil des mises s .

- $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^{M_i})$: **mise multiple** soumise par le joueur i .
- Allocations a_i et coûts c_i calculés à partir de $s = (s_i)_i$.
- Pour un utilisateur (joueur) $i \in \mathcal{I}$
 - Fonction d'utilité $u_i(s) = \theta_i(a_i(s)) - c_i(s)$
 - θ_i : *fonction de valuation*, supposée croissante et concave.
 - Objectif du joueur i : maximiser son utilité $\theta_i(a_i) - c_i$.
- L'enchère multiple s_i est utilisée pour calculer :
 - la fonction de valuation pseudo-marginale $\bar{\theta}'_i$
 - la fonction de pseudo-demande \bar{d}_i



HDR
36/40

Bruno Tuffin

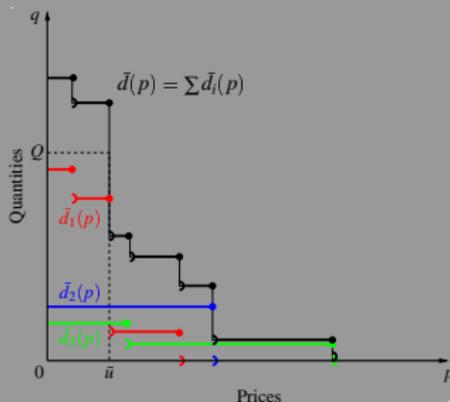
Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
Perspectives

- \bar{u} : pseudo-prix du marché (plus haut prix unitaire auquel demande dépasse capacité).
- Règle d'allocation des enchères multiples :

$$a_i(s) = \bar{d}_i(\bar{u}^+) + \frac{\bar{d}_i(\bar{u}) - \bar{d}_i(\bar{u}^+)}{\bar{d}(\bar{u}) - \bar{d}(\bar{u}^+)} (Q - \bar{d}(\bar{u}^+))$$

Règle de tarification

- Principe : chaque utilisateur paye le "social opportunity cost" qu'il impose aux autres.

$$c_i(s) = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \{0\}, j \neq i} \int_{a_j(s)}^{a_j(s_{-i})} \bar{\theta}'_j$$

Propriétés de la méthode :

- a) *Compatibilité d'incitation* : aucun joueur ne peut faire beaucoup mieux que de révéler sa propre valuation (sincérité).
- b) *Rationalité individuelle* : $U_i \geq 0$, quels que soient les enchères des autres joueurs.
- c) *Efficacité* : quand les joueurs sont sincères, l'allocation maximise le surplus social.

HDR
38/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributions

Historique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
Enchères

Conclusions et
perspectives

Activités en
cours
Perspectives

- Travaux sur la simulation :
 - combinaison de la méthode array-RQMC avec la technique de ramification des trajectoires pour la simulation d'événements rares.
 - Focalisation en général sur la simulation d'événements rares.
 - Applications en sûreté de fonctionnement des réseaux de communication.
 - Étude de la couverture des estimateurs en général, et des méthodes RQMC en particulier.
- Travaux sur la tarification :
 - accentuation des travaux autour des technologies sans fils ;
 - un autre cadre spécifique qui acquiert de l'importance : tarification inter-domaines.

HDR
39/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte Carlo
Quasi-Monte
Carlo
Événements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnancement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours
Perspectives

- En simulation, populariser les méthodes RQMC :
 - Continuer à étendre le cadre théorique général ;
 - démontrer leur efficacité en pratique sur d'autres familles de problèmes.
- Ré-orienter les compétences acquises en tarification sur les applications de la théorie des jeux coopératifs et non-coopératifs en sécurité :
 - étude des stratégies optimales ; créer des incitations à participer au bon fonctionnement du réseau ?
 - utilisation des jeux évolutionnaires ;
 - conséquences sur les modèles épidémiologiques pour la propagation de virus/vers.

HDR
40/40

Bruno Tuffin

Plan

Contexte et
contributionsHistorique
Contributions

Simulation

Généralités,
Monte CarloQuasi-Monte
CarloÉvénements
rares

Tarification

Contexte et
principes
Ordonnement
EnchèresConclusions et
perspectivesActivités en
cours

Perspectives

- Arnaud Delenda
 - Yezekael Hayel
 - Patrick Maillé

 - Louis-Marie Le Ny
 - David Ros
 - Gerardo Rubino
 - Bruno Sericola

 - Eitan Altman
 - Rachid El Azouzi
 - Stéphane Collas
 - Christian Lécot
- Diman Barman
 - Vadim Burago
 - Hector Cancela
 - Dong Chen
 - Valérie Demers
 - Christophe Hirel
 - Pierre L'Ecuyer
 - Giray Ökten
 - Pablo Rodriguez
 - Kishor Trivedi
 - Milan Vojnovic