

***Comment remplacer des lettres  
par des motifs 2D***

***Anne Siegel***

1

$1 \rightarrow 12$

$2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 1$

1 → 12

1

12

2 → 3

3 → 1

$1 \rightarrow 12$

$2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 1$

1

1(2)

12(3)

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1

12

12(3)

123(1)

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1

12

123

123(1)

1231(12)

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1  
12  
123  
1231  
1231(1)2  
123112(12)3

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1  
12  
123  
1231  
123112  
123112123

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1  
12  
123  
1231  
123112  
123112123  
1231121231231

1 → 12

2 → 3

3 → 1

1

12

123

1231

123112

123112123

1231121231231

1231121231231123112

	1
	12
1 → 12	123
	1231
	123112
2 → 3	123112123
	1231121231231
	1231121231231123112
3 → 1	1231121231231123112123112323

	1
	12
1 → 12	123
	1231
	123112
2 → 3	123112123
	1231121231231
	1231121231231123112
3 → 1	1231121231231123112123112323
	12311212312311231121231123231231121231231

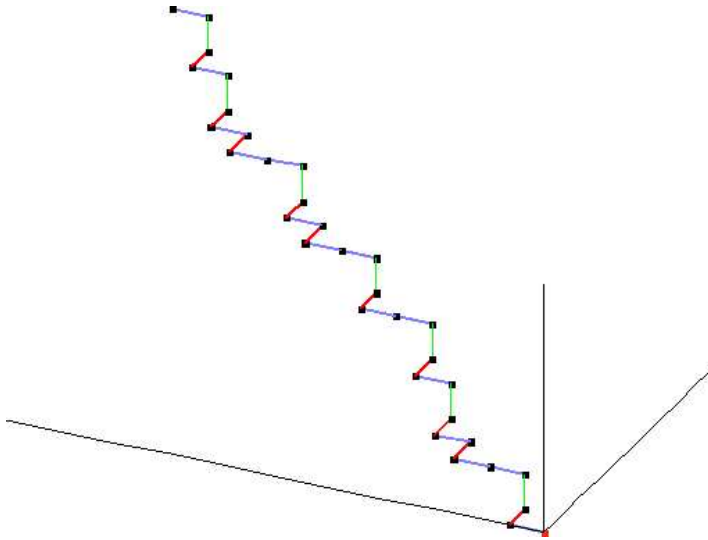
# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*

- ⑥ Un point fixe

12311212312311231121231123231231121231231

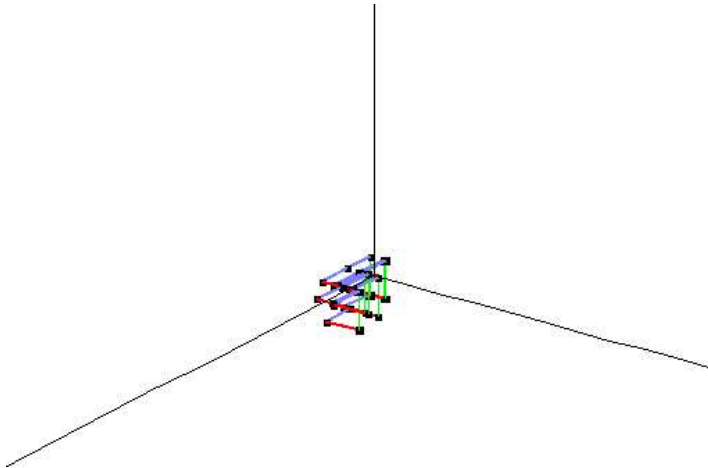
# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*

- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace



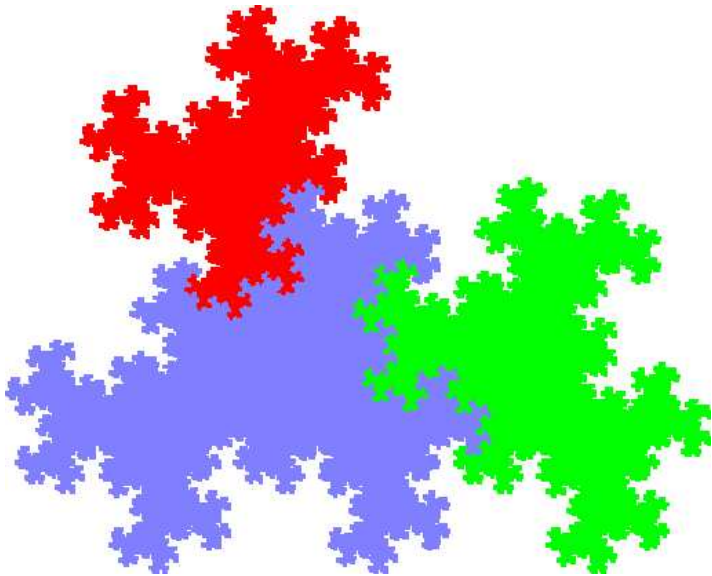
# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*

- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment

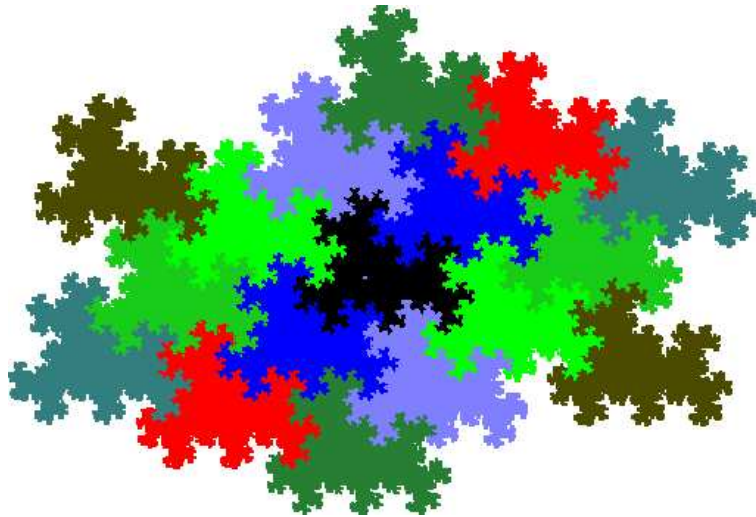


# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*

- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment
- ⑥ Un joli dessin en couleurs (par projection dans le plan)

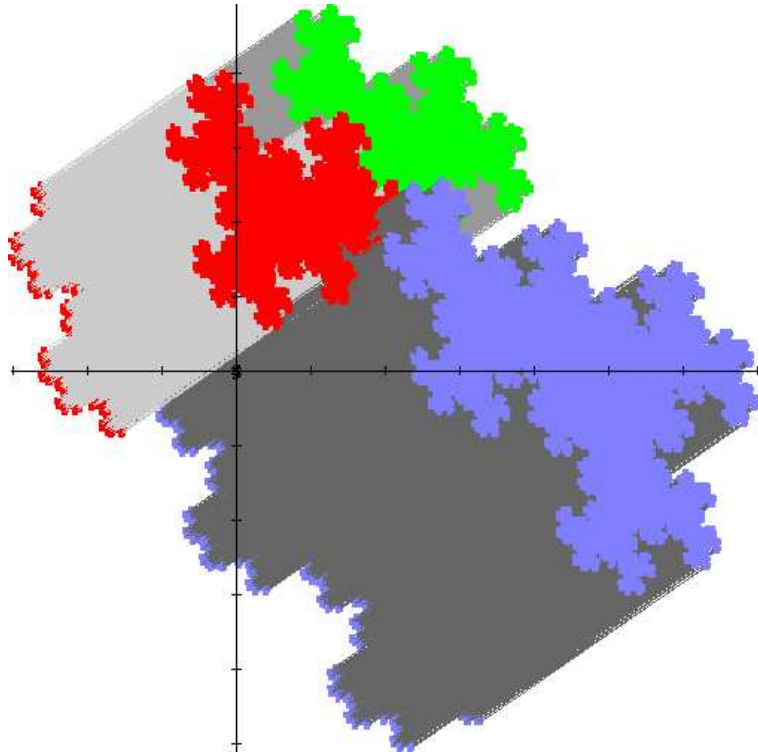


# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*



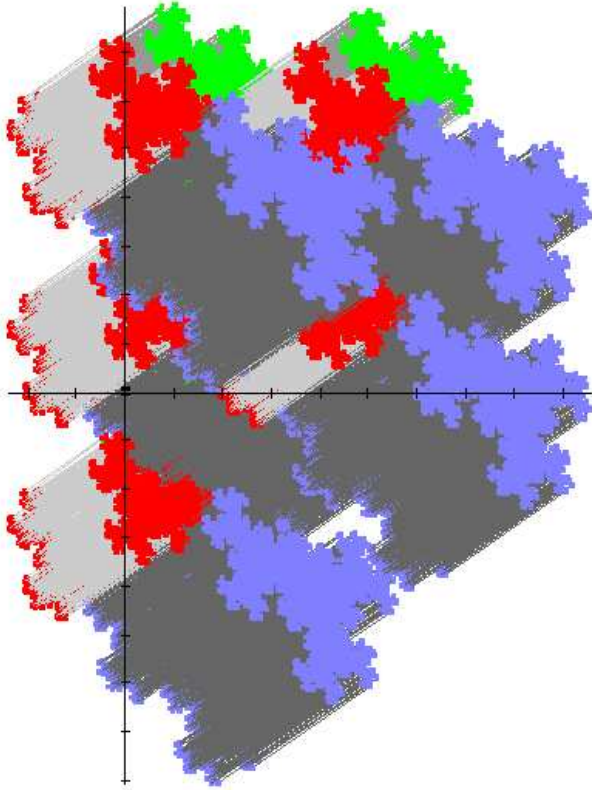
- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment
- ⑥ Un joli dessin en couleurs (par projection dans le plan)
- ⑥ Un joli pavage 2D

# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*



- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment
- ⑥ Un joli dessin en couleurs (par projection dans le plan)
- ⑥ Un joli pavage 2D
- ⑥ Des figures 3D

# *Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré*

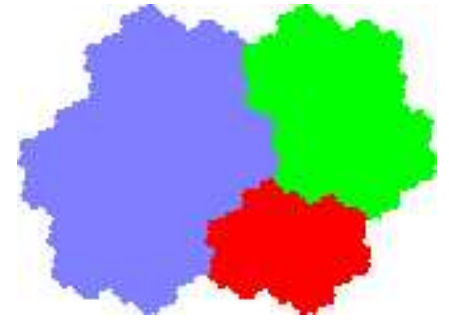
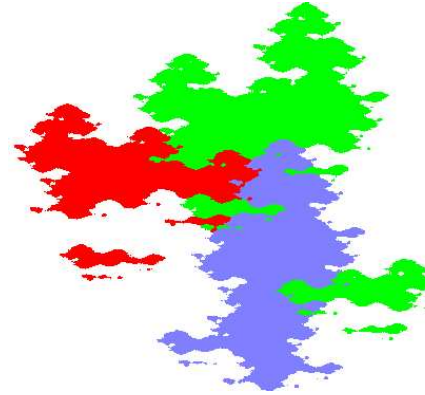
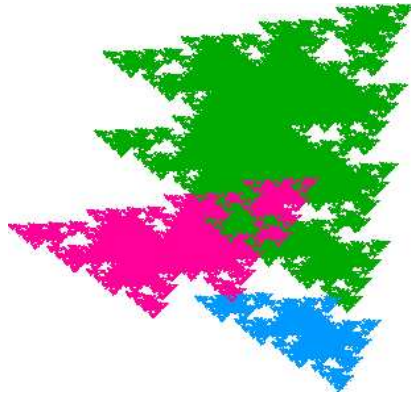
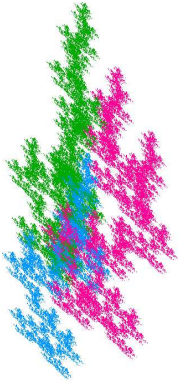


- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment
- ⑥ Un joli dessin en couleurs (par projection dans le plan)
- ⑥ Un joli pavage 2D
- ⑥ Des figures 3D
- ⑥ Et des pavages 3D

# ***Ce qu'on peut faire avec un morphisme itéré***

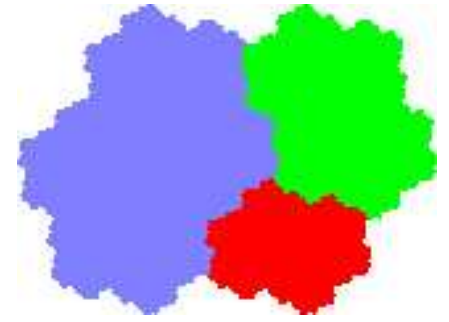
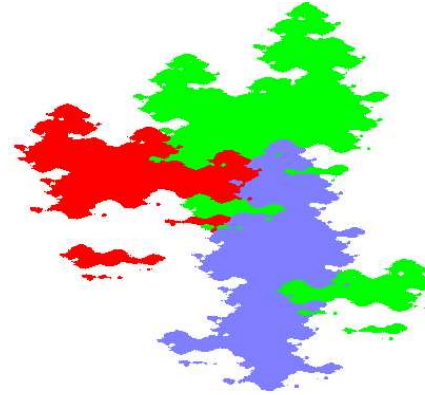
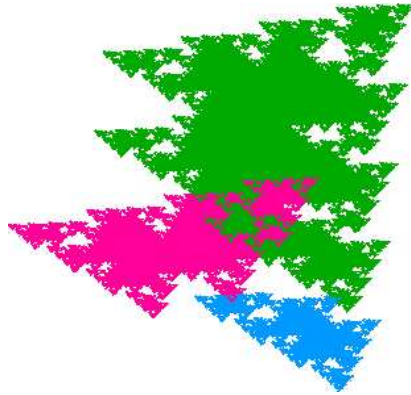
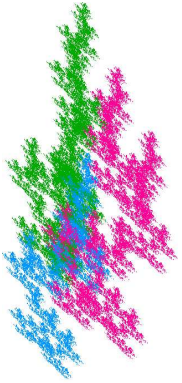
- ⑥ Un point fixe
- ⑥ Une ligne brisée dans l'espace
- ⑥ Vue différemment
- ⑥ Un joli dessin en couleurs  
(par projection dans le plan)
- ⑥ Un joli pavage 2D
- ⑥ Des figures 3D
- ⑥ Et des pavages 3D
- ⑥ Tout plein de dessins...

# Applications (un peu) concrètes



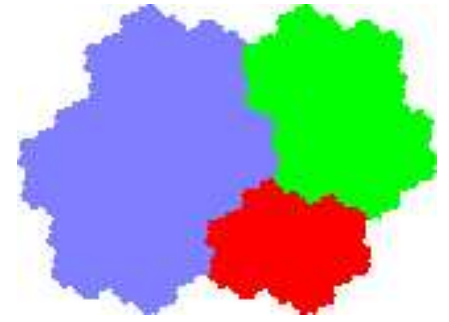
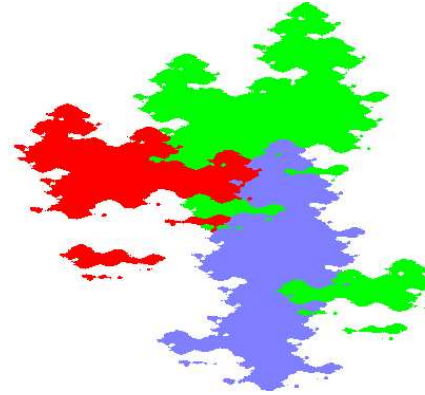
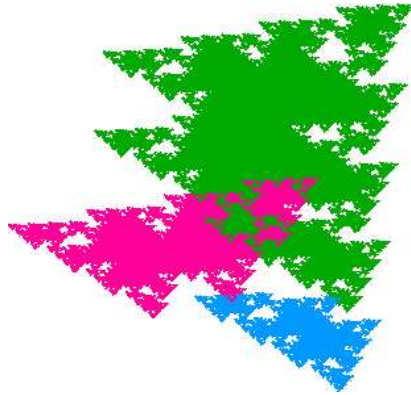
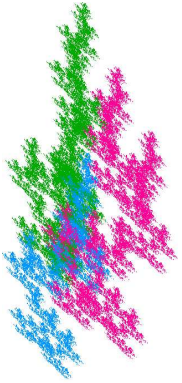
- ⑥ Approximation de nombres par des rationnels

# Applications (un peu) concrètes



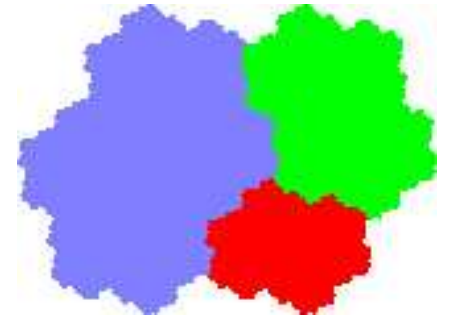
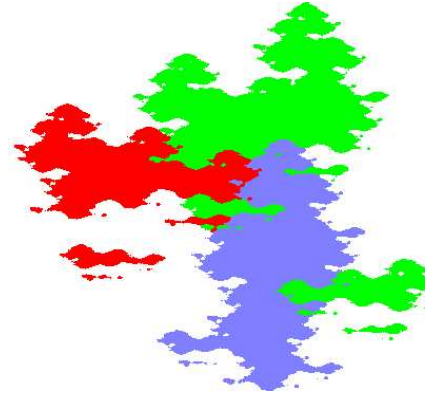
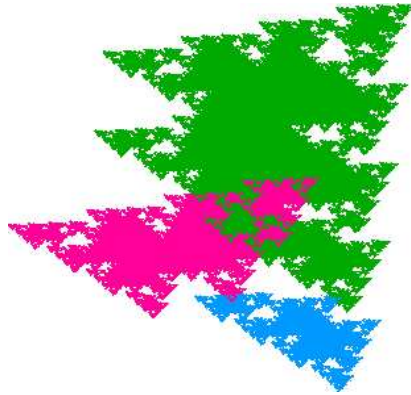
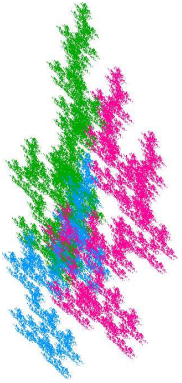
- ⑥ Approximation de nombres par des rationnels
- ⑥ Droites et plans discrets

# Applications (un peu) concrètes



- ⑥ Approximation de nombres par des rationnels
- ⑥ Droites et plans discrets
- ⑥ Poëles à frires (plus formellement, quasi-cristaux)

# Applications (un peu) concrètes



- ⑥ Approximation de nombres par des rationnels
- ⑥ Droites et plans discrets
- ⑥ Poëles à frires (plus formellement, quasi-cristaux)
- ⑥ ...

# *Tout petit changement*

$$1 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$$

Ca devient encore plus compliqué...

# *Tout petit changement*

$$1 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$$

Ca devient encore plus compliqué...

**Objectif.** On veut simplement avoir le droit de remplacer encore et encore !!



# Tentatives

$$1 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

1



# Tentatives

---

$$1 \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$



# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ \vdash & & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ \mapsto & & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 1 & & \end{array}$$



# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ & \mapsto & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 \ 1 & \mapsto & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \ 1 \end{array} \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{array}$$

$$3 \rightarrow 1$$



# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ & \mapsto & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 \ 1 \mapsto & & 2 \\ & & 1 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & & & 1 \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

2

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 1 \mapsto & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$$



# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 & 3 \\ & \mapsto & & \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

$$2\ 3 \mapsto 3\ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3\ 1 \mapsto & & 2 \\ & & 1\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & & 1 & \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

2

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} 1\ 1 \mapsto & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$$

# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ & \mapsto & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 3 \ 1 \mapsto & & \\ & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & & 1 & \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

2

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 1 \mapsto & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 2 \mapsto & 2 & \\ & 1 & 3 \end{array}$$



# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ & \mapsto & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 \ 1 \mapsto & & 2 \\ & & 1 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 2 & & \\ & & & & & & \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & \\ 1 & & & & 1/2 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

2

$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 1 \mapsto & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 \ 2 \mapsto & 2 & \\ & 1 & 3 \end{array}$$

# Tentatives

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 2 \ 3 \\ & \mapsto & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$$2 \ 3 \mapsto 3 \ 1$$

$$1 \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 3 \ 1 \mapsto & & \\ & 1 & 1 \end{array}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 2 & & \\ & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & & & & & ??? & 3 & 1 \\ & & & & & 1 & & \end{array}$$

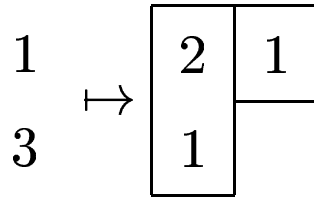
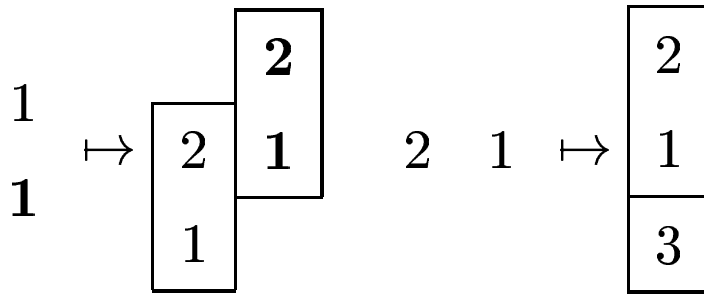
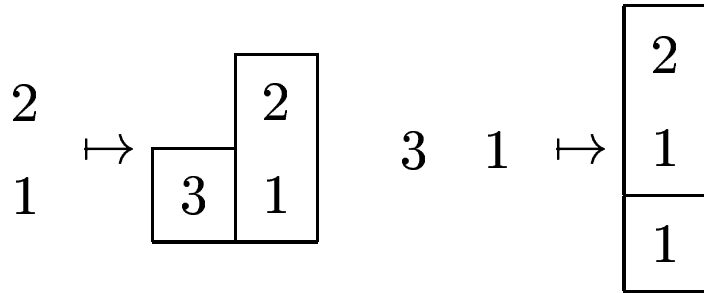
$$3 \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 1 \ 1 \mapsto & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}$$

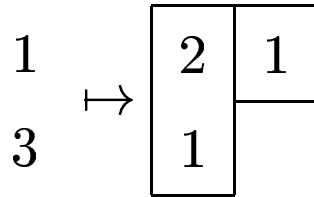
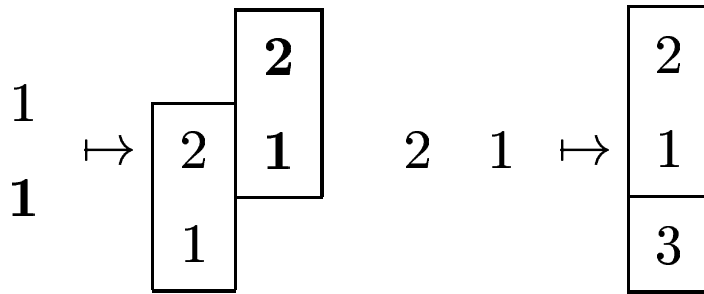
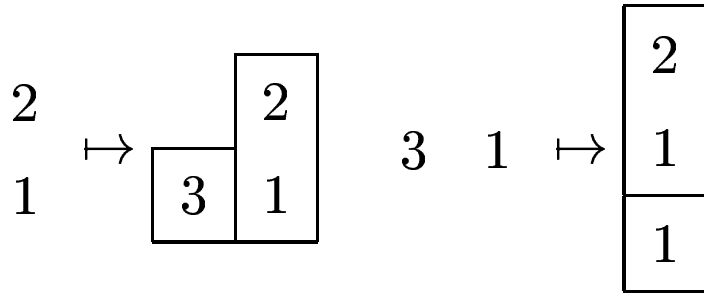
$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ 1 \ 2 \mapsto & & \\ & 1 & 3 \end{array}$$

Les règles ne sont pas compatibles

# *Une proposition*



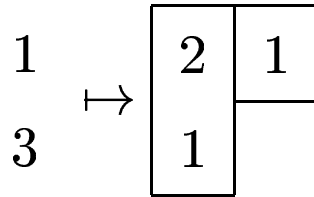
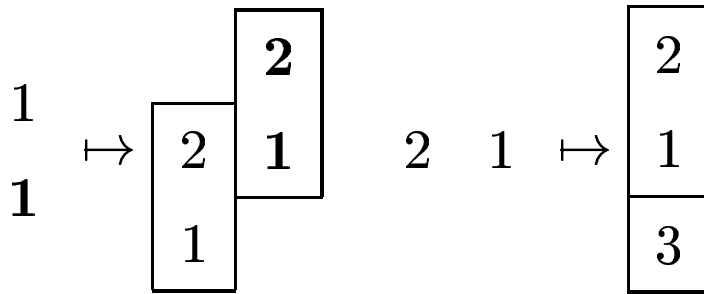
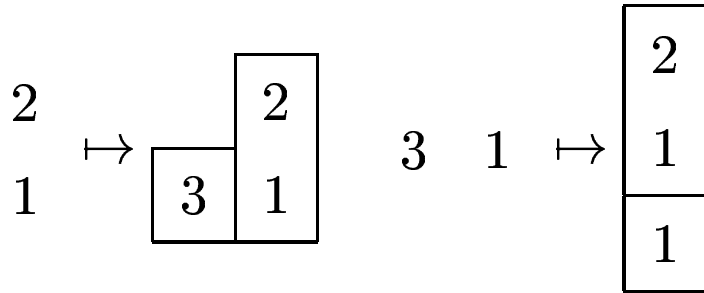
# Une proposition



Miracle !!

(un peu provoqué quand même...)

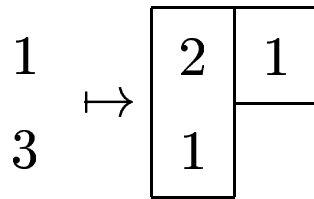
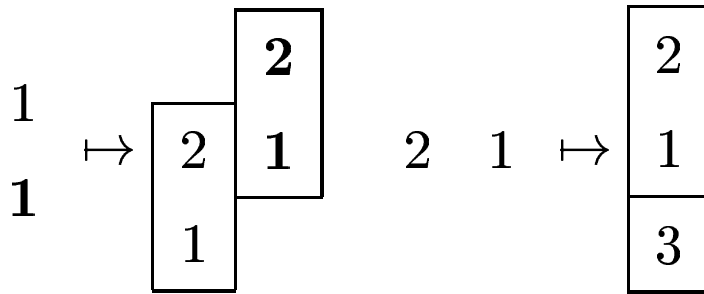
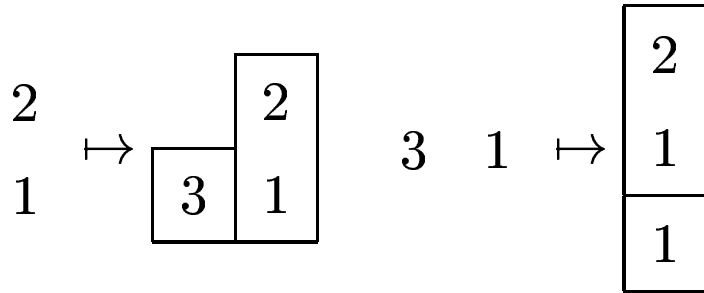
# *Une proposition*



*1*

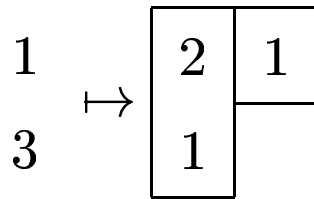
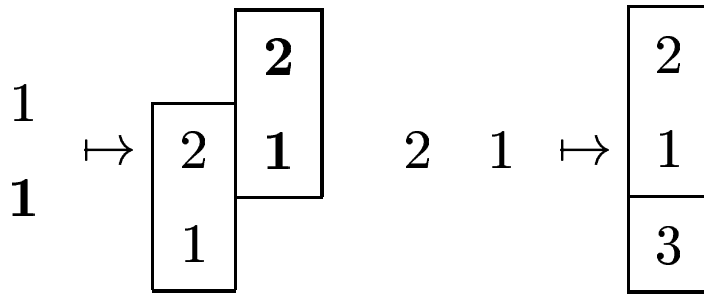
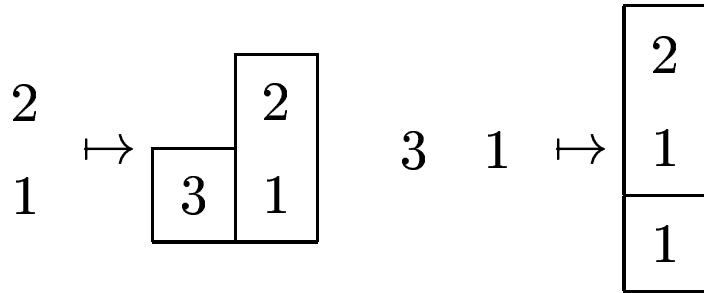


# *Une proposition*



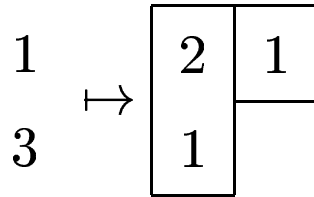
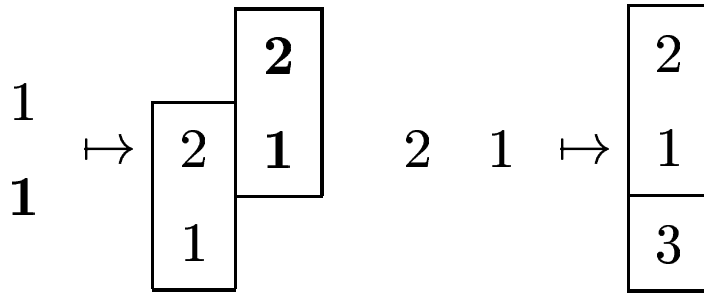
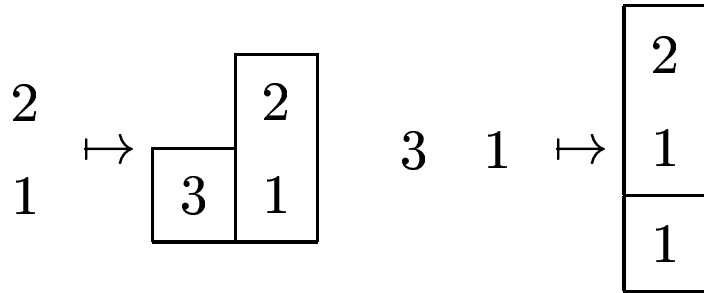
2  
1

# *Une proposition*



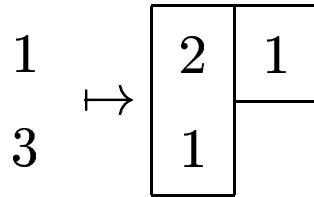
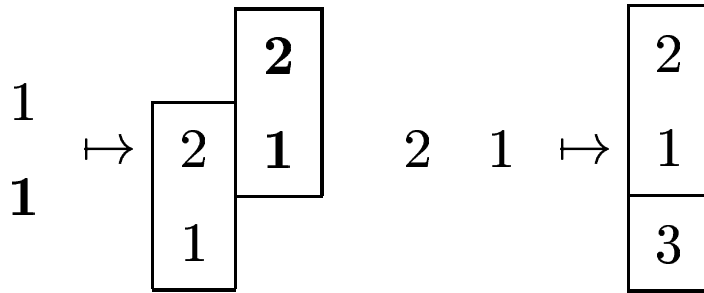
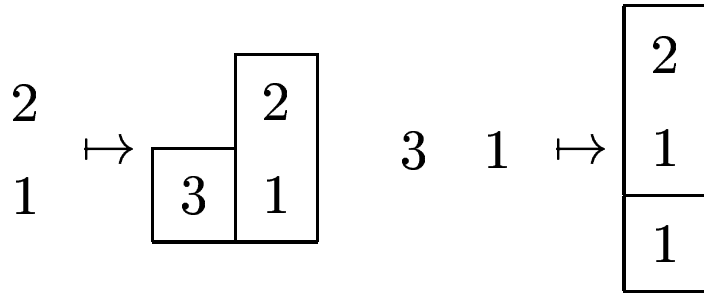
$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

# Une proposition



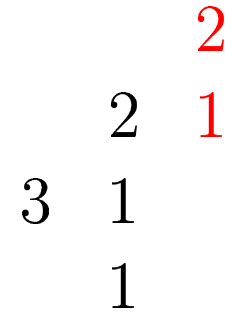
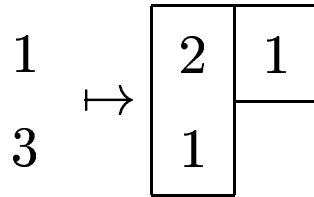
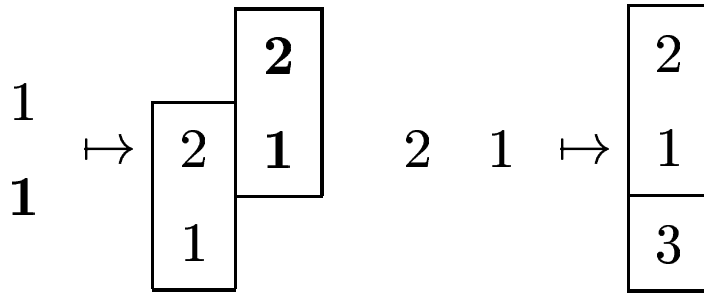
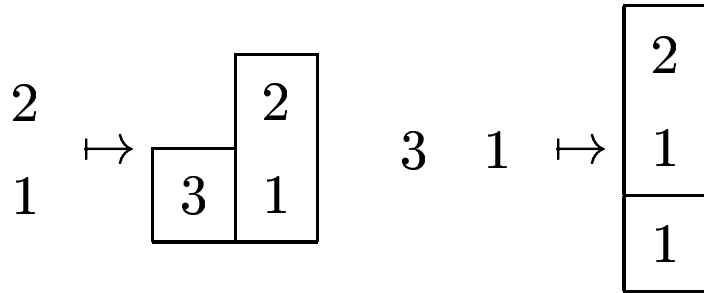
$\begin{matrix} 2 \\ 3 & 1 \\ 1 \end{matrix}$

# Une proposition

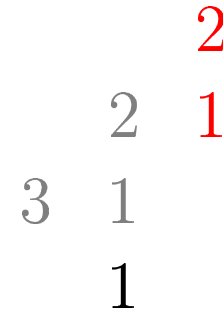
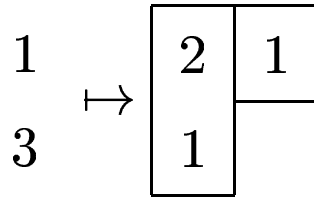
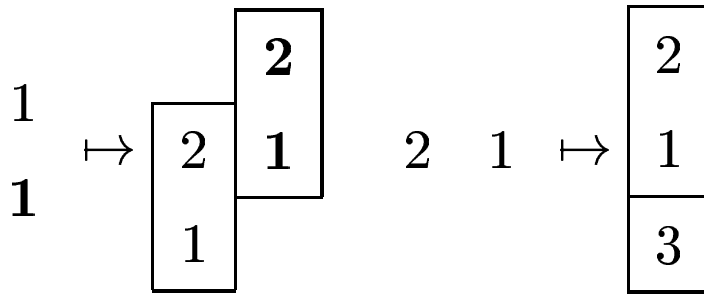
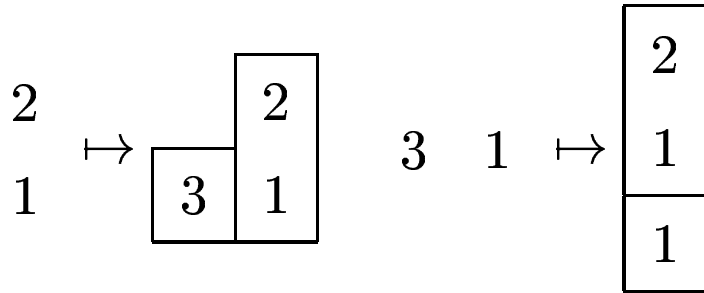


$\begin{matrix} 2 \\ 3 & 1 \\ & 1 \end{matrix}$

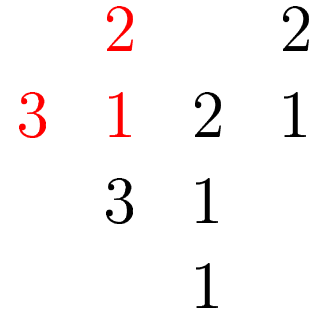
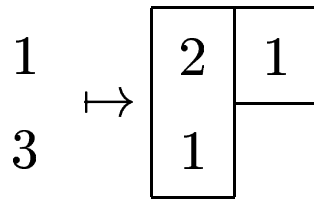
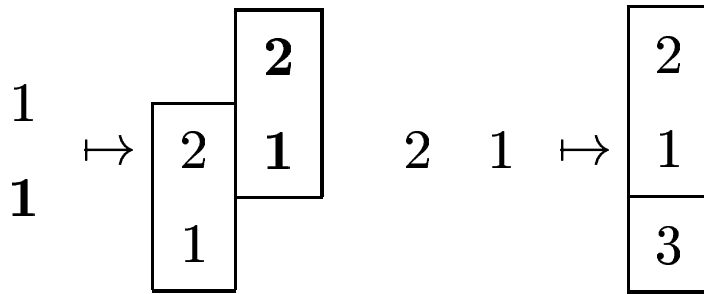
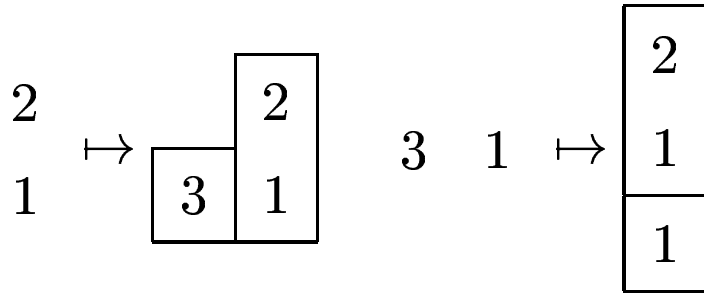
# *Une proposition*



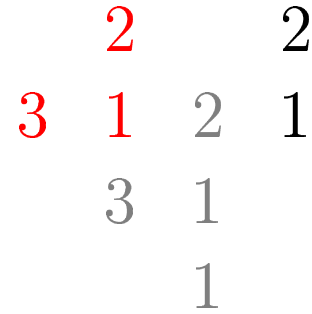
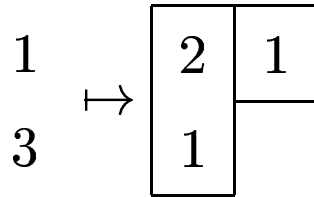
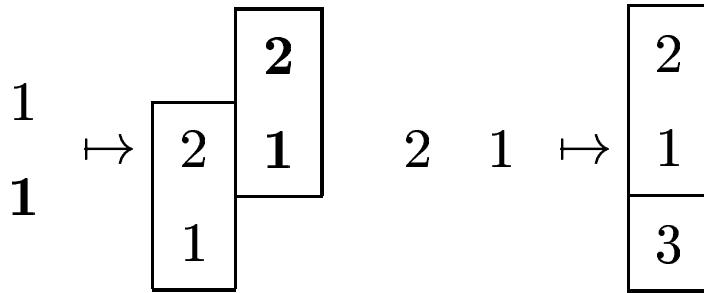
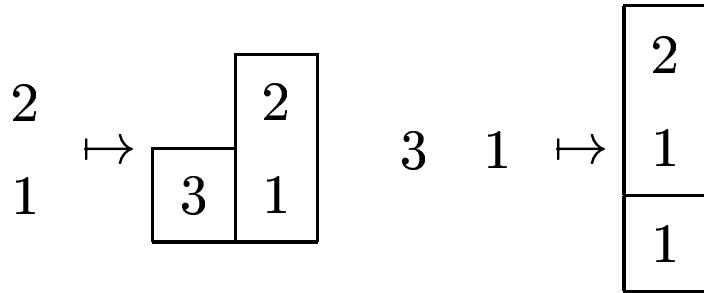
# Une proposition



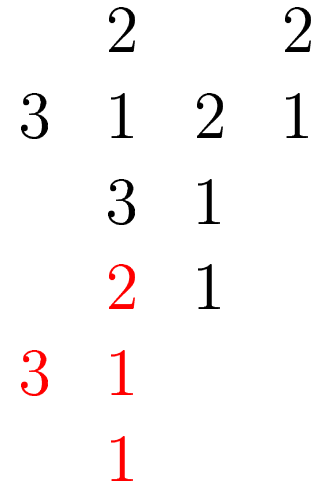
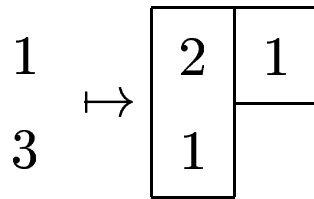
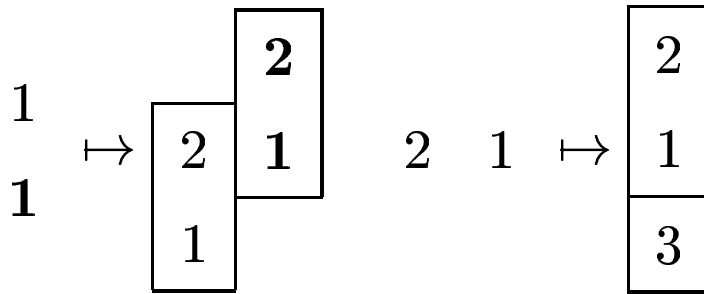
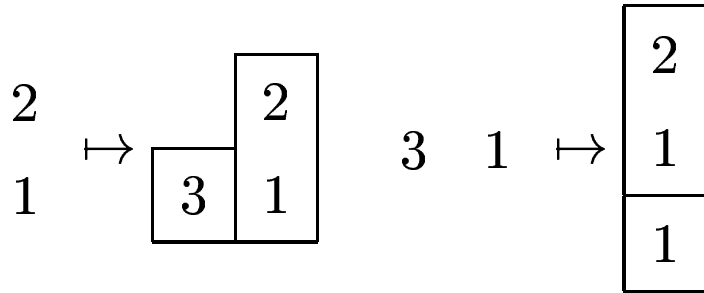
# Une proposition



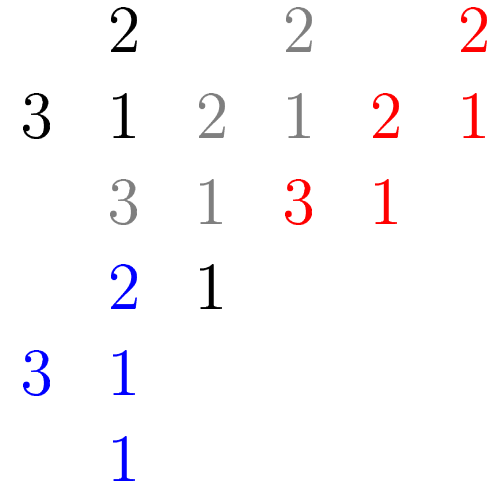
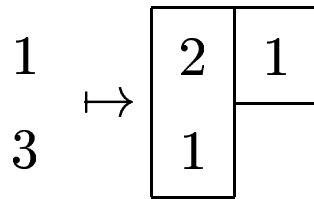
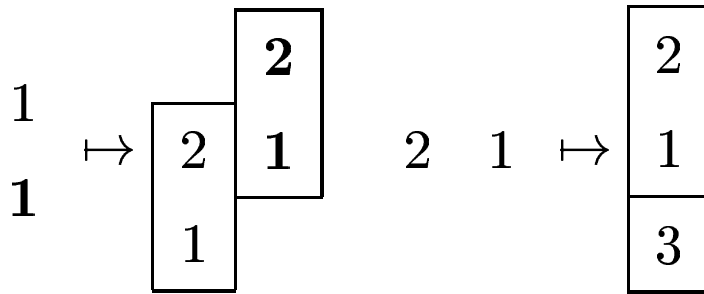
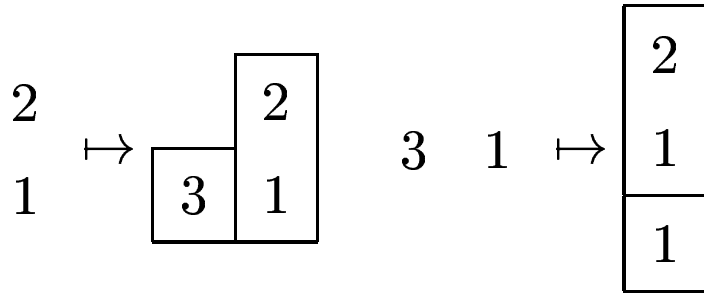
# Une proposition



# Une proposition

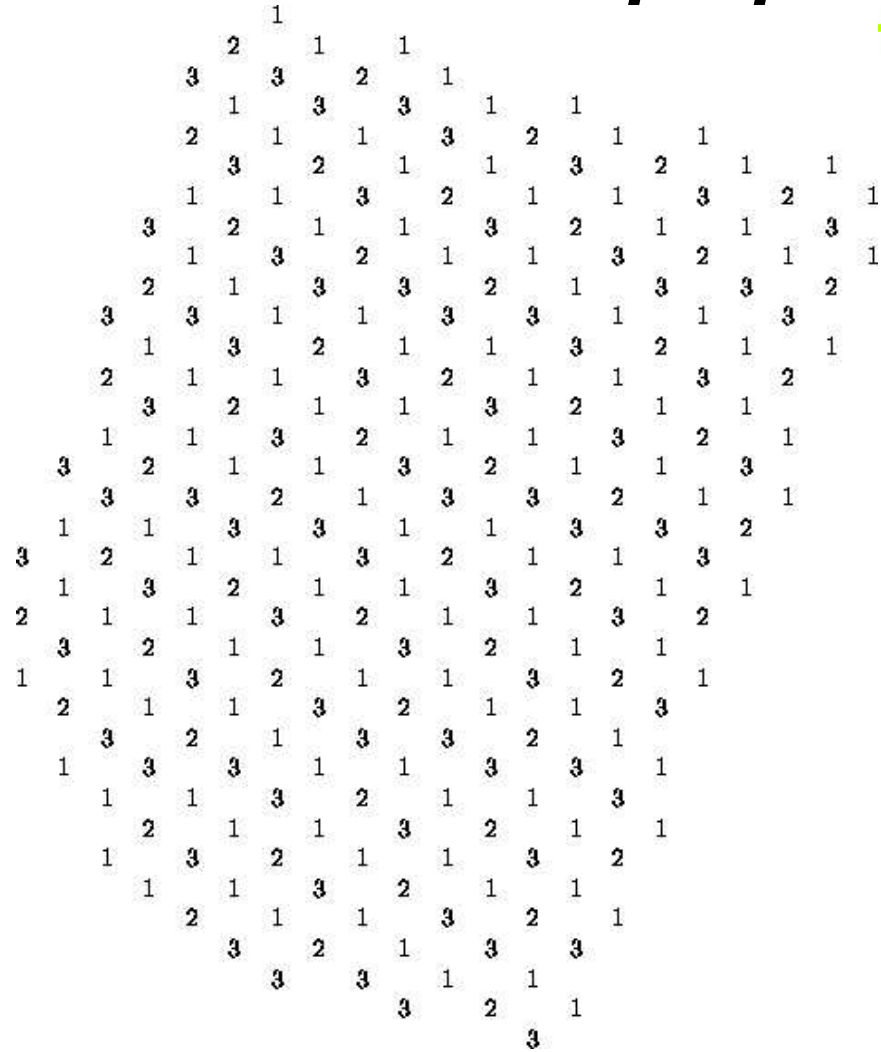
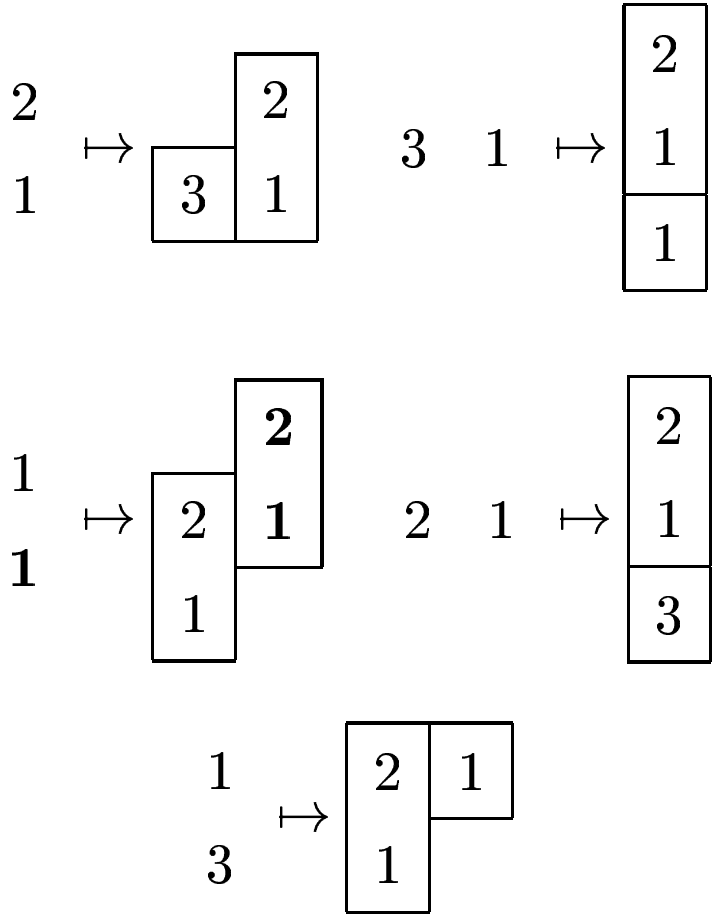


# Une proposition

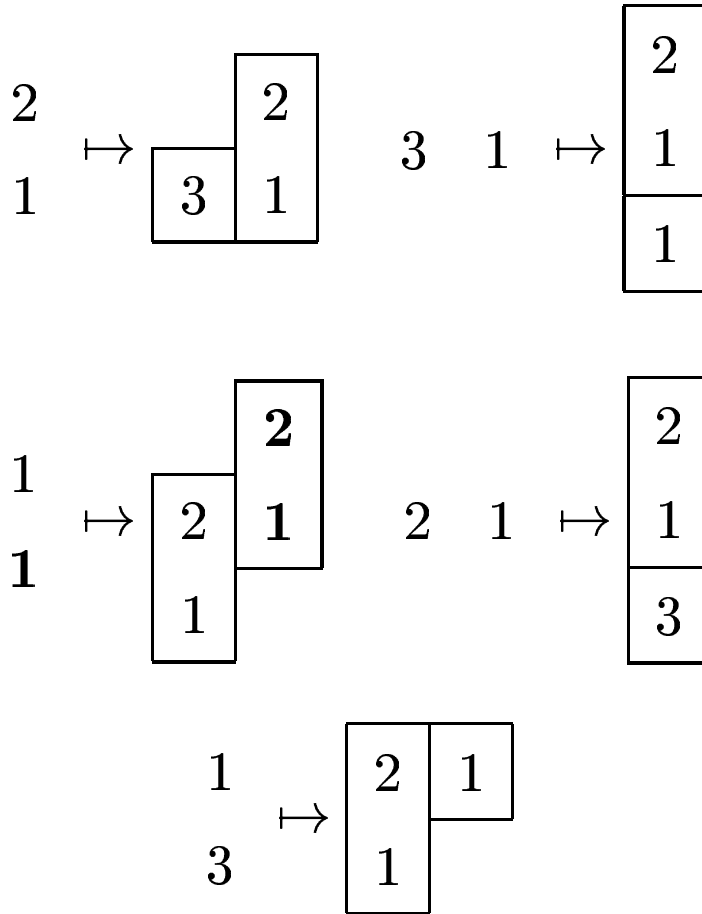




# Une proposition



# Une proposition

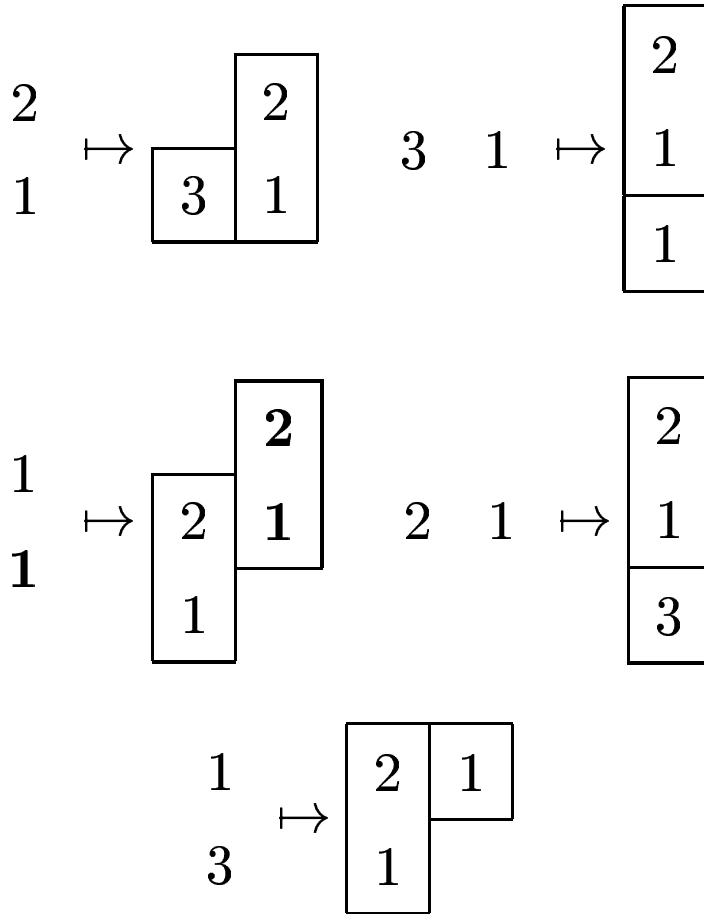


Théorème.

- ⑥ On peut remplacer indéfiniment sans avoir de superposition.



# Une proposition



**Théorème.**

- ⑥ On peut remplacer indéfiniment sans avoir de superposition.
- ⑥ On remplit tout le plan de cette manière.

# *Finalemment on obtient...*

Des 1, des 2 et des 3...

# Finalemment on obtient...

Des 1, des 2 et des 3...

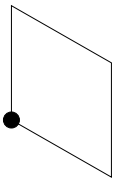
1		3		2		1
	1		1		3	
3		2		1		3
	3		3		1	
1		1		3		2
	2		1		1	
1		3		2		1
	1		1		3	
3		2		1		1
	1		3		2	
2		1		3		3

# Finalemment on obtient...

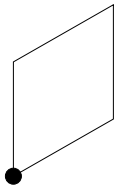
Des 1, des 2 et des 3...

On remplace les chiffres par des losanges équilatéraux.

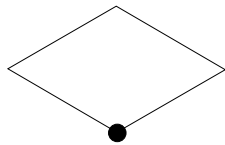
1



2



3



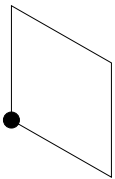
1		3		2		1
	1		1		3	
3		2		1		3
	3		3		1	
1		1		3		2
	2		1		1	
1		3		2		1
	1		1		3	
3		2		1		1
	1		3		2	
2		1		3		3

# Finalemment on obtient...

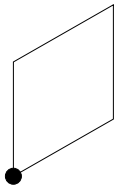
Des 1, des 2 et des 3...

On remplace les chiffres par des losanges équilatéraux.

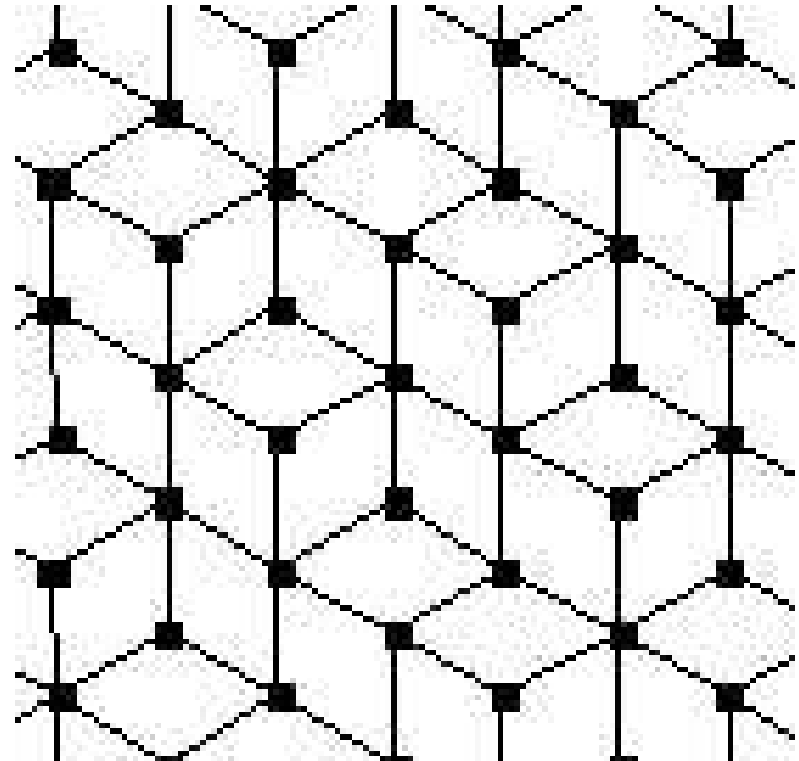
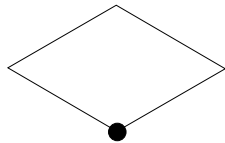
1



2



3

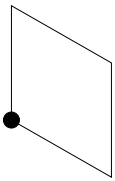


# Finalemment on obtient...

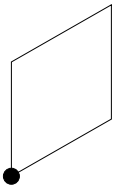
Des 1, des 2 et des 3...

On remplace les chiffres par des losanges équilatéraux.

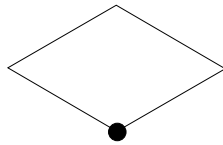
1



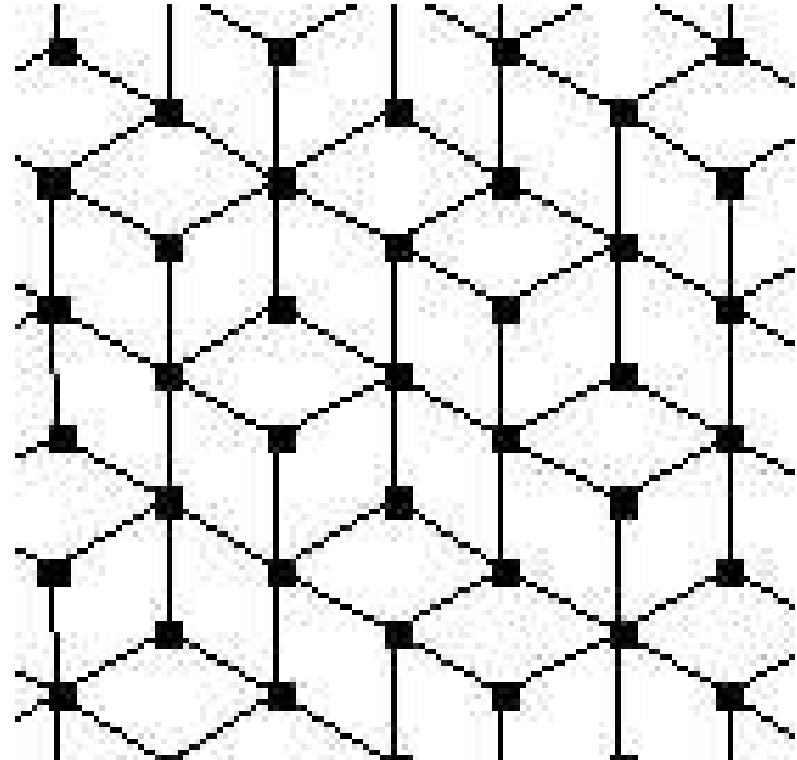
2



3



On rajoute des couleurs.



# Finalemment on obtient...

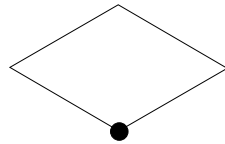
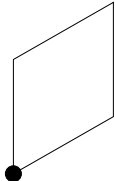
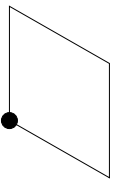
Des 1, des 2 et des 3...

On remplace les chiffres par des losanges équilatéraux.

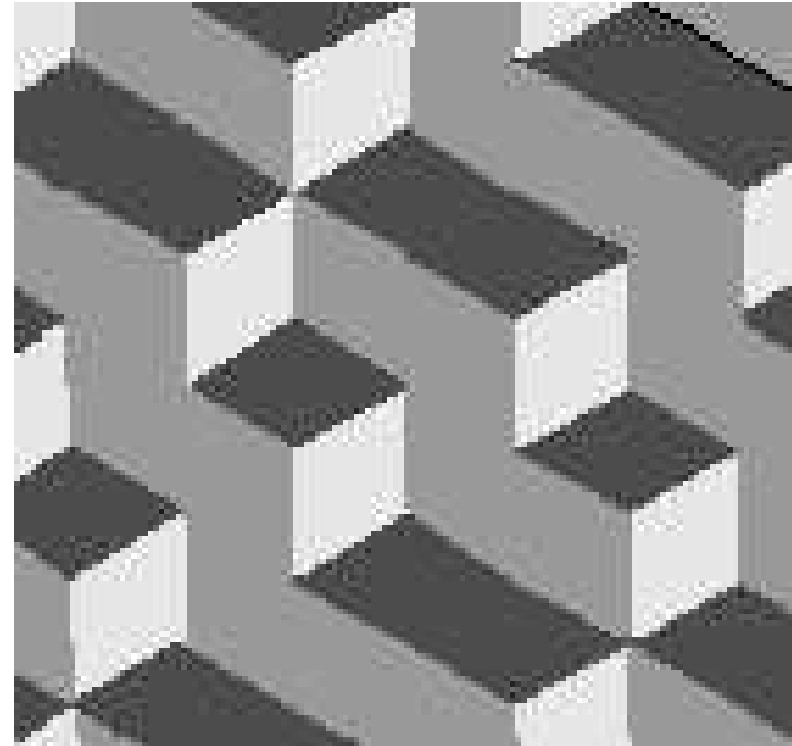
1

2

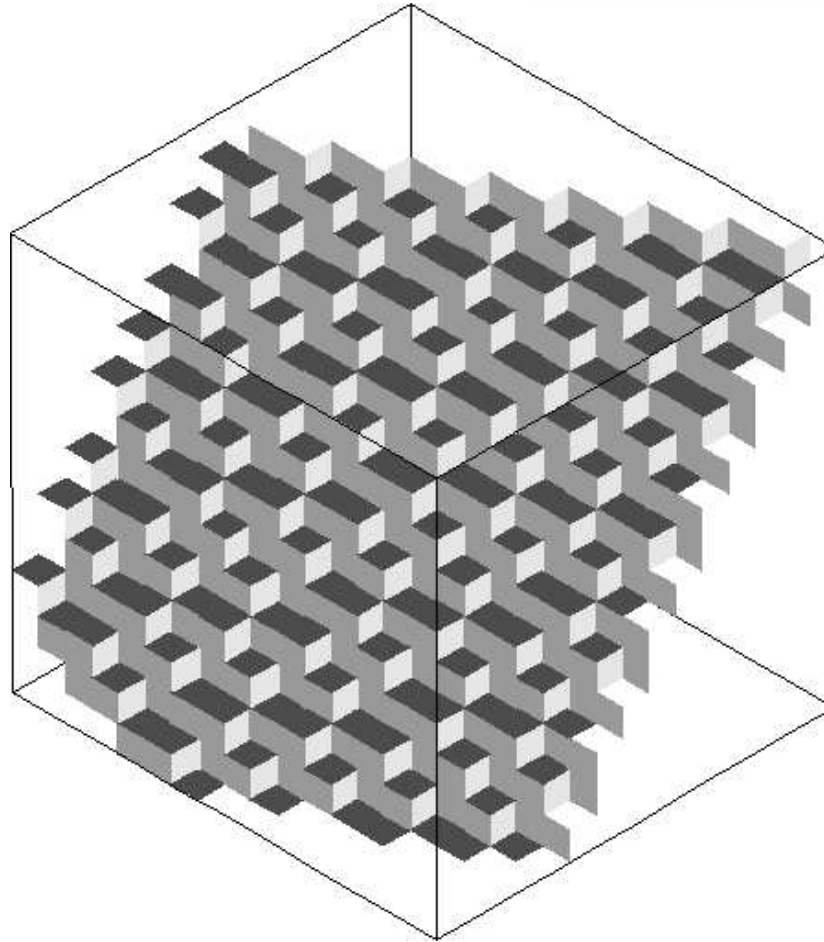
3

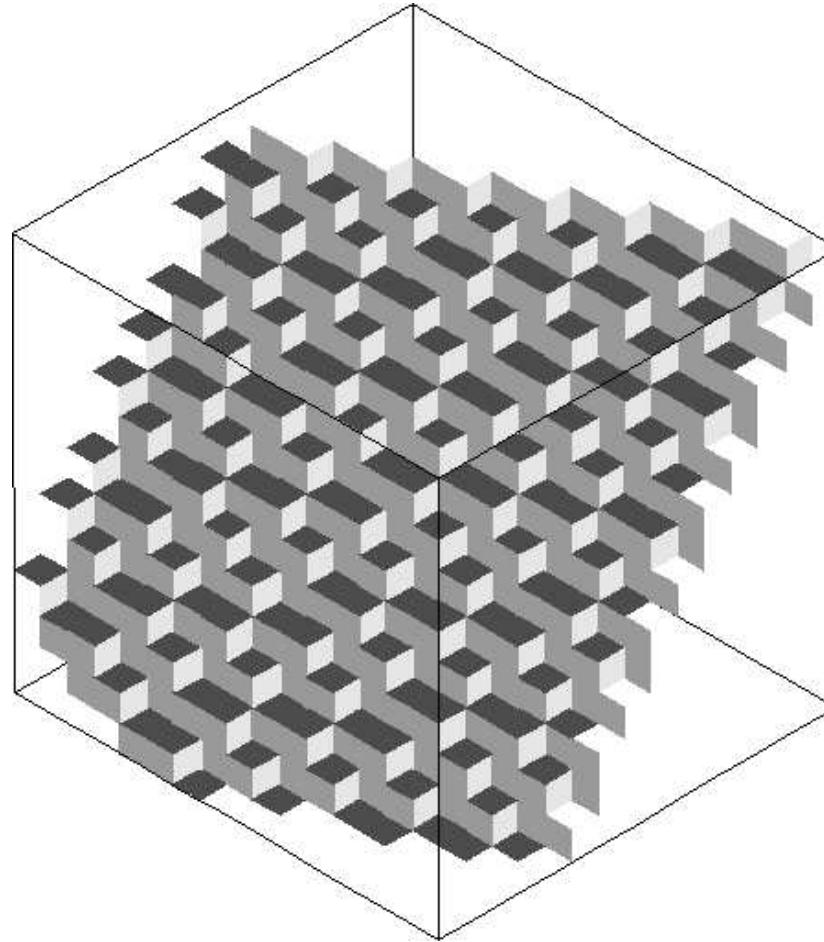


On rajoute des couleurs.



# Un plan discret





Il s'agit précisément du plan dans lequel on avait projeté le fractal de Rauzy...

# Conclusion

Ces règles locales fonctionnent mais...

- ⑥ la démonstration est assez compliquée

# Conclusion

---

Ces règles locales fonctionnent mais...

- ⑥ la démonstration est assez compliquée
- ⑥ elle fait appel à de la géométrie, à de la dualité et à des astuces combinatoires

# Conclusion

---

Ces règles locales fonctionnent mais...

- ⑥ la démonstration est assez compliquée
- ⑥ elle fait appel à de la géométrie, à de la dualité et à des astuces combinatoires
- ⑥ on ne peut prouver cela qu'au cas par cas pour certaines règles locales

## *Conclusion*

---

Ces règles locales fonctionnent mais...

- ⑥ la démonstration est assez compliquée
- ⑥ elle fait appel à de la géométrie, à de la dualité et à des astuces combinatoires
- ⑥ on ne peut prouver cela qu'au cas par cas pour certaines règles locales

Si quelqu'un a des idées pour une démonstration combinatoire, on est preneur...