Fractals de Rauzy: combinatoires autosimilaires

Anne Siegel (Irisa, CNRS, Rennes)

Orsay, mai 2006

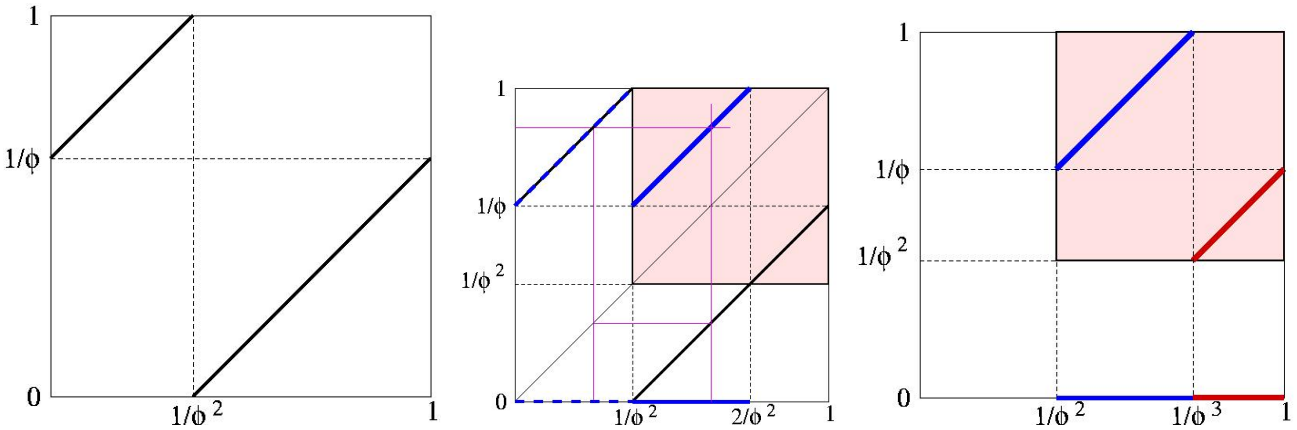
Fractals de Rauzy

- Rauzy – 1981: comment généraliser les propriétés connues sur les échanges d'intervalles
- Thurston – 1989: Représentation des numérations en base non entières
- Domaines sous-jacents:
  - Dynamique symbolique
  - Systèmes dynamiques
  - Numérations
  - Répétition combinatoire: Autosimilarité

Un phénomène de répétition (dynamique, géométrique, numérique) est codé par une transformation combinatoire de répétition... Une représentation géométrique canonique de ces répétitions est donnée par les fractals de Rauzy

Exemple d'auto-induction: addition du nombre d'or

Nombre d'or: $\phi^2 = \phi + 1$



Théorème L'addition du nombre d'or est conjuguée à son premier retour sur le plus grand intervalle de continuité

(deux échanges d'intervalles dont les rapports des longueurs valent ϕ sont identiques)

Dynamique symbolique

- Suites symboliques: mieux comprendre la dynamique de certaines appplications.

Codage des orbites d'un système dans une partition finie bien choisie

Partitions de Markov

- Suite de Morse (1920). Géodésique non fermée récurrente dans des surfaces connexes à courbure négative constante

point fixe de la transformation itérée $0 \to 01$, $1 \to 10$

- Système auto-induit: le système est conjugué à son application de premier retour dans un sous-ensemble bien choisi.

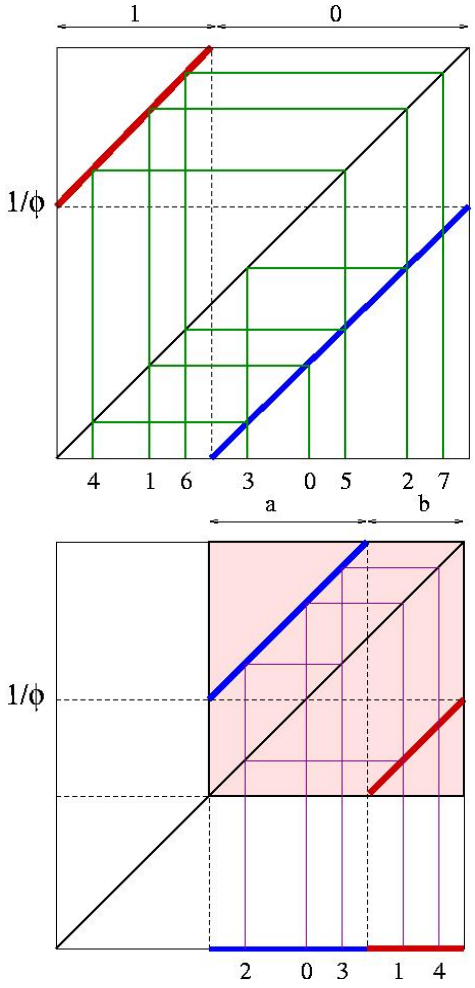
Combinatoire décrivant un système auto-induit ?

Codage symbolique de l'addition du nombre d'or

- Codages respectifs

01	0	01	01	0
a	b	a	a	b

- Passage du codage par l'induit au codage par l'addition:
  $\sigma(a) = 01; \quad \sigma(b) = 0.$
- Le codage de ϕ est le point fixe de σ.



Combinatoire sous-jacente ? Substitution

- Substitution: morphisme de monoïde libre
$$\sigma(1) = 12,\ \sigma(2) = 13,\ \sigma(3) = 1$$
- Point fixe (ou périodique): itérations successives de σ.
$1 \mapsto 12 \mapsto 1213 \mapsto u = 1213121121312121311213\ldots$
- Matrice d'incidence: nombre de lettres dans les images.
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Primitive: $\exists\, n,\ \mathbf{M}^n > 0$

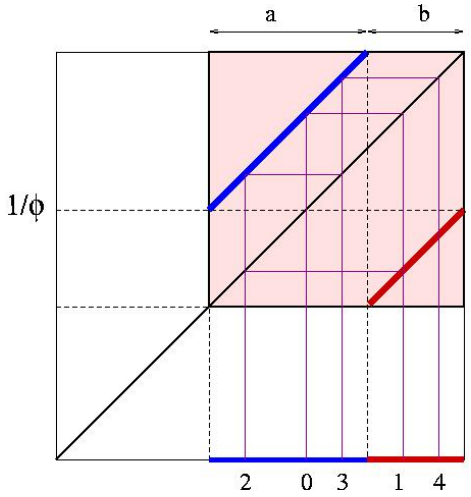
Dynamique substitutive et autosimilarité

Système dynamique symbolique d'une substitution primitive:

- orbite d'un des points périodiques $X_\sigma = \overline{\{S^n u,\ n \in \mathbb{N}\}}$
- dynamique donnée par le décalage S
- Théorème (X_σ, S) est minimal uniquement ergodique

Idée: un système auto-similaire est (plus ou moins) décrit par une substitution.

Théorème L'addition par le nombre d'or est semi-conjugué au système substitutif de Fibonacci: le codage symbolique est continu, surjectif, injectif sauf sur un ensemble dénombrable



Autosimilarité numérique ?

Un nombre est contenu dans ses puissances...

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Combinatoire sous-jacente ?

Numération(s)...

Numération en base 2

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i 2^{-i} \in \mathbb{R}^+$, $a_i \in \{0,1\}$

Algorithme euclidien ($x \in [0,1[$)

$$M_2 : x \in [0,1[\rightarrow 2x - [2x] \in [0,1[$$
$$a_i(x) = [2\, M_2^{i-1}(x)]$$

Développement impropre

$$1 = 0.111111111$$

Développements admissibles: toutes les suites qui ne finissent pas par 111111

Nombre d'or: $\phi^2 = \phi + 1$

Numération en base ϕ

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i \phi^{-i}$, $a_i \in \{0,1\}$

Algorithme euclidien ($x \in [0,1[$)

$$M_\phi : x \in [0,1[\rightarrow \phi x - [\phi x] \in [0,1[$$
$$a_i(x) = [\phi\, M_\phi^{i-1}(x)]$$

Développements impropres

$$1 = 0.11$$
$$1 = 0.1010101010101$$

Développements admissibles: suites qui n'ont pas deux 1 consécutifs qui ne finissent pas par 1010101...

Nombres entiers?

Entier pour une numération: pas de partie fractionnaire

$$x = a_{-n_0}\beta^{n_0} + \dots a_{-1}\beta + a_0,\ \beta = 2, \phi$$

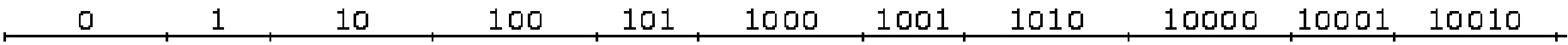
Numération en base 2

Numération en base ϕ

Les entiers sont les entiers naturels

Répartition régulière sur la droite réelle

Répartition irrégulière sur la droite réelle



Deux tailles possibles d'intervalles: 1 ou $1/\phi$

- Lemme: Si les a_i sont admissibles, alors $\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i} < 1$
- Si le développement de l'entier finit par 0: on peut mettre n'importe quoi après: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles } \} = [0, 1[$.
- Si le développement de l'entier finit par 1: le suivant est obligatoirement 0: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles},\ a_1 = 0 \} = [0, 1/\phi[$.

Répartition des intervalles

Ordre des intervalles: Long, Court, Long, Long, Court, Long, Court...

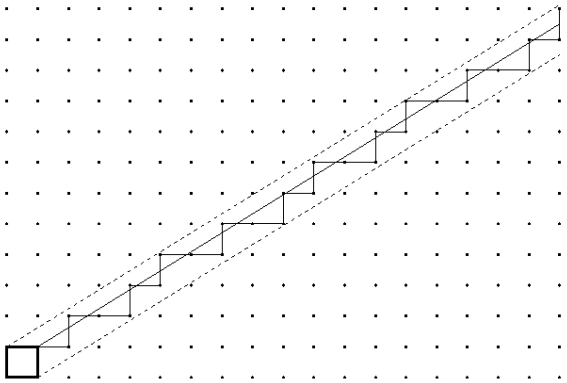
- $I_L = [0, 1[$; $I_C = [0, \frac{1}{\phi}[$.
- $\phi I_L = [0, \phi[= [0, 1[\cup [1, \frac{1}{\phi}[= I_L \cup (I_C + 1[)$.
- $\phi I_C = [0, 1[= I_L$.
- Les entiers en base ϕ s'obtienne en multipliant par ϕ et en redécomposant les intervalles.

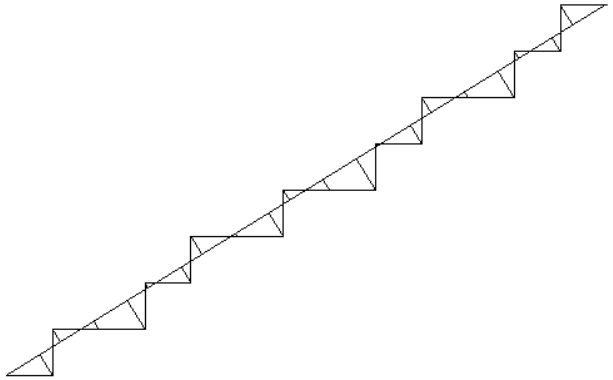
L'ordre des intervalles est fixé par la transformation $L \to LC$, $C \to L$

Représentation des entiers de la numération

Substitution de Fibonacci: $0 \to 01$, $1 \to 0$
Point fixe: 01001010010010100101 0...

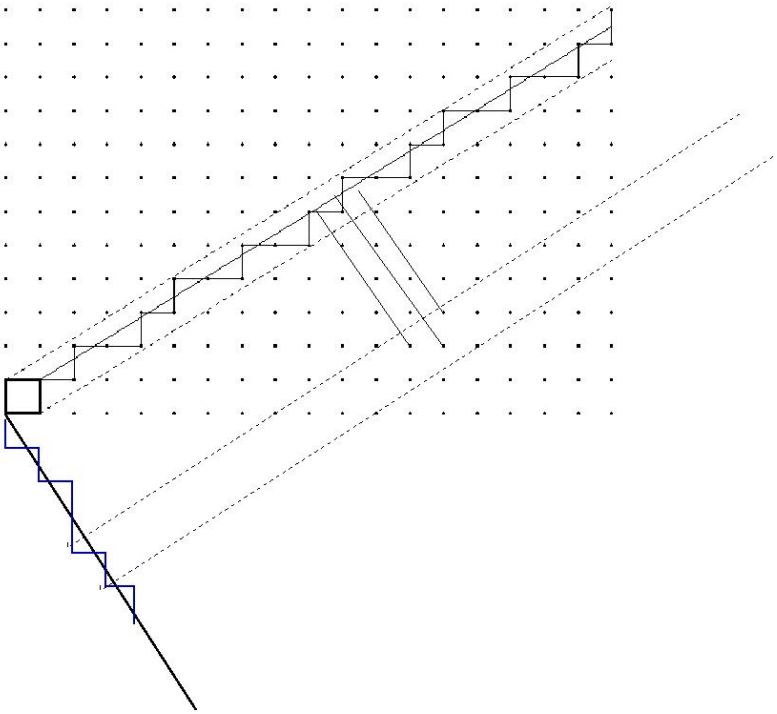
- On plonge la suite en un chemin du plan (escalier irrégulier)
- L'escalier approxime la droite $y = \frac{x}{\phi}$.
- Meilleure approximation de la droite: points entiers de la bande limitée par $y = \frac{x}{\phi} - 1$ et $y = \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi}$.
- Entiers de la numération: projection des points de l'escalier sur la droite





Numération et combinatoire

Dynamique additive ? Le passage au successeur sur l'ensemble des β-entiers commute avec l'addition par le nombre d'or.



Généralisation à d'autres entiers algébriques ? Généralisation à d'autres dynamiques ?

Cadre de généralisation

- Nombre de Pisot: Nombre algébrique positif β dont les conjugués algébriques sont de modules strictement inférieurs à 1.
- Substitution Pisot: la valeur propre dominante de la matrice d'incidence est un nombre de Pisot.
- Substitution unimodulaire: $\det \mathbf{M} = \pm 1$

Un nombre de Pisot est associé à une substitution Pisot via la notion de numération...

Généralisation: β-numération

- β-transformation $T_\beta : x \mapsto \beta x \pmod 1$
- β-développement $d_\beta : x \in [0,1[\mapsto (u_i)_{i\geq 1} \in \{0 \dots [\beta]\}^{\mathbb{N}}$
$$x = \sum_{i\geq 1} u_i \beta^{-i}, \quad u_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$$
- développement infini de 1 (éventuellement impropre) $d^*_\beta(1) = (t_i)_{i\geq 1}$
$$1 = \sum_{i\geq 1} t_i \beta^{-i}$$
- Restriction sur la base: $\beta > 1$ nombre de Pisot de degré d (tous ses conjugués algébriques sont de module < 1)
  - la β-expansion de tout $x \in \mathbb{Q}(\beta) \in [0,1[$ est ultimement périodique
  - la β-expansion de 1 est finie ou ultimement périodique.
- Condition d'admissibilité pour être un développement: $(u_i)_{i\geq 1}$ est le β-développement de $x \in [0;1[$ ssi $\forall k \geq 1,\ (u_i)_{i\geq k} <_{\text{lex}} d^*_\beta(1)$.

Combinatoire associée aux parties entières

- L'autosimilarité du nombre β est décrite dans la relation $1 = \sum_{i\geq 1} t_i \beta^{-i}$ puisque les t_i sont ultimement périodiques (préperiode p, période n).

  les nombres de Pisot sont autosimilaires $(T_\beta^{p+n}(\beta) = T_\beta^p(\beta))$

- Entiers pour la numération: décomposent la droite réelle en $p+n$ intervalles de longueur $T_\beta^i(\beta)$.
- Substitution associée

$$\sigma_\beta : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & \mapsto 1^{t_{n-1}}n \\ n & \mapsto 1^{t_n}. \end{cases} \qquad \sigma_\beta : \begin{cases} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n+p-1 & \mapsto 1^{t_{n+p-1}}(n+p) \\ n+p & \mapsto 1^{t_{n+p}}(n+1). \end{cases}$$

- Ordre des intervalles: point fixe de la substitution

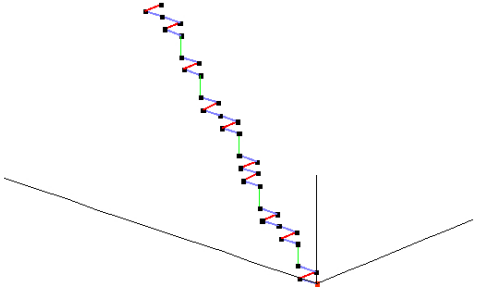
Les parties entières de la numération sont bien décrites par la combinatoire de la substitution

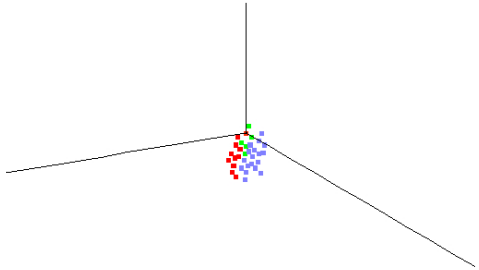
Représentation par escalier?

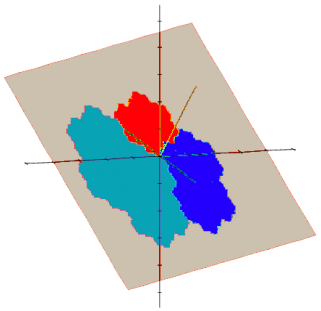
- Escalier associé au point fixe (β nombre de Pisot unitaire)
- β-entiers: projection sur la direction dilatante
- Projection sur l'espace propre associé aux conjugués de β: compact

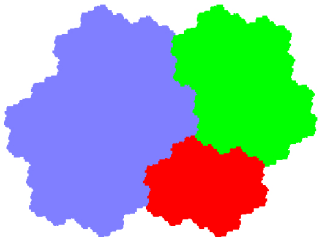
Fractals de Rauzy ou Tuile de Thurston

- Coupe et projection: l'escalier est exactement l'ensemble des points entiers "au-dessus" du fractal.

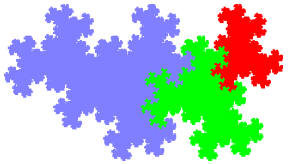




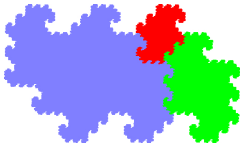




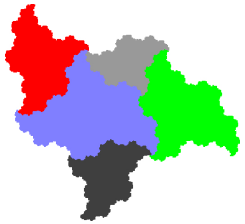
$\beta^3 = \beta^2+\beta+1$



$\beta^3 = \beta^2+2\beta+1$



$\beta^3 = 2\beta^2+2\beta+1$

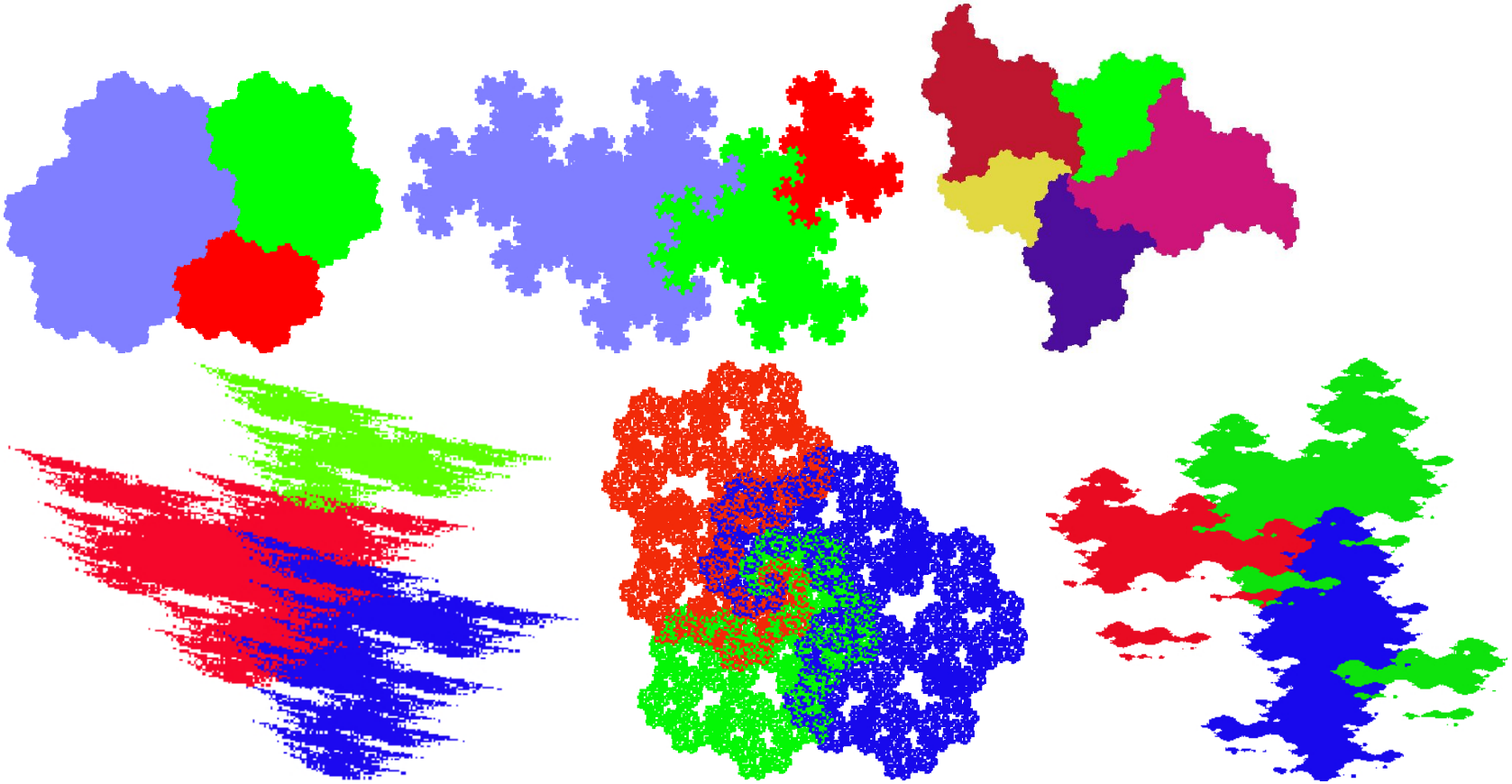


$\beta^3 = \beta+1$

$\beta^2 = \beta+1$

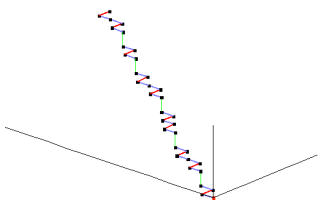
Fractals de Rauzy

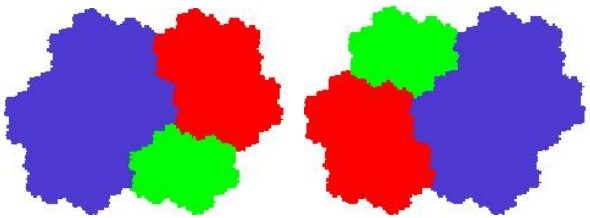
On part d'une substitution Pisot quelconque... Construction par escalier



Dynamique de translation sur le fractal de Rauzy

- Autre partition du fractal: couleur de l'arête sortante (au lieu de l'arête entrante)





- Echange de morceaux: translation par les projections des vecteurs canoniques sur chaque morceau du fractal. Stabilise le fractal.
- Fortes coincidences: les pièces sont disjointes en mesure.

$$\forall\ b_1,\ b_2,\ \exists\, a,\ \sigma^n(b_1) = P_1\, a\, S_1,\ \sigma^n(b_2) = P_2\, a\, S_2,$$

P_1 et P_2 contiennent les mêmes lettres.

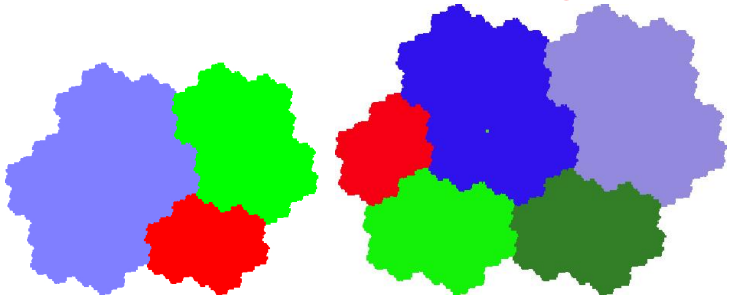
Théorème (Host, Arnoux-Ito). Sous la condition de fortes coïncidences, l'échange de morceaux sur le fractal de Rauzy est conjugué en mesure au système symbolique (X_σ, S).

Géométrie fractale ?

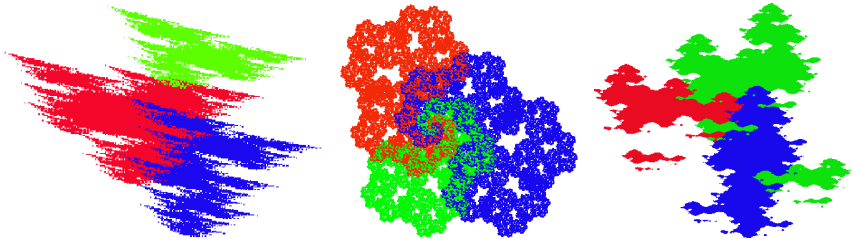
- Couleurs: associée au type d'arête lue avant projection
- Projection du point fixe de la substitution: autosimilarité géométrique

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_1 + \overline{\alpha}\mathcal{R}_2 + \overline{\alpha}\mathcal{R}_3 \\ \mathcal{R}_2 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_1 + 1 \\ \mathcal{R}_3 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_2 + 1 \end{cases}$$

Plongé dans $\mathbb{C}$

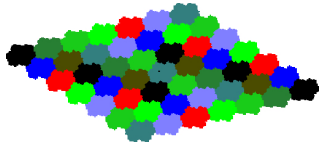


- condition suffisante pour pièces disjointes et autosimilarité: fortes coincidences (les escaliers de tous les points fixes partagent une arête commune). Pas de contre-exemple.
- Propriétés géométriques: Conditions de connexité, de simple connexité, 0 point intérieur...



Dynamiques additives?

- S'il y a un vecteur de translation de plus que la dimension du plan dans lequel est projeté le fractal, l'échange de morceaux admet pour quotient une translation sur un tore.
- C'est vrai en particulier si le polynome caractéristique de la matrice d'incidence est irréductible.
- Géométriquement, cela est équivalent à dire que le fractal de Rauzy recouvre le plan de manière régulière.



On ne sait pas à priori si le recouvrement est un pavage, id est, si le système substitutif est conjugué à une translation sur le tore

Théorème (Barge-Kwaplitz) Il y a pavage ssi le système dynamique substitutif est à spectre discret (cas Pisot irréductible unitaire).

Conditions de pavages?

On ne sait pas si les tuiles sont disjointes à priori !

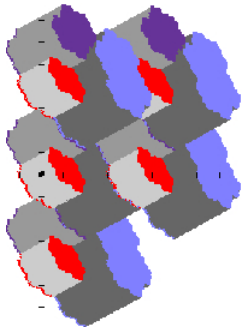
- CNS: super-coincidences
  - géométrie discrète: un escalier du point fixe partant de chaque point du plan discret ont une arete commune.
  - graphes: l'algorithme des paires balancées termine.
  - topologie: les approximations de la frontière convergent vers la frontière...
- Condition suffisante: (F)-property
  - numération: $\mathbb{Z}[1/\beta]$ n'a que des développements finis
  - vrai si les coefficients du polynome de β sont décroissants vers 1
- ...

Conclusion

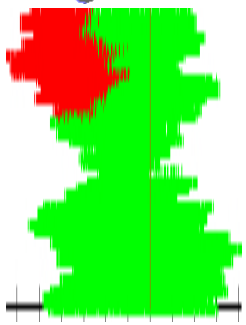
- Les fractals de Rauzy sont des objets géométriques canoniques permettant de décrire des phénomènes auto-similaires (dynamiques auto-induites, nombres algébriques, géométrie fractale).
- Il reste des conditions à vérifier pour avoir des descriptions "exactes" en mesure
- S'applique bien aux nombres de Pisot. Exemples de généralisation au cas non Pisot ou aux morphismes de groupes libres.

Applications

- Construction de partitions de Markov explicites
  - automorphisme positif Pisot unitaire du tore
  - substitution associée
  - beaux dessins
  - on décrit exactement les trajectoires de l'automorphisme



- Etude des beta-numération
  - la p-expansion de x est purement periodique ssi $x = \frac{n}{m}$, pgcd(m,n)=1.
  - Si β unitaire, il existe ϵ tel que les β-expansions de $\mathbb{Q} \cap [0, \epsilon[$ sont toutes purement périodique.
  - Faux si β non unitaire. L'existence de ϵ dépend de la structure du fractal associé.



- Modèles de quasi-cristaux
  - Def: pavages presque périodiques de la droite ou du plan (récurrent et minimal); ex: pavages de Penrose
  - physique : alliage qui cristallise avec une symétrie d'ordre 5
  - très bonne résistance mécanique: poëles à frire.
  - Les β-numérations et les fractals de Rauzy sont des exemples non-triviaux et étudiables de quasi-cristaux