Autosimilarité, Beta numeration, et approximation de plans discrets

Anne Siegel (Irisa, CNRS, Rennes)

LIRMM, Février 2006

- Numération: développer dss réels à partir de différents algorithmes. Propriétés des développements. Rapidité de convergence des algorithmes.
- Géométrie discrète: approximer des objets géométriques par des objets discrets (faces de cubes...)

Dans les cas auto-similaires, relation entre des développements dans certaines bases et des approximations de droites/plans ?

Numération(s)...

Nombre d'or: $\phi^2 = \phi + 1$

Numération en base 2

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i 2^{-i} \in \mathbb{R}^+$, $a_i \in \{0, 1\}$

Algorithme euclidien $(x \in [0, 1[)$

$M_2 : x \in [0, 1[\to 2x - [2x] \in [0, 1[$
$a_i(x) = [2\, M_2^{i-1}(x)]$

Développement impropre

$1 = 0.111111111$

Développements admissibles: toutes les suites qui ne finissent pas par 111111

Numération en base ϕ

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i \phi^{-i}$, $a_i \in \{0, 1\}$

Algorithme euclidien $(x \in [0, 1[)$

$M_\phi : x \in [0, 1[\to \phi x - [\phi x] \in [0, 1[$
$a_i(x) = [2\, M_\phi^{i-1}(x)]$

Développements impropres

$1 = 0.11$
$1 = 0.1010101010101$

Développements admissibles: suites qui n'ont pas deux 1 consécutifs qui ne finissent pas par 1010101...

Numération(s)...

Nombre d'or: $\phi^2 = \phi + 1$

Numération en base 2

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i 2^{-i} \in \mathbb{R}^+$, $a_i \in \{0, 1\}$

Algorithme euclidien ($x \in [0, 1[$)

$$M_2 : x \in [0,1[\to 2x - [2x] \in [0,1[$$
$$a_i(x) = [2\, M_2^{i-1}(x)]$$

Développement impropre

$$1 = 0.111111111$$

Développements admissibles: toutes les suites qui ne finissent pas par 111111

Numération en base ϕ

$x = \sum_{i \geq -n_0} a_i \phi^{-i}$, $a_i \in \{0, 1\}$

Algorithme euclidien ($x \in [0, 1[$)

$$M_\phi : x \in [0,1[\to \phi x - [\phi x] \in [0,1[$$
$$a_i(x) = [2\, M_\phi^{i-1}(x)]$$

Développements impropres

$$1 = 0.11$$
$$1 = 0.1010101010101$$

Développements admissibles: suites qui n'ont pas deux 1 consécutifs qui ne finissent pas par 1010101...

Nombres entiers?

Entier pour une numération: pas de partie fractionnaire

$$x = a_{-n_0}\beta^{n_0} + \dots a_{-1}\beta + a_0,\ \beta = 2, \phi$$

Numération en base 2

Numération en base ϕ

Les entiers sont les entiers naturels

Répartition régulière sur la droite réelle

Répartition irrégulière sur la droite réelle

Deux tailles possibles d'intervalles: 1 ou $1/\phi$

- Lemme: Si les a_i sont admissibles, alors $\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i} < 1$
- Si le développement de l'entier finit par 0: on peut mettre n'importe quoi après: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles }\} = [0, 1[$.
- Si le développement de l'entier finit par 1: le suivant est obligatoirement 0: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles},\ a_1 = 0\ \} = [0, 1/\phi[$.

Nombres entiers?

Entier pour une numération: pas de partie fractionnaire

$$x = a_{-n_0}\beta^{n_0} + \dots a_{-1}\beta + a_0,\ \beta = 2, \phi$$

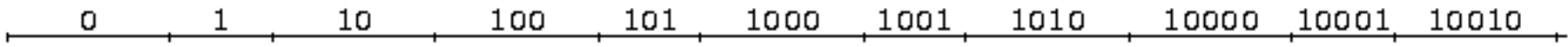
Numération en base 2

Les entiers sont les entiers naturels

Répartition régulière sur la droite réelle

Numération en base ϕ

Répartition irrégulière sur la droite réelle



Deux tailles possibles d'intervalles: 1 ou $1/\phi$

- Lemme: Si les a_i sont admissibles, alors $\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i} < 1$
- Si le développement de l'entier finit par 0: on peut mettre n'importe quoi après: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles }\} = [0, 1[$.
- Si le développement de l'entier finit par 1: le suivant est obligatoirement 0: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i},\ a_i \text{ admissibles},\ a_1 = 0\ \} = [0, 1/\phi[$.

Nombres entiers?

Entier pour une numération: pas de partie fractionnaire

$$x = a_{-n_0}\beta^{n_0} + \ldots a_{-1}\beta + a_0, \ \beta = 2, \phi$$

Numération en base 2

Les entiers sont les entiers naturels

Répartition régulière sur la droite réelle

Numération en base ϕ

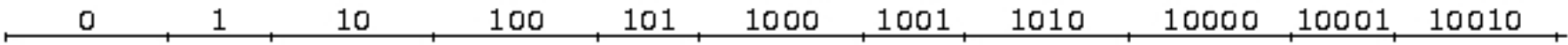
Répartition irrégulière sur la droite réelle

0 1 10 100 101 1000 1001 1010 10000 10001 10010

Deux tailles possibles d'intervalles: 1 ou $1/\phi$

- Lemme: Si les a_i sont admissibles, alors $\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i} < 1$
- Si le développement de l'entier finit par 0: on peut mettre n'importe quoi après: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i}, \ a_i \text{ admissibles } \} = [0,1[$.
- Si le développement de l'entier finit par 1: le suivant est obligatoirement 0: $\{\sum_{i\geq 1} a_i\phi^{-i}, \ a_i \text{ admissibles}, \ a_1 = 0 \ \} = [0,1/\phi[$.

Répartition des intervalles

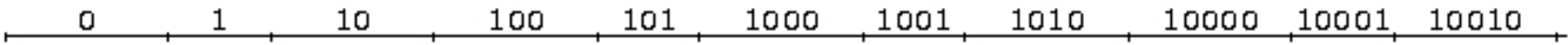


Ordre des intervalles: Long, Court, Long, Long, Court, Long, Court...

- $I_L = [0, 1[$; $I_C = [0, \frac{1}{\phi}[$.
- $\phi I_L = [0, \phi[= [0, 1[\cup[1, \frac{1}{\phi}[= I_L \cup (I_C + 1[)$.
- $\phi I_C = [0, 1[= I_L$.
- Les entiers en base ϕ s'obtienne en multipliant par ϕ et en redécomposant les intervalles.

L'ordre des intervalles est fixé par la transformation $L \to LC$, $C \to L$

Répartition des intervalles



Ordre des intervalles: Long, Court, Long, Long, Court, Long, Court...

- $I_L = [0, 1[$; $I_C = [0, \frac{1}{\phi}[$.
- $\phi I_L = [0, \phi[= [0, 1[\cup[1, \frac{1}{\phi}[= I_L \cup (I_C + 1[)$.
- $\phi I_C = [0, 1[= I_L$.
- Les entiers en base ϕ s'obtienne en multipliant par ϕ et en redécomposant les intervalles.

L'ordre des intervalles est fixé par la transformation $L \rightarrow LC$, $C \rightarrow L$

Représentation des entiers de la numération

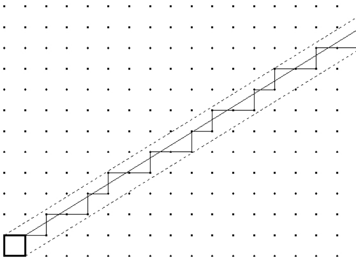
Substitution de Fibonacci: $0 \longrightarrow 01$, $1 \longrightarrow 0$
Point fixe: itération infinie
0
01
010
01001
0100101001001010010...

- On plonge la suite en un chemin du plan (escalier irrégulier)
- L'escalier approxime la droite $y = \frac{x}{\phi}$.
- Meilleure approximation de la droite: points entiers de la bande limitée par $y = \frac{x}{\phi} - 1$ et $y = \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi}$.
- Entiers de la numération: projection des points de l'escalier sur la droite

Représentation des entiers de la numération

Substitution de Fibonacci: $0 \to 01$, $1 \to 0$
Point fixe: itération infinie
0
01
010
01001
0100101001001010010 10...

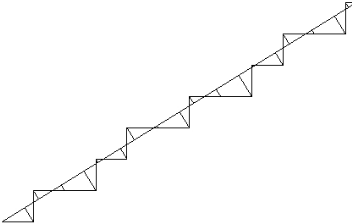
- On plonge la suite en un chemin du plan (escalier irrégulier)
- L'escalier approxime la droite $y = \frac{x}{\phi}$.
- Meilleure approximation de la droite: points entiers de la bande limitée par $y = \frac{x}{\phi} - 1$ et $y = \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi}$.
- Entiers de la numération: projection des points de l'escalier sur la droite



Représentation des entiers de la numération

Substitution de Fibonacci: $0 \to 01$, $1 \to 0$
Point fixe: itération infinie
0
01
010
01001
0100101001001010010 . . .

- On plonge la suite en un chemin du plan (escalier irrégulier)
- L'escalier approxime la droite $y = \frac{x}{\phi}$.
- Meilleure approximation de la droite: points entiers de la bande limitée par $y = \frac{x}{\phi} - 1$ et $y = \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi}$.
- Entiers de la numération: projection des points de l'escalier sur la droite



Approximation de droite et numération ?

- La projection des points à coordonnées entières dans la bande autour de la droite $y = x/\phi$ est l'ensemble des développements finis en β.
- Calcul de la projection:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to (x + y/\phi)A \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\phi \end{pmatrix} + (-x/\phi + y)A \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\phi \end{pmatrix};$$
$A = 1 + 1/\phi^2$.
- La projection de tous les points à coordonnées entières $\mathbb{Z}^2$ est $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/\phi$.

Coordonnées entières $\mathbb{Z}^2$ est équivalent en numération à $\mathbb{Z}[1/\phi]$

Parties fractionnaires ?

- On fixe une partie fractionnaire dans $\mathbb{Z}[1/\phi]$ (par exemple $1/\phi + 1/\phi^3 \in \mathbb{Z}[1/\phi]$.)
- Les réels qui ont cette partie fractionnaire correspondent à des points entiers.
- On obtient un escalier dans le plan.
- L'escalier est au dessus d'un intervalle de la droite contractante.

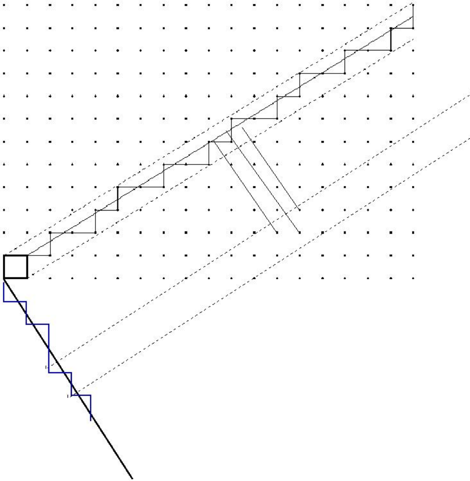
Intervalle associé à chaque partie fractionnaire finie

Propriétés des intervalles

- Deux longueurs d'intervalles possibles
- Intervalles disjoints
- Base des intervalles: point entier associé à la partie fractionnaire
- Ordre des intervalles:
  - approximation discrète de la droite contractante $y = -\phi x$.
  - Renormalisation: $LC \to C\ L \to L$.

Conclusion partielle: numération versus géométrie discrète

- Parties entières: projection de l'escalier de fibonacci sur $y = x/\phi$ (droite dilatante)
- Intervalles entre les parties entières: projection de la base canonique
- Parties fractionnaires: escalier décalé dans le plan, se projette sur un intervalle de $y = -\phi x$
- Intervalles entre les parties fractionnaires: union de projection de la base canonique sur la droite contractante
- Ordre des intervalles de parties fractionnaires:
  - approximation de la droite contractante,
  - engendré par une substitution duale



Généralisation: β-numération

- β-transformation $\quad T_\beta : \; x \mapsto \beta x \pmod 1$
- β-développement $\quad d_\beta : \; x \in [0,1[\mapsto (u_i)_{i\geq 1} \in \{0 \ldots [\beta]\}^{\mathbb{N}}$
  $$x = \sum_{i\geq 1} u_i \beta^{-i}, \quad u_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$$
- développement infini de 1 (éventuellement impropre) $d^*_\beta(1) = (t_i)_{i\geq 1}$
  $$1 = \sum_{i\geq 1} t_i \beta^{-i}$$
- Restriction sur la base: $\beta > 1$ nombre de Pisot de degré d (tous ses conjugués algébriques sont de module < 1)
  - la β-expansion de tout $x \in \mathbb{Q}(\beta) \in [0,1[$ est ultimement périodique
  - la β-expansion de 1 est finie ou ultimement périodique.
- Condition d'admissibilité pour être un développement: $(u_i)_{i\geq 1}$ est le β-développement de $x \in [0;1[$ ssi $\forall k \geq 1,\; (u_i)_{i\geq k} <_{\text{lex}} d^*_\beta(1)$.

Combinatoire associée aux parties entières

- L'autosimilarité du nombre β est décrite dans la relation $1 = \sum_{i\geq 1} t_i\beta^{-i}$ puisque les t_i sont ultimement périodiques (préperiode p, période n).

  les nombres de Pisot sont autosimilaires $(T_\beta^{p+n}(\beta) = T_\beta^{p}(\beta))$

- Entiers pour la numération: décomposent la droite réelle en $p+n$ intervalles de longueur $T_\beta^i(\beta)$.
- Substitution associée

$$\sigma_\beta : \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & \mapsto 1^{t_{n-1}}n \\ n & \mapsto 1^{t_n}. \end{array} \right. \qquad \sigma_\beta : \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mapsto 1^{t_1}2 \\ 2 & \mapsto 1^{t_2}3 \\ \vdots & \vdots \\ n+p-1 & \mapsto 1^{t_{n+p-1}}(n+p) \\ n+p & \mapsto 1^{t_{n+p}}(n+1). \end{array} \right.$$

- Ordre des intervalles: point fixe de la substitution

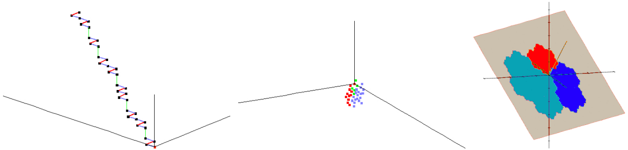
Les parties entières de la numération sont bien décrites par la combinatoire de la substitution

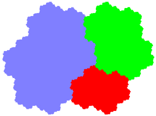
Représentation par escalier?

- Escalier associé au point fixe (β nombre de Pisot unitaire)
- β-entiers: projection sur la direction dilatante
- Projection sur l'espace propre associé aux conjugués de β: compact

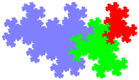
Fractals de Rauzy ou Tuile de Thurston

- Coupe et projection: l'escalier est exactement l'ensemble des points entiers "au-dessus" du fractal.

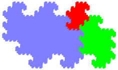




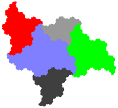
$\beta^3 = \beta^2+\beta+1$



$\beta^3 = \beta^2+2\beta+1$



$\beta^3 = 2\beta^2+2\beta+1$



$\beta^3 = \beta+1$

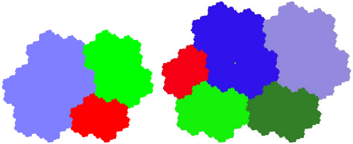
$\beta^2 = \beta+1$

Fractals géométriques?

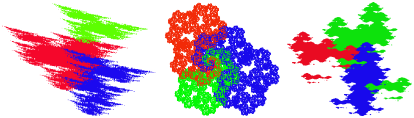
- Couleurs: associée au type d'arête lue avant projection
- Projection du point fixe de la substitution: autosimilarité géométrique

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_1 + \overline{\alpha}\mathcal{R}_2 + \overline{\alpha}\mathcal{R}_3 \\ \mathcal{R}_2 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_1 + 1 \\ \mathcal{R}_3 = \overline{\alpha}\mathcal{R}_2 + 1 \end{cases}$$

Plongé dans $\mathbb{C}$



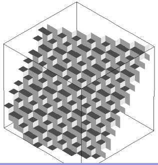
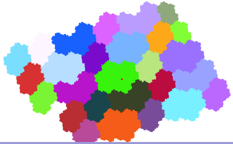
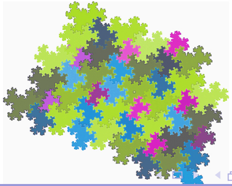
- condition suffisante pour pièces disjointes et autosimilarité: fortes coincidences (les escaliers de tous les points fixes partagent une arête commune). Pas de contre-exemple.
- Propriétés géométriques: Conditions de connexité, de simple connexité, 0 point intérieur...



Représentation des parties fractionnaires

- Les points de $\mathbb{Z}^{p+n}$ se projettent sur $\mathbb{Z}[1/\beta]$.
- Les points à coordonnées entières associés à une partie fractionnaire fixée dans $\mathbb{Z}[1/\beta]$ représentent un escalier de l'espace.
- L'escalier se projette sur un compact de l'espace contractant
- Nombre fini de tuiles $(n+p)$.
  - Forme des tuiles: union de tuiles de bases du fractal.
- Emplacement des tuiles: déduit d'une approximation discrète du plan discret.

Recouvrement d'un plan à partir des tuiles associées aux parties fractionnaires, et ordonnées selon une approximation discrète

Conditions de pavages?

On ne sait pas si les tuiles sont disjointes à priori !

- CNS: super-coincidences
  - géométrie discrète: un escalier du point fixe partant de chaque point du plan discret ont une arete commune.
  - graphes: l'algorithmes des paires balancées termine.
  - topologie: les approximations de la frontière convergent vers la frontière...
- Condition suffisante: (F)-property
  - numération: $\mathbb{Z}[1/\beta]$ n'a que des développements finis
  - géométrie discrète: les itérations des $E_1(\sigma)^\star$ à partir du cube unité recouvrent le plan
  - vrai si les coefficients du polynome de β sont décroissants vers 1
- CNS: le système dynamique substitutif est à spectre discret (différentes conditions associées).
- ...

Beta-numération versus géométrie-discrète

- Parties entières: projection de l'escalier du point fixe sur une droite
- Intervalles séparant les parties entières: projection de la base canonique sur la droite
- Parties fractionnaires: escalier décalé dans le plan, se projette sur un tuile fractale
- Forme des tuiles: union de certaines tuiles de base
- Emplacement des tuiles de parties fractionnaires:
  - approximation d'un plan contractant,
  - engendré par une substitution duale
  - engendre un recouvrement du plan, eventuellement un pavage
- Restrictions: Condition supplémentaires pour l'autosimilarité et le pavage.

Maths versus Stic ?

- Rajouter une dynamique/transformation pour fabriquer des développements
  - théorie ergodique: mesures invariantes (fréquences des motifs)
  - Etude de la dynamique: obtentions de règles locales à partir d'une $\mathbb{Z}^2$-action pour engendrer des plans discrets.
- Relations géométrie discrète et numération: conditions de pavages fournies par un des domaines vers l'autre.
  - Si les itérations duales d'une substitution convergent vers l'ensemble du plan, 0 est point intérieur du fractal (preuve numération).
- Caractériser les développements périodiques
  - la p-expansion de x est purement periodique ssi $x = \frac{n}{m}$, pgcd(m,n)=1.
  - Si β unitaire, il existe ϵ tel que les β-expansions de $\mathbb{Q} \cap [0, \epsilon[$ sont toutes purement périodique.
  - Faux si β non unitaire. L'existence de ϵ dépend de la structure du fractal associé.

Des questions...

- Quelles sont les substitutions qui ne vérifient pas la condition de coincidences ? De super coincidences ?
- Est ce que l'escalier du point fixe d'une substitution est une bonne approximation de la droite ?
- Trouver des classes d'exemples avec certaines propriétés: connexité, simple connexité ...
- Approximation de plans discrets: itérer différentes substitutions multidimensionnelles? Fractions continues et approximations diophantiennes associées?

Références: Beaucoup de monde. Rauzy. Thurston. Akiyama. Arnoux. Barge. Berthé. Ferenczi. Host. Ito. Kwlapitz. Rao. Solomyak. S. Thuswaldner. Wang... Tout ceux que j'ai oublié...