CONSTRUIRE (ASSEZ SIMPLEMENT) DES FRACTALS A LA CARTE

D’un certain point de vue, et très grossièrement, un fractal n’est rien d’autre qu’un dessin que l’on peut découper en pièces bien choisies, de telle sorte que chaque pièce peut-être reconstituée en contractant, en faisant tourner et en déplaçant les pièces initiales. Fondamentalement, un fractal est donc un objet géométrique.
Cependant, la notion de « répétition de soi-même en son sein » n’est pas du domaine de la géométrie, mais de la combinatoire. Plus précisément, on peut extraire d’une structure fractale sa substance symbolique, en n’en conservant que l’information relative à sa décomposition en pièces, ainsi que les types de morceaux qui se retrouvent à l’intérieur de chaque pièces. On obtient ainsi la règle de remplacement sous-jacente à tout fractal.

Un jeu consiste à se poser la question inverse : est-il toujours possible de construire un fractal qui respecte des règles de remplacement que l’on a préalablement fixées ?
Par exemple, recherchons un fractal qui se décompose en trois morceaux G (pour Grand), M (pour Moyen) et P (pour Petit), pour lequel il existe une seule opération de « contraction & rotation » notée O, et qui vérifie :

- le grand morceau G est constitué exactement d’une copie de la grande pièce préalablement « contractée & retournée », d’une copie de la pièce de taille moyenne « contractée & retournée », et d’une copie de la petite pièce « contractée & retournée »;
- la pièce moyenne M est une simple copie « contractée & retournée » de la grande ;
- la petite pièce P est elle aussi une copie « contractée & retournée » de la moyenne.

Nous allons décrire une méthode systématique pour cela ; chacun pourra s’amuser à dessiner de la même manière le fractal qui respecte les règles de son choix.

Tout d’abord, déterminons dans quelles pièces se retrouve chaque morceau : on déduit des constructions précédentes que

- O(G) (la grande pièce « contractée & retournée ») doit se retrouver dans G et M ; on transcrit cette condition dans la règle $G \rightarrow GM$;
- O(M) (la pièce de taille moyenne « contractée & retournée ») se retrouve dans les pièces G et P ; ceci s’écrit $M \rightarrow GP$;
- O(P) ne se retrouve que dans la grande pièce ; ceci s’écrit $P \rightarrow G$.

On appelle finalement « substitution » la règle combinatoire qui transcrit cette décomposition :

$$G \rightarrow GM \;;\; M \rightarrow GP \;;\; P \rightarrow G.$$

Pour construire le fractal, on applique cette règle de substitution un grand nombre de fois. On part de G, qui est transformé en GM. Le G est remplacé par GM, tandis que M est remplacé par GP. Finalement, GM se transforme en GMGP. On applique à nouveau la règle de substitution, qui donne GMGPGMG. On continue ainsi indéfiniment.

G $\rightarrow$ G M
$\rightarrow$ G M G P
$\rightarrow$ G M G P G M G
$\rightarrow$ GM GP GM G GM GP GP
$\rightarrow$ GMGPGMGGMGPGMGMGPGMGGMG
$\rightarrow$ GMGPGMGGPGMGMGMGPGMGGMGPGMGPGMGGMGPGMGMGPGM…

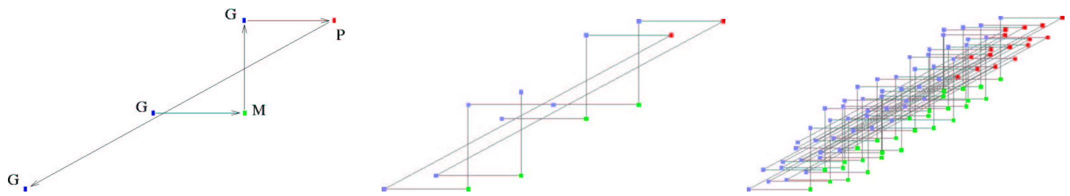
On s'aperçoit que les mots obtenus (GM, GMGP, GMGPGMG, …) commencent successivement les uns par les autres. On appelle « point fixe » le mot obtenu en superposant toutes les itérations possibles : en particulier, il est de taille aussi grande que l'on veut !

GMGPGMGGPGMGMGMGPGMGGMGPGMGPGMGGMGPGMGMGPGM…

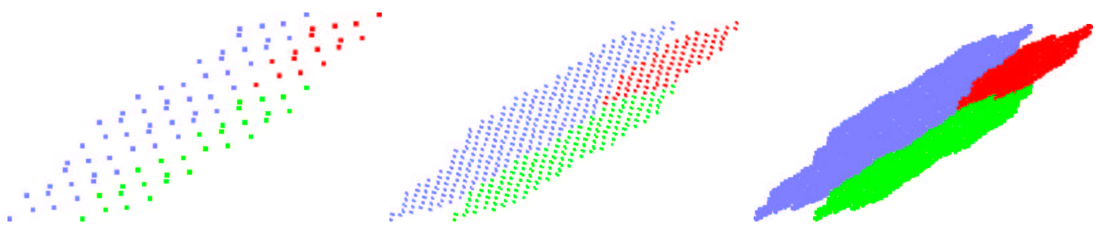
Ce point fixe va nous permettre de construire directement un fractal. En effet, on va partir d'un point, et pour chaque lettre lue, avancer d'un vecteur fixé du plan :
- pour la lettre G, un met un point bleu et on avance vers la droite (le vecteur associé est (1,0)) ;
- pour la lettre M, on met un point vert et on avance vers le haut (le vecteur associé est (0,1)) ;
- pour la lettre P, on met un point rouge et on effectue un déplacement par le vecteur (-3.38298, -1.83929) (ce vecteur n'est pas choisi au hasard, voir la note [1]).

On donne dans la figure de gauche le résultat de cette règle après avoir lu les cinq premières lettres (GMGPG)
- le point fixe commence par un G, on place donc un point bleu et on avance vers la droite ;
- on lit ensuite un M : on place un point vert et on monte ;
- on lit ensuite un G : on place un point bleu et on va à droite ;
- on arrive sur un P : on place un point rouge et on descend en bas à gauche ;
- la lettre finale est un G : on met un point bleu.

Sur les figures de droites, on trouve le dessin correspondant aux 14 premières lettres (GMGPGMGGMGPGM), et aux 100 premières lettres.



Si on enlève les traits relatifs aux déplacements, on voit apparaître une figure qui semble se remplir de plus en plus, les trois parties bleue, verte et rouge semblant rester disjointes. On montre ci-dessous les dessins obtenus après 100, 1000 et 10000 itérations.



[1] Pour obtenir ce vecteur, on se ramène à la décomposition du fractal : les règles de décomposition (G est constitué d'une copie rétrécie de la grande, de la moyenne et de la petite pièce, etc…) fournissent directement un système d'équation sur les trois variables g, m, p et le taux de contraction A :
$g = Ag + Am + Ap$; $m = Ag$; $p = A m$.
On prouve que ce système admet une solution réelle si et seulement si $A = 0.543689$ (A doit vérifier $A^3+A^2+A=1$). Une solution du système est donnée par $(g,m,p) = (1, A , A^2)$. Le vecteur associé à la lettre P est alors donné par la projection de $(0 , 0, 1)$ dans le plan horizontal parallèlement à $(1,A, A^2)$, c'est-à-dire $(-1/ A^2 , -1/A, 0) = (-3.38298, -1.83929, 0)$.

La figure obtenue en plaçant le plus grand nombre possible de points (par exemple une centaine de milliers) est appelée « fractal de Rauzy ». Il s'agit effectivement d'un fractal : comme le montre les dessins ci-dessous, cette figure admet exactement la décomposition souhaitée :

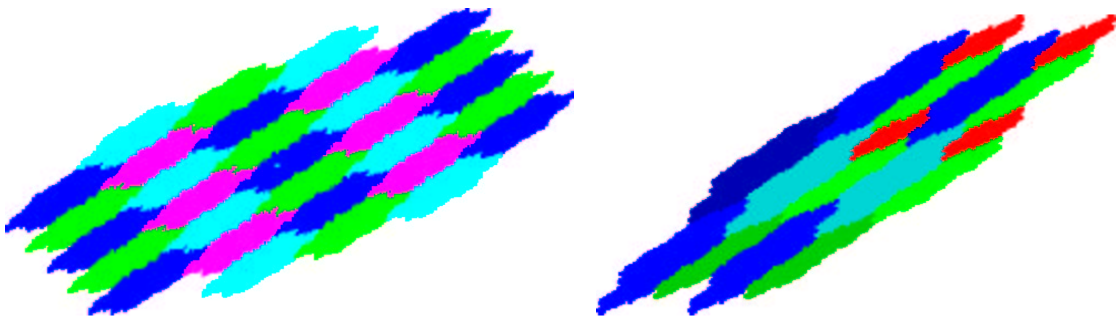
- La pièce verte de taille moyenne (dans l'image de gauche) est une copie de la grande pièce bleue qui a été rétrécie et tournée légèrement vers la gauche (pièce bleue clair dans l'image de droite).
- La petite pièce rouge (image de gauche) est une copie de la pièce moyenne verte « contractée et retournée », comme illustré en vert clair dans l'image de droite.
- Enfin, la grande pièce bleue (image de gauche) se décompose dans l'image de droite en trois morceaux, chacun étant une copie contractée et retournée des pièces de l'image de gauche.

On a ainsi construit le fractal qui respecte les règles décidées au départ.

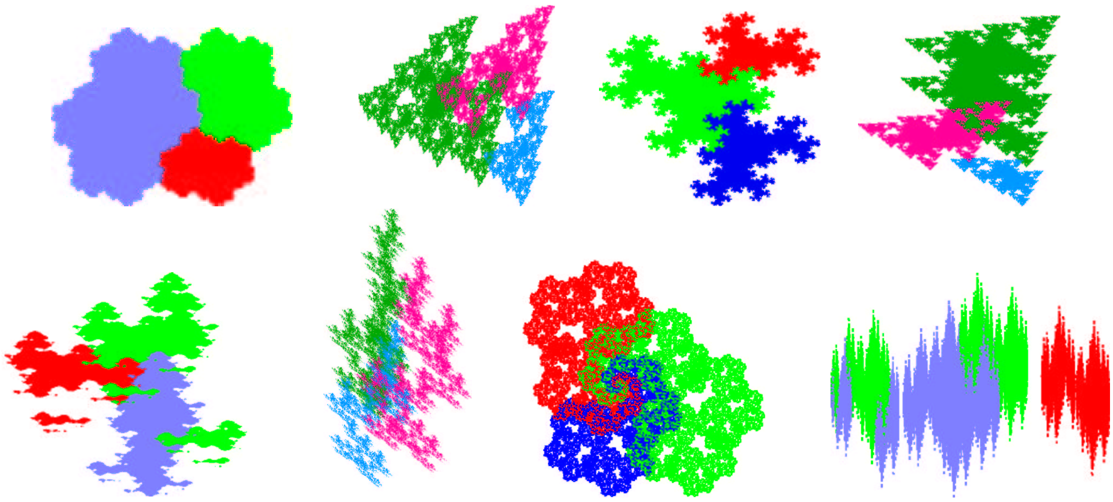
En plus d'être fractal, le fractal de Rauzy a des propriétés remarquables : on peut montrer qu'il ne comporte aucun trous (mathématiquement, on dit qu'il est simplement connexe), et qu'il est fait d'un seul bloc (on dit qu'il est connexe). Cela semble évident sur la figure, mais les fractals sont des structures trompeuses qui apprennent à être méfiants, si bien que toute propriété apparente nécessite une démonstration.

Surtout, ce fractal engendre deux types de pavages, présentés ci-dessous. A droite, les fractals de Rauzy sont positionnés de manière très régulière, en une sorte de damier. Il est remarquable, voire magique, que les contours du fractals s'encastrent exactement les uns dans les autres, en ne laissant aucun trou. Un tel dessin est appelé « pavage périodique ».

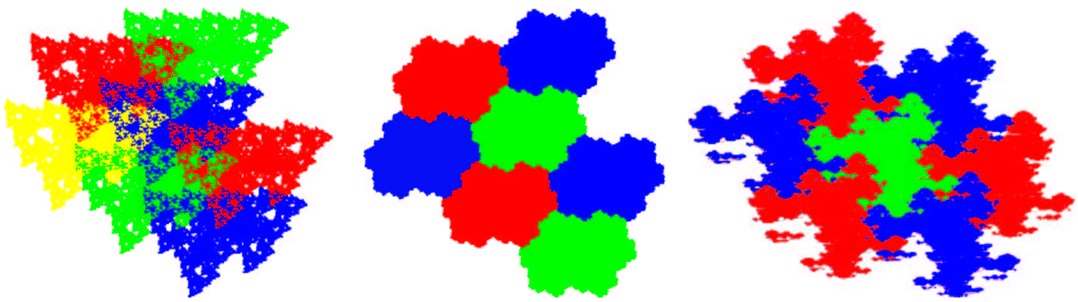
A gauche, on constate qu'il est possible de positionner les trois pièces constituant le fractal de Rauzy de sorte qu'elles s'encastrent exactement les unes dans les autres, en ne laissant aucun trou. Cependant, l'emplacement des pièces n'est absolument pas régulier, même s'il a une signification cachée… On appelle cela un « pavage non périodique ».



La construction du fractal de Rauzy présente l'intérêt d'être généralisable à une grande classe de règles de départ. Ainsi, il suffit que le système d'équation de la note 1 admette une solution pour un unique paramètre A<1, pour que tout le processus de construction soit valable et permette d'obtenir un nouveau fractal. On constate à l'œil nu que certains contiennent des trous, tandis que d'autres sont constitués de plusieurs blocs. Par contre, il a été démontré que l'aire de chaque fractal est non nulle, tandis que l'aire de l'intersection des pièces de différente couleur est nulle : en particulier, dans tous les fractals, les pièces ne se superposent presque pas.



On arrive aussi à montrer, mais beaucoup plus difficilement, que tous les fractals ainsi construits vérifient la propriété de pavage (périodique et non périodique). On montre ci-dessous quelques pavages périodiques : en particulier, même si le fractal a des trous ou est composé de plusieurs parties, on peut le positionner régulièrement de sorte que les trous se remplissent exactement, sans déborder.



Pour finir, il faut noter que ces structures sont non seulement agréables à regarder et étudier, mais ont aussi des applications plus concrètes : elles permettent d'approximer des plans avec des faces de cubes, ce qui permet de pixéliser des figures sur des ordinateurs par exemple ; de manière plus anecdotique, elles traduisent la structure de composants physiques appelés quasi-cristaux, qui sont utilisés dans des poêles à frire pour leurs propriétés de conductivité. Enfin, sur un point de vue théorique, les fractals de Rauzy permettent de généraliser les développements binaires ou décimaux à des bases réelles, et en particulier de trouver les nombres dont le développement est périodique dans ces nouvelles bases.