Chapitre 7

Représentation globale des substitutions non unitaires

Dans ce chapitre, en guise de conclusion, nous essayons de généraliser aux substitutions non unimodulaires les résultats obtenus aux chapitres 3, 4 et 5 pour les substitutions unimodulaires, en particulier leur représentation par un échange de morceaux sur un ensemble auto-similaire, les conditions suffisante ou nécessaire et suffisante pour l'injectivité de ces représentations, et l'application à la construction de partitions de Markov. Nous exposons en particulier quels sont les nouveaux résultats à prouver pour obtenir une telle généralisation.

Notons que les résultats de ce chapitre sont indépendants des résultats du chapitre 6, en particulier de la caractérisation des facteurs p-adiques des systèmes substitutifs. Par contre, certaines définitions du chapitre 6 seront reprises dans ce chapitre.

On considère une substitution σ primitive de type Pisot, qui n'est pas obligatoirement unimodulaire. Les valeurs propres de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ sont toujours notée α_1 (valeur propre dominante), ..., α_r pour les réelles et $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$, $\alpha_{r+s+1} = \overline{\alpha_{r+1}}$, ..., $\alpha_{r+2s} = \overline{\alpha_{r+s}}$ pour les complexes.

7.1 Représentation globale

7.1.1 Définition

On regroupe dans une même application la représentation géométrique φ (lemme 3.1.1, formule 4.3), et les représentations p-adiques F_p (définition 6.3.2). On obtient ainsi une application qui rassemble toutes les valeurs que peut prendre la représentation formelle F_α de la substitution (définition 4.1.1) pour les différentes topologies existant sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Définition 7.1.1 *Soit σ une substitution de type Pisot et α une valeur propre de sa matrice d'incidence. Soit Ω le système substitutif associé à σ. Soient p_1, ..., p_k les diviseurs premiers de* $\det \mathbf{M}_\sigma$. *Soit φ la représentation géométrique de Ω. Pour tout p premier, soit F_p sa représentation p-adique.*

On appelle représentation globale *du système dynamique Ω la fonction F_{glob} définie sur Ω par*

$$F_{glob} = (\varphi, F_{p_1}, \ldots F_{p_k}).$$

On décompose comme suit α dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ en idéaux premiers ordonnés par ordre croissant suivant l'unique nombre premier qu'ils contiennent :

$$\alpha\ \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{j=1}^{m} {\mathcal{I}_j}^{n_j}.$$

Comme au chapitre 6, on note $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour la topologie $\mathcal{I}_j$-adique et $\widetilde{\mathbb{K}_p}$ le produit des $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ pour $p \in \mathcal{I}_j$.

La représentation globale F_{glob} est alors à valeur dans l'ensemble suivant :

$$F_{glob}(\Omega) \subset \mathcal{E} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \widetilde{\mathbb{K}_{p_1}} \times \ldots \widetilde{\mathbb{K}_{p_k}} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_n}}.$$

On note $\mathcal{F}_{glob} = F_{glob}(\Omega)$ l'image de F_{glob}. Pour $i \leq d$, on appelle $\mathcal{F}^i_{glob} = F_{glob}([i])$ l'image du cylindre $[i]$ de Ω.

7.1.2 Dynamique du décalage sur la représentation globale

Selon les propositions 3.1.1 et 6.3.1 la dynamique sur $\mathcal{F}_{glob}$ du décalage S est la suivante :

Proposition 7.1.1 *Il existe $\delta_1, \ldots, \delta_d \in \mathcal{F}_{glob}$ tels que :*

$$\forall\, w \in \Omega, \quad F_{glob}(Sw) = F_{glob}(w) + \delta_{w_0}. \tag{7.1}$$

Ainsi, F_{glob} réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur Ω et le pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}_{glob}$ défini sur $\mathcal{F}_{glob} = \cup_{i \leq d} \mathcal{F}^i_{glob}$ par

$$x \in \mathcal{F}^i_{glob} \implies \mathcal{T}_{glob}(x) = x + \delta_i. \tag{7.2}$$

Le pseudo-échange $\mathcal{T}_{glob}$ n'est pas une application puisque non défini sur les intersections des $\mathcal{F}^i_{glob}$. On a montré au chapitre 3 que, si la substitution est unimodulaire, la condition de coïncidences est une condition suffisante pour que les intersections soient de mesure nulle. Le pseudo-échange $\mathcal{T}_{glob}$ est alors un véritable échange de morceaux, semi-conjugué au décalage S sur Ω, la représentation F_{glob} étant de plus un isomorphisme mesurable.

Le but de la section 7.2 est de voir en quel sens on peut espérer généraliser ces résultats au cadre des substitutions non unimodulaires.

Par ailleurs, selon le théorème 3.2.1 et la proposition 6.3.2, il existe une projection continue de $\mathcal{E}$ dans le groupe compact $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$, où les p_i, pour $i \leq l$, sont les diviseurs premiers communs à tous les coefficients non dominant du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$. Via cette projection, la représentation globale se factorise en le facteur de translation continu défini à la proposition 6.2.2.

Exemple. On reprend la substitution σ_2 définie par $\sigma_2(1) = 1112$ et $\sigma_2(2) = 12$. La représentation globale notée F_2, est à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. Le décalage S sur Ω_2 devient la translation par morceaux :

$$F_2(Sw) = \begin{cases} F_2(w) + (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) & \text{si } w_0 = 1 \\ F_2(w) + (1, 1) & \text{si } w_0 = 2. \end{cases}$$

Soit Π la surjection de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$ définie par : $\Pi((a, b + c\sqrt{2})) = (a\sqrt{2} \bmod 1, b)$. Alors $\Pi\,(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 1) = \Pi\,(1, 1)$.

De ce fait, $\Pi \circ F_2$ est une application de Ω à valeur dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$, nulle en 0, qui vérifie l'équation fonctionnelle : $f(Sx) = f(x) + (\alpha_2, 1)$.

La minimalité des deux systèmes (Ω, S) et $(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \tau_{(\alpha_2,1)})$ permet de déduire que $\Pi \circ F_2 = (\psi_2, \phi_2)$ est l'application qui factorise Ω en une translation de vecteur $(\alpha_2, 1)$ sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$.

On remarque que de ce fait ϕ_2 est la fonction définie à la proposition 6.1.1 et ψ_2 est la fonction obtenue par G. Rauzy dans [77]. ■

Le but de la section 7.3 est de généraliser les résultats des chapitres 4 et 5 pour obtenir un critère d'injectivité de cette dernière représentation par une translation sur un groupe compact.

7.2 Injectivité en mesure de la représentation globale

On cherche à généraliser les résultats du chapitre 3 ou de [7] et à voir ainsi si la condition de coïncidences est encore une condition suffisante pour l'injectivité de la représentation globale, pour les substitutions de type Pisot non unimodulaires.

Les résultats du chapitre 4 sont principalement basés sur le fait que la mesure induite sur $\mathcal{F}_{glob}$ par celle de Ω est la mesure de Lebesgue. Nous allons voir en quel sens ceci est encore vrai pour la représentation globale.

7.2.1 Mesure induite sur $\mathcal{F}_{glob}$ par celle de Ω.

Pour identifier cette mesure induite, on utilise la structure auto-similaire de l'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$. En effet, par primitivité, on sait que les cylindres de Ω se partitionnent sous la forme $[i] = \cup_{j \leq d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} S^{|p|}\sigma[j]$. Si on applique F_{glob} à cette décomposition, on obtient selon la formule (7.1) :

$$\mathcal{F}_{glob} = \bigcup_{i \leq d} \mathcal{F}^i_{glob} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}^i_{glob} = \bigcup_{j \leq d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} \left(F_{glob}(\sigma[j]) + \sum_{k<|p|} \delta_{\sigma(j)_k} \right). \tag{7.3}$$

Pour exploiter cette relation, on doit déterminer comment σ agit sur la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$. Une conséquence de la propriété 2.4.1 est que σ est semi-conjugué à une application diagonale de $\mathcal{F}_{glob}$: en effet, définissons h_{glob} sur $\mathcal{F}_{glob}$ par

$$h_{glob}(x_2, \ldots, x_{r+s}, y_1, \ldots, y_l) = (\alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_{r+s} x_{r+s}, \alpha\, y_1, \ldots, \alpha\, y_l),$$

alors la définition de F_{glob} implique

$$\forall\, w \in \Omega, \quad F_{glob}(\sigma w) = h_{glob}\, F_{glob}(w).$$

La manière dont h_{glob} contracte les parties de $\mathcal{F}_{glob}$ est explicitée ci-dessous.

Proposition 7.2.1 *L'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ est muni de la mesure $\mu_{\mathcal{E}}$ produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ et des mesures de Haar sur les $\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}$. Alors, pour tout borélien B de $\mathcal{F}_{glob}$:*

$$\mu_{\mathcal{E}}(h_{glob}(B)) = 1/\alpha\, \mu_{\mathcal{E}}(B). \tag{7.4}$$

Preuve. La formule est vraie si elle est vérifiée pour tous les pavés de $\mathcal{F}_{glob}$. Rappelons que $\mathcal{F}_{glob}$ est le produit d'un espace vectoriel euclidien de dimension $d-1$, et de complétés de corps p-adiques notés $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$, où les $\mathcal{I}_j$, pour $j = 1 \ldots n$, sont les ideaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ qui contiennent

α. Pour tout $j \leq n$, on note π_j un générateur de l'unique idéal premier $\widetilde{\mathcal{I}_j}$ de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}$. Tout pavé de $\mathcal{F}_{glob}$ est alors de la forme :

$$B = \prod_{i=2}^{r+s} [a_i, b_i] \times \prod_{j=1}^{n} \left(c_j + {\pi_j}^{n_j} \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right).$$

l'image de ce pavé par h est le pavé : $h_{glob}(B) = \prod_{i=2}^{r+s} [\alpha_i a_i, \alpha_i b_i] \times \prod_{j=1}^{n} \left(\alpha \, c_j + \alpha \, \pi_j{}^{n_j} \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right)$.

Soit $\mu_{\mathcal{F}}$ la mesure sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}} \left(\prod_{i=2}^{r+s} [\alpha_i a_i, \alpha_i b_i] \right) &= \left(\prod_1^r \alpha_i \, \prod_{r+1}^{r+s} \alpha_i \bar{\alpha_i} \right) \mu_{\mathcal{F}} \left(\prod_{i=2}^{r+s} [a_i, b_i] \right) \\ &= \frac{\det \mathbf{M}_\sigma}{\alpha} \, \mu_{\mathcal{F}} \left(\prod_{i=2}^{r+s} [a_i, b_i] \right). \end{aligned}$$

De plus, selon la propriété 1.4.1, on a pour tout $j \leq n$

$$\mu_{\mathcal{I}_j} \left(\alpha \, c_j + \alpha \, \pi_j{}^{n_j} \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right) = \left(\operatorname{card} \left(\frac{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}}{\alpha \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}} \right) \right)^{-1} \mu_{\mathcal{I}_j} \left(c_j + \pi_j{}^{n_j} \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right).$$

Or, dans le corps de nombre $\mathbb{K}$, si j est fixé, $\alpha \, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ se décompose sous la forme $\alpha \, \mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathcal{I}_j{}^{n_j} \, \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un idéal premier avec $\mathcal{I}_j$. Cette expression passe au complété $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ sous la forme $\alpha \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} = \widetilde{\mathcal{I}_j}^{n_j} \, \widetilde{\mathcal{J}}$, où $\widetilde{\mathcal{J}}$ est l'adhérence de $\mathcal{J}$ dans $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}_j}}$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}$ lui-même puisque $\mathcal{J}$ est premier avec l'idéal qui définit la topologie de $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$. Puisque la complétion ne modifie pas les corps résiduels, ceci implique $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} / \alpha \, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} / \widetilde{\mathcal{I}_j}^{n_j} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}} / \mathcal{I}_j{}^{n_j}$. Le théorème des restes chinois implique alors :

$$\prod_{j=1}^{n} \operatorname{card} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\mathcal{I}_j{}^{n_j}} \right) = \operatorname{card} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\prod_{j=1}^{l} \mathcal{I}_j{}^{n_j}} \right) = \operatorname{card} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\alpha \, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \right).$$

Enfin, le cardinal du quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} / \alpha \, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, est la norme de α dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, c'est-à-dire le produit des conjugués de α. Puisque le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ est irréductible, on obtient

$$\operatorname{card} \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\alpha \, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \right) = \det \mathbf{M}_\sigma.$$

Ce qui permet de conclure :

$$\mu_{\mathcal{E}}(h(B)) = \frac{\det \mathbf{M}_\sigma}{\alpha} \, (\det \mathbf{M}_\sigma)^{-1} \, \mu_{\mathcal{E}}(B) = 1/\alpha \, \mu_{\mathcal{E}}(B).$$

■

Ainsi, la substitution σ agit sur l'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ comme elle agirait sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ si elle était unimodulaire, situation que nous avons déjà étudié en détails. En particulier, on peut reprendre la preuve de la proposition 3.3.1 pour déterminer la mesure induite sur chaque $\mathcal{F}^i_{glob}$ par celle de Ω :

Proposition 7.2.2 *Si σ est une substitution de type Pisot, la mesure image par la représentation globale F_{glob} de la mesure μ_Ω sur les cylindres de Ω est proportionnelle à la mesure produit $\mu_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{F}_{glob}$: la constante $C_{glob} = \mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est telle que pour tout borélien B contenu dans un cylindre $[i]$ de Ω, on a :*

$$\mu_{\mathcal{E}}(F_{glob}(B)) = C_{glob} \, \mu_\Omega(B).$$

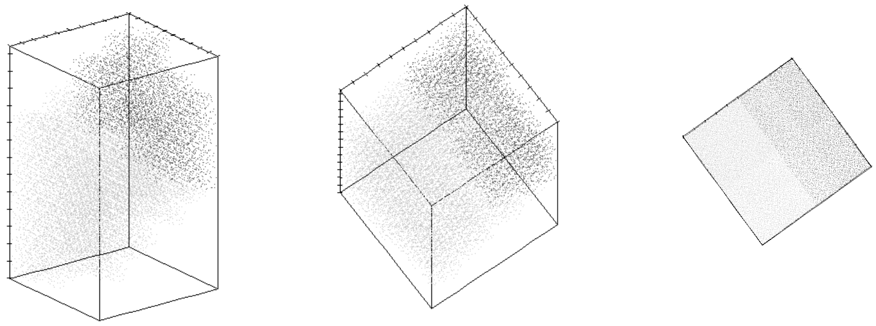

FIG. 7.1 – Image de la représentation globale de σ_2

Preuve On applique la mesure $\mu_{\mathcal{E}}$ aux relations exprimées à la formule (7.3), et on utilise le théorème de Perron-Frobenius pour montrer que les vecteurs ayant pour coordonnées les mesures des cylindres dans Ω et de leurs images par F_{glob} sont tous deux vecteurs propres dominants de la matrice de σ. ∎

Cette proposition n'est pas une exacte généralisation de la proposition 3.3.1 : en effet, dans la proposition 3.3.1, nous avons utilisé le fait que le tore $\mathbb{T}^{d-1}$ est facteur du système substitutif pour en déduire que la mesure de $\varphi(\Omega)$ est non nulle et que la constante de proportionnalité C est elle aussi non nulle.

7.2.2 Conjecture : la mesure de la représentation non nulle.

Nous ne sommes pour l'instant pas parvenus à prouver que la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ est non nulle dans $\mathcal{E}$. Nous pouvons seulement le conjecturer.

Conjecture 7.2.1 *Si tout diviseur premier du déterminant de la matrice d'incidence de la substitution divise tous les coefficients non dominant de son polynôme caractéristique, la mesure $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Pour appuyer cette conjecture, nous avons projeté dans $\mathbb{R}^3$ l'image de la représentation globale de la substitution σ_2. L'ensemble $\mathbb{Z}_2$ est encore représenté par $[0,1[$, comme nous l'avons expliqué à la section 1.4.

On donne plusieurs perspectives de cette projection à la figure 7.1 : en abscisse on trouvera la composante de la représentation globale selon le vecteur $\hat{\beta}_1$ de $\widetilde{\mathbb{K}_2}$, en ordonnée la composante de F_{glob} selon le vecteur $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$. La côte contient la composante réelle de F_{glob}.

En particulier, la projection de cette figure sur le plan des abscisses et ordonnées donne bien la figure 6.1.

A la figure 7.2, on trouvera les coupes de $\mathcal{F}_{glob}$ selon les plans $x = 1/2$, $y = 1/2$ et $z = 1/2$. Ceci laisse bien penser que $\mathcal{F}_{glob}$ occupe un volume et est de mesure non nulle.

On notera que les dessins de la figure 7.1 donnent une information sur la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ mais en aucun cas sur leur topologie.

Dans le cas unimodulaire, on prouve que la mesure de l'image de la représentation est non nulle à partir du fait que l'image de la représentation se projette de manière surjective dans le tore. Dans le cas non unimodulaire que nous traitons ici, on voudrait utiliser les résultats sur la projection dans les $\mathbb{Z}_p$ pour obtenir une information sur la mesure de l'image de la représentation.

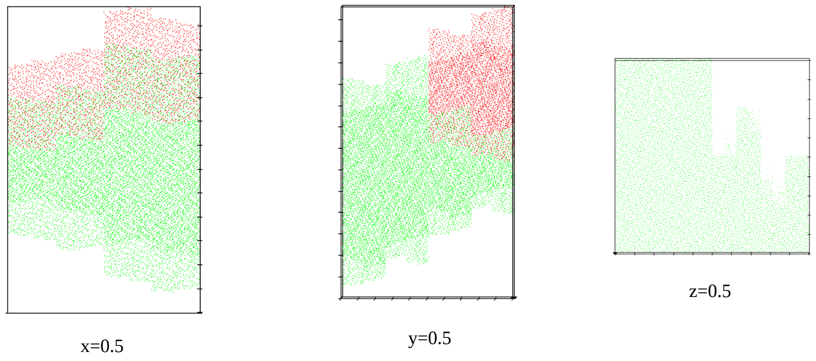

FIG. 7.2 – Coupes de l'image de la représentation globale de σ_2

Hélas, contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, la projection sur $\mathbb{Z}_p$ n'est pas une projection modulo un réseau mais une simple projection sur une coordonnée. Les techniques réelles ne sont donc plus valables ici. Un problème similaire se posera dans la section 7.3.

Par ailleurs, le recours dans le cas unimodulaire à la surjectivité sur la projection sur le tore semble artificiel pour obtenir la non nullité de la mesure de l'image de la représentation globale. En effet, dans le cas non Pisot, on a déjà expliqué en quel sens il est encore possible de construire une représentation réelle du système symbolique par un pseudo-échange de morceaux (chapitre 6, section 6.3.1). La raison pour laquelle ce pseudo-échange de morceaux n'est pas un échange de morceaux en mesure réside dans le fait que cette représentation ne vérifie pas une relation du type de la formule 7.4. Par contre, la mesure de l'image de la représentation dans son espace d'arrivée semble encore non nulle : en fait, le défaut de cette représentation est un manque de précision. Les vecteurs intervenant dans le pseudo-échange sont rationnellement liés, l'image de la représentation est plus dense que dans le cas Pisot, ce qui implique que la représentation est non injective. Par contre, la densité de l'image laisse penser qu'elle est de mesure non nulle.

Il serait intéressant de prouver par un argument général que la mesure de Lebesgue de l'image de la représentation φ dans le cas unimodulaire est non nulle, indépendamment de la condition Pisot. Ceci pourrait impliquer que c'est encore le cas si la substitution n'est pas unimodulaire.

Si les diviseurs du déterminant ne divisent pas les coefficients du polynôme caractéristique, il devient très difficile de représenter graphiquement l'image de la représentation globale, puisqu'on ne connaît pas de base de l'espace de représentation. On ne peut donc pas tester la conjecture dans cette situation. Ceci dit, la formule 7.4 est encore vérifiée dans ce cas là, ce qui laisse penser qu'on se trouve dans le bon espace de représentation, et que la mesure est encore non nulle.

7.2.3 Conjugaison avec un échange de morceaux

Dans cette section, nous montrons que si la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ est non nulle, alors la représentation F_{glob} est injective en mesure et plus généralement que F_{glob} vérifie des résultats semblables à ceux la représentation des systèmes unimodulaires prouvés au chapitre 3.

La proposition 7.2.2 s'interprète en terme d'injectivité sur les cylindres de Ω.

Proposition 7.2.3 *Si σ est une substitution de type Pisot telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle, la représentation globale F_{glob} est injective en mesure sur les cylindres $[i]$ de Ω. En effet, il existe un* *ensemble $N \subset \Omega$ de mesure nulle telle que :*

$$x, y \in [i] \backslash N \qquad F_{glob}(x) = F_{glob}(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Preuve Le théorème de Perron-Frobenius implique que la décomposition des images des cylindres sous la forme $\mathcal{F}^i_{glob} = \bigcup_{j \leq d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} F_{glob}(\sigma[j]) + \delta_i$ est une partition en mesure, ce qui, ajouté à l'injectivité en mesure du développement en préfixes-suffixes, permet de conclure. On se référera au chapitre 3 (section 3.3) pour les détails. ■

Ainsi, la condition de coïncidences assure encore que les intersections des images des cylindres sont de mesure nulle :

Proposition 7.2.4 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle. Alors pour tout couple de lettre (i, j),*

$$\mu_{\mathcal{E}}({\mathcal{F}_{glob}}^i \cap {\mathcal{F}_{glob}}^j) = \mu_{\Omega}(F^{-1}({\mathcal{F}_{glob}}^i \cap {\mathcal{F}_{glob}}^j)) = 0.$$

Preuve La condition de coïncidence sur les préfixes signifie que pour tout couple de lettres i, j, il existe une lettre k et un entier l tels que $F_{glob}(\sigma^l[i]) + \sum_{m<|p|} \delta_{\sigma^l(i)_m}$ et $F_{glob}(\sigma^l[j]) + \sum_{m<|q|} \delta_{\sigma^l(j)_m}$ apparaissent dans la partition de $F_{glob}\sigma^l[k]$ et sont donc disjoints en mesure. On a de plus $\sum_{m<|p|} \delta_{\sigma^l(i)_m} = \sum_{m<|q|} \delta_{\sigma^l(j)_m}$, ce qui implique que l'intersection de $F_{glob}(\sigma^l[i]) = h^l {\mathcal{F}_{glob}}^i$ et $F_{glob}(\sigma^l[j]) = h^l {\mathcal{F}_{glob}}^j$ est de mesure nulle. On se référera au chapitre 3 (section 3.3) pour les détails. ■

Corollaire 7.2.1 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Le compact $\mathcal{F}_{glob}$ est pavé par les ensembles $\mathcal{F}_{glob_i}$, qui sont autosimilaires au sens de [53].

Preuve L'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ est l'union disjointe en mesure des ${\mathcal{F}_{glob}}^i$, qui se décomposent eux-mêmes sous la forme

$${\mathcal{F}_{glob}}^i = \bigcup_{j \leq d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} (h {\mathcal{F}_{glob}}^j + \textstyle\sum_{k<|p|} \delta_{\sigma(j)_k}) \qquad \text{presque partout.}$$

■

Corollaire 7.2.2 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

La représentation F_{glob} est un isomorphisme mesurable entre (Ω, S) et $\mathcal{F}_{glob}$ muni d'une translation par morceaux définie presque partout par la formule (7.2).

On obtient ainsi :

Théorème 7.2.1 *Soit σ une substitution de type Pisot sur d lettres qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Soit $\mathbf{M}_\sigma$ la matrice d'incidence de σ et α la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$. Pour $p \in \mathbb{N}$ premier, on note $C_p = \sum_{i=1}^k e(\mathcal{J}_i) f(\mathcal{J}_i)$ les $\mathcal{J}_i$ étant les diviseurs premiers dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ de l'idéal $\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

Le système dynamique symbolique (Ω, S) associé à σ est isomorphe en mesure à un échange de morceaux sur une partie autosimilaire compacte de $\mathbb{R}^{d-1} \times {\mathbb{Q}_{p_1}}^{C_{p_1}} \times \cdots \times {\mathbb{Q}_{p_k}}^{C_{p_k}}$, où les p_i sont les diviseurs premiers de $\det \mathbf{M}_\sigma$.

7.3 Critère combinatoire d'injectivité

Nous venons de voir que la généralisation des techniques géométriques du chapitre 3 pour étudier l'injectivité en mesure de la représentation globale ne donne pas de résultats immédiats. Dans cette partie, nous allons montrer que par contre, on peut généraliser les techniques arithmétiques et combinatoires du chapitre 4 pour caractériser les représentations injectives en mesure.

7.3.1 Automate arithmétique

La définition de l'automate arithmétique pour les substitutions unimodulaires de type Pisot donnée au chapitre 4 se généralise comme suit pour les substitutions non unimodulaires. Cette définition a été donnée par G. Rauzy dans [77]. Le théorème 7.3.1 y a été énoncé et prouvé succinctement.

La notation σ désigne une substitution de type Pisot. La valeur propre dominante α_1 de $\mathbf{M}_\sigma$ est aussi notée α. Ses conjugués algébriques sont toujours notés $\alpha_2, \ldots, \alpha_d$.

Le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ peut alors être muni des topologies archimédiennes qui correspondent à chaque α_i ou des topologies ultramétriques qui correspondent aux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Une valeur absolue sera notée v ou $|\cdot|_v$. Si elle est associée à un idéal $\mathcal{I}$, elle est notée $v_{\mathcal{I}}$.

Une série formelle de $\mathbb{Q}[[\alpha]]$ est dite *nulle pour une valeur absolue sur* $\mathbb{Q}(\alpha)$ si et seulement si elle converge vers 0 dans le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour cette valeur absolue.

On reprend l'ensemble de chiffres défini au chapitre 4 : $\mathcal{C}$ est le sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}(\alpha)$ suivant :

$$\mathcal{C} = \left\{ < \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p) - \mathbf{l}(q) >,\ (p,a,s),(q,b,r) \in \mathcal{I}^2. \right\}.$$

Définition 7.3.1 *Soit $\mathcal{G}_a$ l'ensemble des nombres $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$ qui s'écrivent $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n$, où $(c_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}$ telle que $\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n$ est nul pour toutes les valeurs absolues de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui valent moins de 1 en α.*

On définit sur $\mathcal{G}_a$ un automate étiqueté par $\mathcal{C}$ en disant que $\gamma \in \mathcal{C}$ étiquette l'arête joignant ξ à ν si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_n$ et un entier N tels que :

$$\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n, \quad \nu = \frac{1}{\alpha^{N+1}} \sum_{n<N+1} c_n\, \alpha^n, \quad \gamma = c_N$$

$$\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n \text{ est nul pour toutes les valeurs absolues telles que } |\alpha| < 1.$$

On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des sommets de l'automate qui appartiennent à un chemin infini partant du sommet 0. Le sous-automate ayant $\mathcal{V}_a$ pour ensemble de sommets est appelé automate arithmétique *associé à σ.*

En particulier, si la substitution est unimodulaire, on retrouve le graphe arithmétique du chapitre 4, puisque d'une part une série formelle $\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n$ est nulle pour la topologie associée à la valeur propre α_k si et seulement si $\sum_{n\geq 0} c_n\, {\alpha_k}^n = 0$, et d'autre part il n'y a pas de topologie ultramétrique sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui vérifie $|\alpha| < 1$ (lemme 6.3.1).

Théorème 7.3.1 *L'automate arithmétique associé à la substitution σ est fini. Les étiquettes de ses chemins partant de 0 sont exactement les suites $(c_n)_n$ de $\mathcal{C}$ telles que $\sum_{n\geq 0} c_n \alpha^n$ est nulle pour toutes les valeurs absolues de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui valent moins de 1 en α.*

Preuve Ce théorème est la conséquence des 4 lemmes suivants. Les lemmes 7.3.3 et 7.3.4 ainsi que le corollaire 7.3.1 ne sont pas explicités dans [77]. ■

Lemme 7.3.1 *Pour toute valeur absolue v sur $\mathbb{Q}(\alpha)$, il existe une constante C_v telle que la valeur absolue de tous les sommets du graphe $\mathcal{G}_a$ est bornée par C_v. Si $C_v \geq 1$, il existe un élément c de $\mathcal{C} \cup \{\alpha\}$ tel que $|c|_v \neq 1$.*

Preuve. Soit v une valeur absolue sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ et M_v la constante $M_c = \max\{|c|_v, \delta \in \mathcal{C}\}$. Considérons un sommet $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n \alpha^n$ quelconque du graphe $\mathcal{G}$. Trois cas se présentent :

- Si $|\alpha|_v = 1$, alors v est non archimédiennes, sans quoi α admettrait un conjugué de module 1 et la substitution ne serait pas de type Pisot. De ce fait, $C_v = M_v$ répond à la question :

$$|\xi|_v = \frac{|\sum_{0\leq n<N} \alpha^n c_n|_v}{|\alpha|_v{}^N} = |\sum_{0\leq n<N} \alpha^n c_n|_v \leq \max(|c_n|_v\, |\alpha|_v{}^n\,) \leq M_v.$$

- Si $|\alpha|_v < 1$, on sait par hypothèse que $\sum_{n\geq 0} c_n \alpha^n$ est nul pour v. Ceci implique que $\xi = \sum_{n\geq 0} d_{n+N}\, \alpha^n$. Ainsi, $C_v = \frac{M_v}{1-|\alpha|_v}$ convient :

$$|\xi|_v = |\sum_{n\geq 0} c_{n+N} \alpha^n|_v \leq \frac{M_v}{1-|\alpha|_v}.$$

- Si $|\alpha|_v > 1$, alors $C_v = \frac{M_v}{|\alpha|_v - 1}$ convient par un simple calcul :

$$|\xi|_v \leq \frac{\sum_{0\leq n<N} |\alpha|_v{}^n |c_n|_v}{|\alpha|_v{}^N} \leq \frac{M_v}{|\alpha|_v{}^N}\, \frac{|\alpha|_v{}^N - 1}{|\alpha|_v - 1} \leq \frac{M_v}{|\alpha|_v - 1}.$$

Dans tous les cas, la valeur absolue des sommets est bornée par C_v. Si $|\alpha|_v = 1$, C_v sera supérieure à 1 si et seulement si M_v l'est, c'est à dire s'il existe un élément de $\mathcal{C}$ de valeur absolue distincte de 1. ■

Corollaire 7.3.1 *Si A un nombre entier tel que $A c$ est entier algébrique pour tout c de $\mathcal{C}$, alors $A\xi$ est entier algébrique pour tout sommet ξ du graphe $\mathcal{G}_a$.*

Preuve. Puisque α est un entier algébrique, il n'existe pas de valeur absolue ultramétrique qui vaut plus de 1 en α. Soit v une valeur absolue ultramétrique. Soit ξ un sommet du graphe.

Si $|\alpha|_v = 1$, selon la preuve du lemme précédent on a $|A\xi|_v \leq \max\{|Ac|_v, c \in \mathcal{C}\} \leq 1$ par choix de A. Si $|\alpha|_v < 1$, alors $|A\xi|_v = |\sum_{n\geq 0} Ac_{n+N}\alpha^n|_v \leq \max\{|Ac_{n+N}\alpha^n|_v\} \leq 1$. ■

Lemme 7.3.2 *Les étiquettes $(c_n)_{n\geq 0}$ des chemins de $\mathcal{G}_a$ partant de 0 sont exactement les suites telles que $\sum_{n\geq 0} c_n\alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui vaut moins de 1 en α.*

Preuve. Si $(c_n)_{n\geq 0}$ est telle que $\sum_{n\geq 0} c_n\alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue qui vaut moins de 1 en α, les nombres $\xi_N = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n \alpha^n$ sont des sommets du graphe $\mathcal{G}_a$. Il existe de plus des arêtes étiquetées par c_n joignant les sommets ξ_n et ξ_{n+1}. Comme $\xi_0 = 0$, la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est l'étiquette du chemin du graphe partant de $\xi_0 = 0$ et passant par les ξ_n.

Réciproquement, si $(c_n)_{n\geq 0}$ est l'étiquette d'un chemin partant de 0, il existe des nombres ξ_n tels que $\xi_0 = 0$ et c_n est l'étiquette de l'arête joignant ξ_n et ξ_{n+1}. Ces nombres vérifient donc : $\alpha\, \xi_{n+1} = c_n + \xi_n$. De proche en proche, on obtient :

$$\xi_N = \frac{\xi_0 + \sum_{0\leq n<N} c_n\alpha^n}{\alpha^N} = \frac{\sum_{0\leq n<N} c_n\alpha^n}{\alpha^N}.$$

Soit v une valeur absolue sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ telle que $|\alpha| < 1$. Puisque les $|\xi_n|_v$ sont bornées (lemme 7.3.1), on a alors :

$$|\sum_{n<N} c_n\alpha^n|_v = |\alpha^N\xi_N|_v = |\xi_N|_v\,{|\alpha|_v}^N \leq C_v\,{|\alpha|_v}^N \to_{n\to+\infty} 0.$$

De ce fait, $\sum_{n\geq 0} c_n\,\alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue qui vaut moins de 1 en α. ■

Lemme 7.3.3 *Il existe un élément β de $\mathbb{Q}(\alpha)$ tel que $\beta\xi$ est un entier algébrique pour tout sommet ξ du graphe $\mathcal{G}$.*

Preuve. Un élément de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un entier algébrique si et seulement sa valeur absolue est inférieure à 1 pour toutes les valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{Q}(\alpha)$. Nous allons construire un nombre β tel que $|\xi\beta|_{v_\mathcal{I}} \leq 1$ pour tout sommet ξ de $\mathcal{G}_a$ et tout idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

Reprenant les notations du lemme 7.3.1, les valeurs absolues v pour lesquelles $C_v > 1$ sont telles qu'il existe un élément δ de $\mathcal{C}\cup\{\alpha\}$ vérifiant $|\delta|_v \neq 1$. Or, seules un nombre fini de valeurs absolues ultramétriques sont distinctes de 1 en δ fixé. Les v pour lesquelles $C_v > 1$ sont ainsi en nombre fini. On les appelle $v_{\mathcal{I}_1},\ldots,v_{\mathcal{I}_m}$.

Pour chaque $v_{\mathcal{I}_i}$, soit $q_i \in \mathcal{I}_i$. On a $|q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}} < 1$. Soit n_i un entier $C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq {|q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}}^{-n_i}$.

Posons $\beta = \prod_{i=1}^n {q_i}^{n_i}$. Ce nombre est un entier algébrique, toutes les valeurs absolues ultramétriques valent donc moins de 1 en β. De ce fait, on a pour tout $0 \leq i \leq m$: $|\beta|_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq {|q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}}^{n_i}$.

Soit v une valeur absolue ultramétrique telle que $C_v \leq 1$. On a alors pour tout sommet ξ du graphe : $|\beta\,\xi|_v \leq |\beta|_v C_v \leq 1$. Soit maintenant v telle que $C_v > 1$. Alors v est une des $v_{\mathcal{I}_i}$ et on a pour tout sommet ξ du graphe :

$$|\beta\,\xi|_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq |\beta|_{v_{\mathcal{I}_i}} C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq {|q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}}^{n_i}\,C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq 1.$$

Ainsi, $\xi\beta$ est entier algébrique pour tout sommet ξ de $\mathcal{G}_a$. ■

Lemme 7.3.4 *Les sommets du graphe $\mathcal{G}_a$ sont en nombre fini.*

Preuve. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n. Si i est l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{R}^n$, $i(\frac{1}{\beta}\,\mathcal{O}_\mathbb{K})$ est donc un réseau de $\mathbb{R}^n$ (voir [79]).

En fait, i associe à un nombre x l'ensemble de tous ses conjugués, dont les valeurs absolues usuelles sont toutes les valeurs absolues archimédiennes sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ appliquées en α. Selon le lemme 7.3.1, l'image par i de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}_a$ est ainsi bornée. Par définition des réseaux, ces sommets sont donc en nombre fini. ■

Pour obtenir pratiquement l'automate arithmétique, on déterminer le plus petit nombre entier A tel que, pour tout c de $\mathcal{C}$, $A\,c$ est un entier algébrique, en utilisant par exemple le critère – facilement vérifiable ici – selon lequel un nombre algébrique est entier si et seulement si les fonctions symétriques élémentaires de ses conjugués sont des nombres entiers. Des résultats classiques de théorie des nombres assurent l'existence de cet entier A, si bien qu'il suffit de tester les entiers A dans l'ordre croissant jusqu'à obtenir un qui convient.

On peut alors reprendre la construction de l'automate arithmétique comme dans le cas unimodulaire.

7.3.2 Automate d'injectivité

A partir de l'automate arithmétique on utilise les définitions du chapitre 4 pour obtenir un *automate de connexité* et un *automate d'injectivité*.

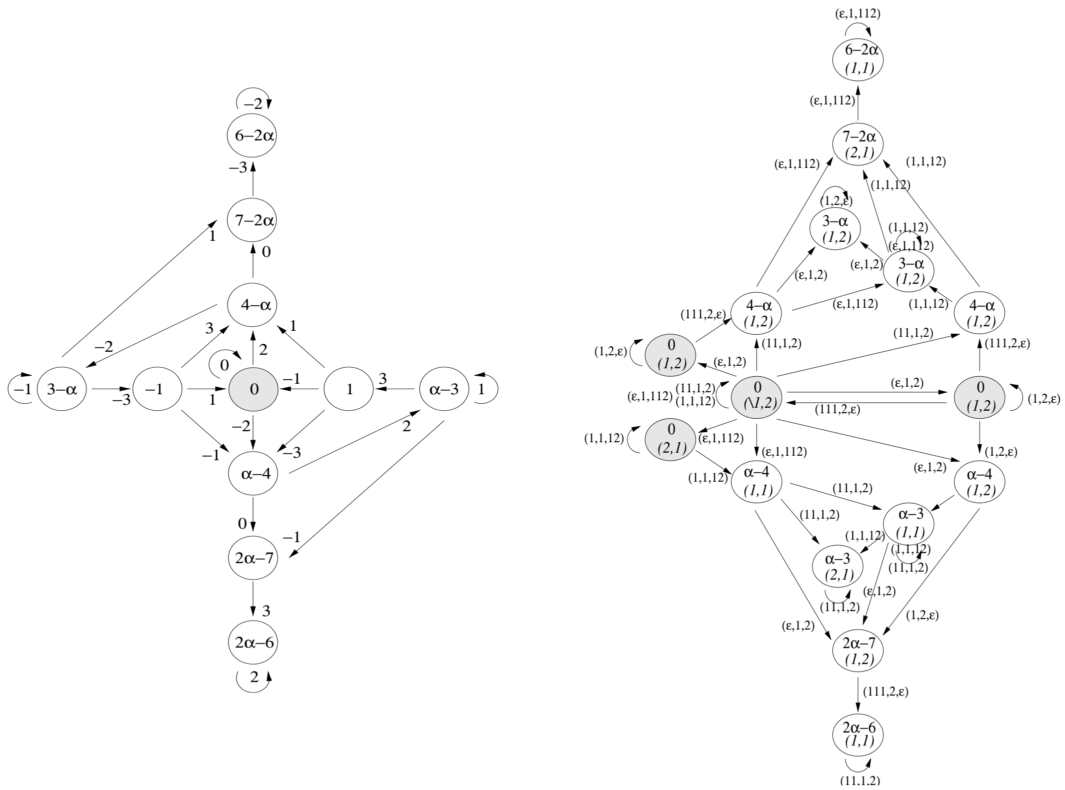

FIG. 7.3 – automates arithmétique et d'injectivité de σ_2

L'automate de connexité ne donne plus de critère de connexité, les travaux de V. Canterini étant basés sur la structure euclidienne de l'espace dans lequel sont représentées les substitutions unimodulaires.

Par contre, l'automate d'injectivité vérifie les mêmes propriétés que dans le cas unimodulaire : les résultats de la section 4.4 n'utilisent pas le caractère unimodulaire de la substitution mais simplement le théorème 4.2.1. On montre ainsi que l'automate d'injectivité mesure l'injectivité de la représentation globale au sens du théorème 4.4.1.

Théorème 7.3.2 *Il existe une condition nécessaire et suffisante explicite qui décide si la représentation globale F_{glob} d'une substitution de type Pisot est injective en mesure.*

Exemple 1. $\sigma_2(12) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$.

Les valeurs propres de la matrice de cette substitution sont toujours $\alpha_2 = 2+\sqrt{2}$ et $\rho_2 = 2-\sqrt{2}$. Un vecteur propre dominant de la matrice est $\mathbf{v}_\alpha = (1, 1/(\alpha-1))$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes (déjà donné à la figure 2.2) sont cette fois-ci ε, a, aa et aaa, ce qui implique que $\mathcal{C} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$.

L'automate arithmétique est alors un graphe à 11 sommets (figure 7.3). De manière semblable à la substitution de Fibonacci, les chemins partant de 0 y sont étiquetés par les suites c_n de $\mathcal{C}$ telles que $\sum_{i\geq O} c_i\,{\rho_2}^i = 0$.

L'automate d'injectivité a 16 états. Il est présenté à la figure 7.3. Il vérifie le critère d'injectivité : il est facile de vérifie qu'aucune arête ne rentre dans un sommets originaux. De plus, les boucles $(b \longrightarrow a)^N$ n'apparaissent que dans les sommets originaux dès que N est assez grand. On obtient ainsi :

Corollaire 7.3.2 *La représentation globale associée à la substitution définie par* $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$ *est injective en mesure.*

Exemple 2. $\sigma_7(1) = 11222$, $\sigma_7(1) = 1222$.

Les valeurs propres de la matrice de cette substitution sont toujours $\alpha_7 = 5/2 + \sqrt{13}/2$ et $\rho_7 = 5/2 - \sqrt{13}/2$. Un vecteur propre dominant de la matrice est $\mathbf{v}_\alpha = (1, (\alpha - 2)/3)$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes sont cette fois-ci ε, 1, 11, 112, 1122, 12 et 122. L'ensemble $\mathcal{C}$ contient 21 éléments. L'automate d'injectivité a 30 états et 102 sommets. Il vérifie le critère d'injectivité. On obtient ainsi :

Corollaire 7.3.3 *La représentation globale associée à substitution définie par* $\sigma_7(1) = 11222$, $\sigma_7(1) = 1222$ *est injective en mesure.*

Là encore, toutes les substitutions de type Pisot qui ont été testées vérifient le critère d'injectivité en mesure. En particulier, ce critère semble vérifié indépendamment du fait que les diviseurs premiers du déterminant de leur matrice d'incidence divisent les coefficients non dominants de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire du critère d'existence de facteurs p-adiques.

7.4 Étude des fibres de la représentation globale

On appelle *fibres d'une application* f définie sur un ensemble X les ensembles $f^{-1}(f(x))$ où $x \in X$. On rappelle que Γ désigne le développement en préfixes-suffixes.

Proposition 7.4.1 *Pour tout* $w \in \Omega$, *le cardinal de* $\Gamma({F_{glob}}^{-1} F_{glob}(w))$ *est égal au nombre de chemins différents de l'automate d'injectivité qui ont* $\Gamma(w)$ *pour étiquette.*

Preuve Selon la proposition 4.4.1, deux chemins de l'automate d'injectivité partant d'un sommet initial sont symétriques si et seulement s'ils sont les développements en préfixes-suffixes de deux points de Ω qui ont même représentation globale. Ainsi, pour tout $v \in \Omega$ tel que $F_{glob}(w) = F_{glob}(v)$, il existe un chemin de l'automate qui a $\Gamma(v)$ pour étiquette et dont le chemin symétrique admet $\Gamma(w)$ pour étiquette. De ce fait, $\Gamma({F_{glob}}^{-1} F_{glob}(w))$ est en bijection avec l'ensemble des chemins qui sont étiquetés par $\Gamma(w)$. ■

On rappelle que Ω_{per} désigne l'ensemble des points périodiques de Ω et $\mathcal{D}_\varepsilon$ les développements en préfixes-suffixes des éléments de Ω appartenant à l'orbite de Ω_{per}.

Corollaire 7.4.1 *Soit* $w \in \Omega$ *tel que* $\Gamma(F_{glob}^{-1} F_{glob}(w))$ *est fini. Soit* C *le cardinal de la fibre selon* w *de la représentation globale. Alors*

$$C \leq card\left((\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \cap \Gamma\left({F_{glob}}^{-1} F_{glob}(w)\right)\right) + (card(\Omega_{per}))\left(card\left(\mathcal{D}_\varepsilon \cap \Gamma({F_{glob}}^{-1} F_{glob}(w)\right)\right).$$

Preuve Selon le chapitre 1, tout développement en préfixes-suffixes a au plus card(Ω_{per}) préimages dans Ω. ■

De ce fait, l'étude de l'automate d'injectivité peut permettre d'étudier précisément le défaut d'injectivité de la représentation globale. On donne deux exemples d'une telle étude.

Exemple 1 : la substitution de Fibonacci. $\sigma_1(1) = 12$, $\sigma_1(2) = 1$.

On redonne l'automate d'injectivité de sa représentation globale à la figure 7.4. Les sommets sont numérotés de 1 à 8 pour faciliter la preuve de la proposition suivante.

Proposition 7.4.2 *La représentation de la substitution de Fibonacci est injective sauf sur l'orbite des points périodiques de la substitution, sur laquelle les fibres sont de cardinal au plus 2.*

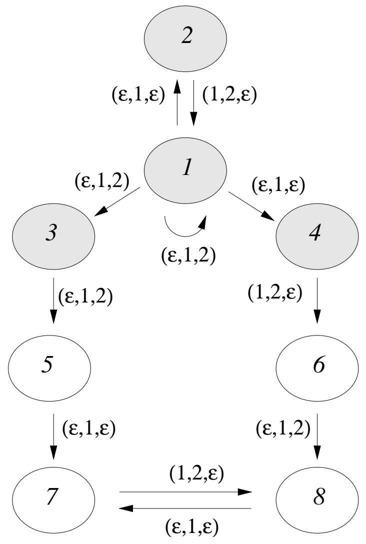

FIG. 7.4 – automate d'injectivité de la substitution de Fibonacci σ_1

Preuve Soient $e = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ l'étiquette identique de deux chemins de l'automate partant d'un sommet initial. Notons $X = (x_i)_{i\geq 0}$ et $Y = (y_i)_{i\geq 0}$ ces chemins, ou les x_i et y_i sont les numéros des sommets correspondants.

La structure de l'automate implique que le chemin doit passer par un des sommets 3 ou 4, et qu'après le passage par ce sommet, il est uniquement déterminé : un chemin passant par 3 est ensuite étiqueté $(\varepsilon, 1, 2)[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$ tandis que un chemin qui passe par 4 est ensuite étiqueté par $(1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 2)[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$.

Ainsi, en supprimant les débuts de X et Y qui sont égaux et initiaux, on se ramène au cas où $x_1 \neq y_1$, x_1 est un des sommets originaux 1 ou 2, et y_1 est le sommet initial non original correspondant (3 pour 1 et 4 pour 2).

Supposons que $x_1 = 1$ et $y_1 = 3$. On a alors $c = (\varepsilon, 1, 2)[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$ avec $Y = 3, 5, [7, 8]^\infty$. De ce fait, $x_2 \in 1, 3$. Si $x_2 = 3$, on a $X = 1, 3, 5, [7, 8]^\infty$ et son étiquette n'est pas égale à e. Ainsi, $x_2 = 1$ et $x_3 \in 2, 4$. Si $x_3 = 4$, alors $X = 1, 1, 4, 6, [8, 7]^\infty$ et son étiquette est différente de e. Ainsi, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ et le chemin $(x_i)_{i\geq 4}$ a pour étiquette $[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$. En particulier, on ne pourra jamais avoir $x_i = 3$ puisque ce sommet est suivi de l'étiquette $(\varepsilon, 1, 2)(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, ou $x_i = 4$ puisque ce sommet est suivi de $(1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 2)$. Ainsi, $X = 1, [1, 2]^\infty$ est uniquement déterminé.

Supposons que $x_1 = 2$ et $y_1 = 4$. On a alors $x_2 = 1$, $d = (1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 2)[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$ et $Y = 4, 6, [8, 7]^\infty$. Si $x_3 = 3$, alors $X = 2, 1, 3, 5, [7, 8]^\infty$ n'est pas étiqueté par e. De ce fait, $x_3 = 1$. La encore, le chemin $(x_i)_{i\geq 3}$ est étiqueté par $[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (1, 2, \varepsilon)]^\infty$. Comme précédemment, on ne pourra jamais avoir $x_i = 3$ ou $x_i = 4$, et $X = 2, 1, [1, 2]^\infty$ est uniquement déterminé.

Ainsi, F_{glob} est injective sauf aux points dont le développement en préfixes-suffixes a pour fin $[(\varepsilon, 1, \varepsilon), (a, b, \varepsilon)]^\infty$, c'est-à-dire des éléments de l'orbite négative des points périodiques de la substitution. Sur cette orbite négative, l'application Γ est injective puisque la substitution n'admet qu'un seul point fixe à droite. Les fibres sont donc de cardinal au plus 2. ■

Ce résultat est déjà connu pour la substitution de Fibonacci dans le cadre de l'étude des suites sturmiennes. Le but de cette démonstration est d'illustrer la proposition 7.4.1 sur un exemple simple.

Exemple 2 : la substitution de Rauzy $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(b) = 12$.

Proposition 7.4.3 *Les fibres de la représentation globale de la substitution $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(1) = 12$ sont toutes de cardinal fini.*

Preuve. Cette preuve basée sur les mêmes idées que celles de la proposition 7.4.2, se trouve en Annexe A. ■

On voit avec ces deux exemples comment l'application pratique de la proposition 7.4.2 est restreinte par la complexité des automates considérés. Pour que cette proposition montre tout son intérêt, il faudrait définir un algorithme qui décide si, dans un automate, il existe une infinité de chemins infinis qui ont même étiquette.

7.5 Cas particulier des substitutions de longueur constante

Les substitutions primitive de longueur constante ne sont pas de type Pisot : elles ont pour valeur propre dominante la longueur de la substitution, et le polynôme caractéristique de leur matrice d'incidence est donc réductible sur $\mathbb{Q}$. Malgré tout, nous allons voir que, pour ces substitutions, la définition de la représentation globale trouve un sens et qu'on peut définir un automate d'injectivité.

On retrouve ainsi une partie des résultats déjà connus sur la représentation des systèmes substitutifs primitifs de longueur constante comme extension finie d'un odomètre.

Ainsi, le but de cette section n'est pas d'énoncer des résultats nouveaux, mais d'illustrer comment en un certain sens les idées et résultats intervenant de ce chapitre généralisent le cas bien connu des substitutions de longueur constante.

Soit σ une substitution primitive de longueur constante L. L'entier L est alors valeur propre de la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de σ, et $\mathbf{v}_L = (1, \ldots, 1)$ est vecteur propre à gauche pour L.

Dans une optique de similarité avec le cas Pisot, on pourrait définir une représentation formelle dans "$\mathbb{Q}[L]$" du système symbolique en posant pour tout $w \in \Omega$ ayant $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ pour développement en préfixes-suffixes :

$$F(w) = \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_L > L^i = \sum_{i \geq 0} |p_i| L^i = \sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)|.$$

Un topologie sur $\mathbb{Q}$ fait converger cette série si et seulement s'il s'agit d'une topologie p-adique, avec p premier qui divise L.

Définition 7.5.1 *Soit p un diviseur premier de la longueur L d'une substitution primitive de longueur constante. La* représentation p-adique *de la substitution est la fonction F_p à valeur dans $\mathbb{Z}_p$ définie par*

$$\forall w \in \Omega, \quad si\ \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \quad alors \quad F_p(w) = \sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)| \in \mathbb{Z}_p.$$

Proposition 7.5.1 *La représentation p-adique F_p est continue et réalise une semi-conjugaison entre le décalage S sur Ω et l'addition de 1 : $F_p \circ S = F_p + 1$.*

Preuve Soit $w \in \Omega$ avec $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$. Puisque $F_p(w) =< \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_L > L^i$, le vecteur $\mathbf{v}_L$ étant un vecteur propre à gauche pour $\mathbb{M}_\sigma$, on a $F_p(w) = \lim < \mathbf{l}(p_0\sigma(p_1) \ldots \sigma^i(p_i)), \mathbf{v}_L >$. On peut ainsi reprendre une preuve du type de celle de la proposition 3.1.1 et utiliser la propriété 2.4.1 pour conclure que $F_p(Sw) = F_p(w) + < \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_L >$. Or, pour les substitutions de longueur constante, on a toujours $< \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_L >= 1$ indépendamment de w_0. ■

On rappelle que $\mathbb{Z}_L$ désigne le produit direct des $\mathbb{Z}_p$ pour tous les diviseurs premiers p de L.

Si $L = \prod i = 1^k {p_i}^{n_i}$, on appelle *représentation globale* de la substitution l'application F_{glob} : $\Omega \mapsto \mathbb{Z}_L$ définie par $F_{glob} = (F_{p_1}, \ldots F_{p_k})$.

On retrouve ainsi la partie adique du facteur équicontinu maximal du système substitutif (voir [20]) :

Corollaire 7.5.1 *Le système substitutif associé à une substitution primitive de longueur constante L admet pour facteur topologique l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_L$.*

De plus, on peut étudier l'injectivité de cette représentation comme dans le cas Pisot.

Définition 7.5.2 *Soit σ une substitution de longueur constante. On appelle automate arithmétique associé à la substitution la composante de 0 dans le graphe suivant :*

- *L'ensemble des étiquettes est $\mathcal{C} = \{-(L-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (L-1)\}$.*
- *Un rationnel q est un état de l'automate si et seulement $q = 1/L^n \sum_{i=1}^{n-1} c_i L^i$, où $c_i \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum_i c_i L^i$ converge vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L.*
- *Un entier c étiquette une arête de q_1 vers q_2 si et seulement s'il existe une suite$c_i \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_i c_i L^i$ converge vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L, qui vérifie : $c = c_n$, $q_1 = 1/L^n \sum_{i=1}^{n-1} c_i L^i$ et $q_2 = 1/L^{n+1} \sum_{i=1}^{n} c_i L^i$.*

Théorème 7.5.1 *L'automate arithmétique associé à une substitution primitive de longueur constante a un nombre fini d'états. Les étiquettes des chemins infinis partant de 0 y sont exactement les suites $\mathcal{C} = \{-(L-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (L-1)\}$ telles que $\sum_i c_i L^i$ vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L.*

Preuve La preuve est identique à celle du théorème 7.3.1 : on prouve que les valeurs absolues p-adiques des états de l'automate sont toutes bornées. Ainsi, il existe un entier A tel que Aq est un entier algébrique pour tout état q tout graphe. de même que leur valeur absolue usuelle. Or, puisque $L > 1$, la valeur absolue usuelle des sommets du graphe est bornée. Ces sommets sont donc en nombre fini. La preuve du lemme 7.3.2 est encore valable pour les substitutions de longueurs constantes. ∎

A partir de cet automate, on définit un *automate d'injectivité* pour les substitutions de longueur constante d'une manière identique au cas Pisot. Les propriétés de cet automate sont identiques :

Proposition 7.5.2 *Les étiquettes des chemins non symétriques de l'automate d'injectivité sont exactement les développement en préfixes-suffixes des points de Ω pour lesquels la représentation globale F_{glob} est non injective.*

Corollaire 7.5.2 *Il existe une condition nécessaire et suffisante vérifiable algorithmiquement qui décide si un système substitutif primitif de longueur constante est isomorphe en mesure à l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_L$.*

La condition de coïncidence caractérise les substitutions de longueur constante isomorphes à leur facteur équicontinu maximal, de la forme $\mathbb{Z}_L \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, pour les substitutions de longueur constante, toute substitution qui vérifie la condition nécessaire et suffisante provenant de l'automate d'injectivité vérifie aussi la condition de coïncidences.

L'étude des fibres de la représentation permet d'étudier plus précisement la relation entre un système substitutif primitif de longueur constante et son facteur p-adique. Par exemple, pour la substitution de Morse définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 21$, l'automate d'injectivité est constitué d'une copie de l'automate des préfixes-suffixes (qui forment les sommets originaux) et d'une autre copie de cet automate, non reliée aux sommets originaux, et constituée de sommets initiaux. On retrouve ainsi que les fibres de la représentation globale de la substitution de Morse contiennent toujours un point et son symétrique, c'est-à-dire le mot dans lequel les 1 ont été remplacés par des 2 et les 2 par des 1.

7.6 Injectivité de la représentation sur un groupe compact

On peut selon des méthodes semblables à celles du chapitre 4 définir des automates de $\mathcal{U}$-injectivité, et donc définir un critère qui décide si l'ensemble des points suivants est de mesure nulle :

$$\left\{ w \in \Omega;\ \exists w' \in \Omega,\ \exists\, n_1, \dots n_{d-1} \in \mathbb{Z},\ F_{glob}(w) - F_{glob}(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta_i - \delta_d) \right\}.$$

Ceci est équivalent au fait que $\varphi(w) - \varphi(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta(i) - \delta(d))$ d'une part et d'autre part $F_p(w) - F_p(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\hat\beta_i - \hat\beta_1)$ pour tout diviseur p premier du déterminant de $\mathbf{M}_\sigma$.

Si une substitution de type Pisot est telle que tous les diviseurs premiers $p_1 \dots p_k$ du déterminant de $\mathbf{M}_\sigma$ divisent aussi les coefficients non dominants de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$, par exemple la substitution σ_2, on a défini au chapitre précédent une représentation du système substitution par une translation sur le groupe compact $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$. De plus, selon les propositions 6.2.2 et 6.3.2, cette représentation est égale à $(\varphi_{\mathcal{L}}, J_{\hat\beta_1}(F_{p_1}), \dots, J_{\hat\beta_1}(F_{p_k}))$. En particulier, cette représentation prend la même valeur en deux points $w, w' \in \Omega$ si et seulement si :

$$\exists\, n_1, \dots n_{d-1} \in \mathbb{Z}; \qquad \varphi(w) - \varphi(w') = \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta(i) - \delta(d))$$

$$\forall\, p \text{ diviseur premier de } \det \mathbf{M}_\sigma,\quad \exists\, n_{p,1}, \dots n_{p,d-1} \in \mathbb{Z}_p;\quad F_p(w) - F_p(w') = \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} n_{p,i}(\hat\beta_i - \hat\beta_1). \tag{7.5}$$

Les automates de $\mathcal{U}$-injectivité ne caractérisent qu'une partie des points w pour lesquels un autre point w' vérifie ces relations, il s'agit des couples (w, w') pour lesquels on a

$$\forall\, p \text{ diviseur premier de } \det \mathbf{M}_\sigma;\ \forall\, i = 1, \dots, d-1;\ \ n_{p,i} = n_i.$$

Ainsi, les techniques arithmétiques du chapitre 4 ne laissent pas assez de liberté aux entiers considérés. De plus, ces techniques ne semblent pas permettre simplement de prendre en compte des entiers p-adiques $n_{p,i}$ plutôt que des nombres relatifs classiques.

Le problème fondamental est en fait posé par le fait qu'un nombre infini de translatés de $\mathbb{Z}_p$ par un vecteur fixé de $\mathbb{Q}_p$ rencontre $\mathbf{Z}_p$, contrairement à un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, où seuls un nombre fini de translatés de $[0,1]^n$, l'équivalent euclidien de $\mathbb{Z}_p$, par un vecteur donné rencontrent $[0,1]^n$.

En fait, alors que $\mathbb{R}^{d-1}$ a été quotienté par un réseau pour obtenir le tore, ce passage au quotient s'exprimant directement en termes de graphes, les parties arithmétiques ${\mathbb{Q}_p}^{d-1}$ ont de leur côté été quotientées par un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, et il devient difficile d'exprimer le défaut d'injectivité de ce passage au quotient en termes de graphes.

On pourrait malgré tout imaginer que la structure très particulière des substitutions de type Pisot implique que seuls un nombre fini d'entiers $n_{p,i}$ peuvent intervenir dans les formules (7.5). Dans ce cas, le critère d'injectivité torique du chapitre 4 serait encore applicable aux substitutions de type Pisot non unimodulaires, et permettrait de caractériser les systèmes substitutifs de type Pisot qui sont une extension finie d'une rotation sur un groupe compact.

Une raison précise laisse penser que ceci n'est en fait pas vrai. En effet, pour la substitution σ_2, on obtient une réponse positive à la programmation du critère d'injectivité torique du chapitre 4 adapté au cas non unimodulaire (Annexe B). Le système substitutif associé serait ainsi isomorphe à une translation minimale sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$. Or, cette translation s'obtient comme la projection de la représentation globale dont l'image est présentée à la figure 7.1, sur simplement deux coordonnées. Si cette image est bien comme on le conjecture de mesure non nulle, il semble alors difficile qu'elle se projette de manière injective dans le plan $y = 0$.

Ceci semble être en contradiction avec le cas des substitutions de longueur constante, qui bien que non unimodulaires, sont isomorphes à une extension finie d'une translation p-adique.

En fait, la section 7.5 montre que ces propriétés des substitutions de longueur constante sont à mettre plutôt dans la catégories des résultats sur l'injectivité de la représentation globale que dans ceux sur l'injectivité de la représentation sur un groupe compact. Plus précisément, lorsque la substitution est de longueur constante, on assiste à un phénomène très particulier : la représentation sur un groupe compact est égale à la représentation globale, et n'est pas une projection de cette représentation globale sur un quotient. Les propriétés d'injectivité de la représentation globale se transportent donc directement sur la représentation sur un groupe compact.

Si la substitution est de longueur non constante, alors cette situation semble ne plus se reproduire, et le problème de l'injectivité de la représentation sur un groupe compact devient distinct de l'injectivité de la représentation globale. Cette distinction ne se produit cependant pas pour les substitutions de type Pisot, unimodulaires sur 2 lettres : B. Host a montré que pour de telles substitutions, l'injectivité de la représentation torique est équivalente à l'injectivité sur la représentation géométrique [46].

Ceci ne remet pas en cause l'obtention éventuelle de partition de Markov pour les endomorphismes du tore de type Pisot. En effet, étant donné une substitution de type Pisot et non unimodulaire, si la représentation globale associée est injective en mesure, alors le système substitutif est isomorphe à un échange de morceaux dans un sous-ensemble auto-similaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ croisé avec des extensions finies de corps p-adiques. On peut relever ce sous-ensemble dans $\mathbb{R}^d$ croisé avec les mêmes extensions finies de corps p-adiques en rajoutant une hauteur comme cela a été fait dans le cas unimodulaire au chapitre 5. Un résultat sur la mesure de l'espace obtenu, similaire à celui de la conjecture 7.2.1, permettrait alors de définir une partition du sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ croisé avec les extensions p-adiques, qui serait décrite par le système dynamique symbolique de type fini $\widetilde{\mathcal{D}}$, la projection dans le tore $\mathbb{T}^d$ réalisant une semi-conjugaison entre le décalage et l'endomorphisme associé à la matrice de la substitution.