Autour des fractals de Rauzy

Anne SIEGEL

Étant donné un système dynamique, une méthode classique pour étudier la structure locale des orbites est de considérer l'application de premier retour sur un ouvert bien choisi autour d'un point. Pour certains systèmes (automorphismes hyperboliques du tore, difféomorphismes pseudo-Anosov des surfaces entre autres), l'application de premier retour est conjuguée au système de départ. On dit alors que le système original est *autosimilaire*. C'est le cas de l'addition du nombre d'or sur le tore de dimension 1.

A partir du moment où un phénomène d'autosimilarité se produit, une substitution est sous-jacente au système : après avoir découpé l'espace en suffisamment de morceaux, la trajectoire des points de l'ouvert avant qu'ils y reviennent définit une substitution. Le système dynamique symbolique associé à la substitution est l'ensemble des codages, dans la partition, des trajectoires des points du système dynamique. On s'intéresse au chemin inverse : quelles actions sont codées par une substitution donnée ? Ceci revient à caractériser les substitutions qui engendrent un pavage périodique autosimilaire.

Systèmes substitutifs Une *substitution* ou *morphisme itéré* remplace les lettres d'un alphabet fini $\mathcal{A}$ par des mots finis non vides, par exemple $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 1$ sur l'alphabet $\{1, 2\}$. On étend canoniquement sa définition à l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ des mots bi-infinis. Un *point périodique* est un mot bi-infini stable par une itération finie de la substitution. Si la substitution mélange suffisamment les lettres (condition de primitivité), les points périodiques d'une substitution ont même ensemble de facteurs. Les mots bi-infinis ayant cet ensemble de facteurs forment un compact stable par le décalage sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Ce système dynamique symbolique, appelé *système substitutif*, est minimal et uniquement ergodique [3]. Il présente des propriétés d'autosimilarité puisqu'engendré par un point périodique pour la substitution.

Substitution de Tribonacci et fractal de Rauzy La substitution de Tribonacci σ est définie par $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 13$, $3 \mapsto 1$. Sa matrice d'incidence, obtenue par linéarisation, a pour polynôme caractéristique $x^3 - x^2 - x - 1$. Ses valeurs propres non dominante sont deux complexes α et $\overline{\alpha}$ tous deux appelés *nombre de Tribonacci*. En particulier, la matrice d'incidence admet dans $\mathbb{R}^3$ une droite dilatante et un plan contractant. On représente le point fixe de σ en une ligne brisée de $\mathbb{R}^3$ en remplaçant chaque lettres du point fixe par le vecteur de base de $\mathbb{R}^3$ correspondant. Cette ligne s'enroule autour de la direction dilatante. Les sommets de la ligne brisée se projettent sur le plan contractant parallèlement à la droite dilatante sur un ensemble borné dont l'adhérence $\mathcal{R}$ est un compact appelé *fractal de Rauzy.*

Cylindres du fractal de Rauzy et autosimilarité Trois sous-ensembles du fractal de Rauzy se distinguent : les *cylindres* correspondent aux projections des points de la ligne Ces cylindres constituent un recouvrement de $\mathcal{R}$, et Rauzy montrent dans [4] que leurs intersections sont de mesure nulles. Ainsi, les cylindres pavent le fractal de Rauzy. L'autosimilarité du système substitutif se transmet graphiquement sur l'ensemble $\mathcal{R}$ par le fait que chaque cylindre de $\mathcal{R}$ n'est rien d'autre que la copie de $\mathcal{R}$ multipliée par un des complexes α, α^2 ou α^3. Ceci prouve que le fractal de Rauzy est autosimilaire.

Un travail plus approfondi sur la combinatoire de la substitution, montre que le fractal de Rauzy est l'ensemble des sommes de séries en α ayant pour coefficients les suites de $0, 1$ qui ne contiennent pas trois 1 consécutifs : $\mathcal{R} = \{\sum_{i\geq 0} \varepsilon_i\, \alpha^i;\ \varepsilon_i = 0, 1;\ \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0\} \subset \mathbb{C}$.

Dynamique du fractal de Rauzy Sur la ligne brisée, on se déplace de sommet en sommet en utilisant les trois vecteurs canoniques. En particulier, on peut translater chaque cylindre par le projeté du vecteur canonique correspondant, tout en restant dans $\mathcal{R}$. Ceci définit un échange de morceaux représenté à la Figure 1. Il est naturel de coder, dans la partition définie par les cylindres, l'action de cet échange de morceaux sur $\mathcal{R}$. Rauzy montre que l'application de codage est injective en mesure, surjective dans le système substitutif associé à la substitution de Tribonacci. Ainsi, *il existe un isomorphisme mesurable entre l'échange de morceaux de $\mathcal{R}$ et le décalage sur le système substitutif.*

Pavage périodique Le quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau donné projette l'échange de morceaux sur $\mathcal{R}$ sur une translation torique. Selon [4], ce passage au quotient est neutre (injectif en mesure) : les décalés de $\mathcal{R}$ selon un réseau donné ne s'intersectent pas. Puisqu'ils recouvrent $\mathbb{C}$ par le théorème de Kronecker, on construit ainsi un pavage régulier (voir figure 1).

L'utilisation couplée de la dynamique, des propriétés d'autosimilarité et de la théorie des nombres impliquent ainsi les énoncés équivalents suivants :

- *géométriquement* : le fractal de de Rauzy engendre un pavage périodique et autosimilaire de $\mathbb{C}$,
- *dynamiquement* : le système dynamique engendré par la substitution de Tribonacci est mesurablement isomorphe à une rotation sur un tore,
- *spectralement* : ce système dynamique est à spectre purement discret.

Plus généralement, quelles sont les substitutions qui engendrent un pavage périodique autosimilaire? D'un point de vue spectral, de telles substitutions engendrent un système dynamique qui est à spectre purement discret.

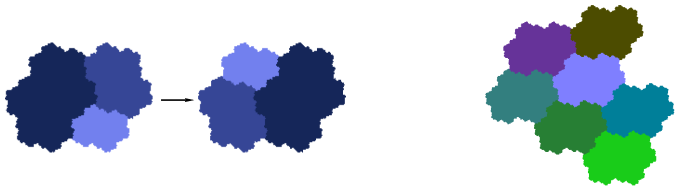

FIG. 1 – *fractal de Rauzy : translation par morceaux et pavage périodique.*

Fractals de Rauzy pour les substitutions de type Pisot On peut construire un fractal de Rauzy pour toute substitution dont la matrice a un espace dilatant de dimension 1 et telle que la ligne brisée correspondant à un de ses points fixes reste à distance bornée de cette droite dilatante. La valeur propre dominante de la matrice est alors un *nombre de Pisot*, et une telle substitution est dite *de type Pisot*. Notons que si la matrice d'incidence n'est pas de déterminant ± 1, le fractal de Rauzy a des composantes p-adiques.

Comme pour la substitution de Tribonacci, le fractal de Rauzy a une structure autosimilaire et est recouvert par d cylindres correspondant aux lettres de l'alphabet, mais rien ne permet d'affirmer que les cylindres s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle. Une condition suffisante a été mise en évidence : cette condition purement combinatoire, dite de *coïncidences*, signifie que les points périodiques de la substitution ont suffisamment de parties communes. Sous cette condition, *les cylindres du fractal de Rauzy s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle* [1]. On peut alors définir un échange de morceaux sur le fractal de Rauzy de la substitution. *Cet échange de morceaux est isomorphe en mesure au système substitutif de départ.*

Notons qu'on ne connaît aucun exemple de substitution de type Pisot sans coïncidences. Récemment il a été prouvé que les substitutions de type Pisot sur deux lettres sont toutes à coïncidences. *On conjecture que toutes les substitutions de type Pisot vérifient la condition de coïncidences* (voir le survol [2], Chap. 7).

Condition de pavage Comme pour la substitution de Tribonacci, on peut quotienter le fractal de Rauzy d'une substitution de type Pisot avec coïncidences, par un réseau tel que les vecteurs de l'échange de morceaux sont égaux après passage au quotient. Le système substitutif est alors représenté par une rotation sur un groupe compact qui est le facteur équicontinu maximal du système substitutif sous certaines hypothèses.

Autrement dit, les décalés du fractal de Rauzy d'une substitution par un réseau donné recouvrent l'espace, mais il reste à prouver que ces décalés s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle. Ceci est démontré pour les substitutions sur deux lettres. Aucun contre-exemple n'est connu. Un critère algorithmique existe, qui permet de vérifier au cas par cas qu'il y a bien pavage (voir [2], Chap. 7). *On conjecture que la substitution de coïncidences est suffisante pour qu'il y ait pavage/spectre discret.*

Références

[1] *P. Arnoux and S. Ito*, Pisot substitutions and Rauzy fractals, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8-2** (2001), 181–207.

[2] *P. Fogg*, Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag (to appear). Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, and A. Siegel.

[3] *M. Queffelec*, Substitution dynamical systems—spectral analysis. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag (1987).

[4] *G. Rauzy*, Nombres algébriques et substitutions, Bull. Soc. Math. France **110-2** (1982), 147–178.

Anne SIEGEL
IRISA
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex - FRANCE
asiegel@irisa.fr