
Écoulement en milieu poreux
Elements Finis Mixtes

J. Erhel - INRIA-RENNES

Thèse de H. Hoteit

Chaire UNESCO - Calcul numérique intensif

TUNIS - Mars 2004

Plan

- ▷ Éléments Finis Mixtes et Mixtes Hybrides
- ▷ Effets de la discrétisation spatiale
- ▷ Effets du contraste de perméabilité
- ▷ Positivité des schémas
- ▷ Conclusion

Éléments Finis Mixtes et Mixtes Hybrides

Écoulement en milieux poreux

Conservation de la masse, Loi de Darcy, Conditions aux Limites

$$\begin{aligned} s \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u &= f & \text{sur} & \quad \Omega \times (0, T] \\ u &= -\mathcal{K} \nabla p & \text{sur} & \quad \Omega \times (0, T] \\ p(0, x) &= p_0 & \text{sur} & \quad \Omega \\ p &= p_D & \text{sur} & \quad \Gamma^D \times (0, T] \\ u \cdot \nu &= q_N & \text{sur} & \quad \Gamma^N \times (0, T] \end{aligned}$$

p : charge piézométrique

u : vitesse de Darcy

f : terme source

\mathcal{K} : tenseur de conductivité hydraulique

s : coefficient d'emmagasinement

Avantages des méthodes mixtes

- ▷ la charge et son gradient sont approchés simultanément
- ▷ la masse est conservée localement (sur chaque élément K)

$$\int_{\partial K} u \cdot \nu = \int_K \nabla \cdot u = \sum_{\partial K} flux$$

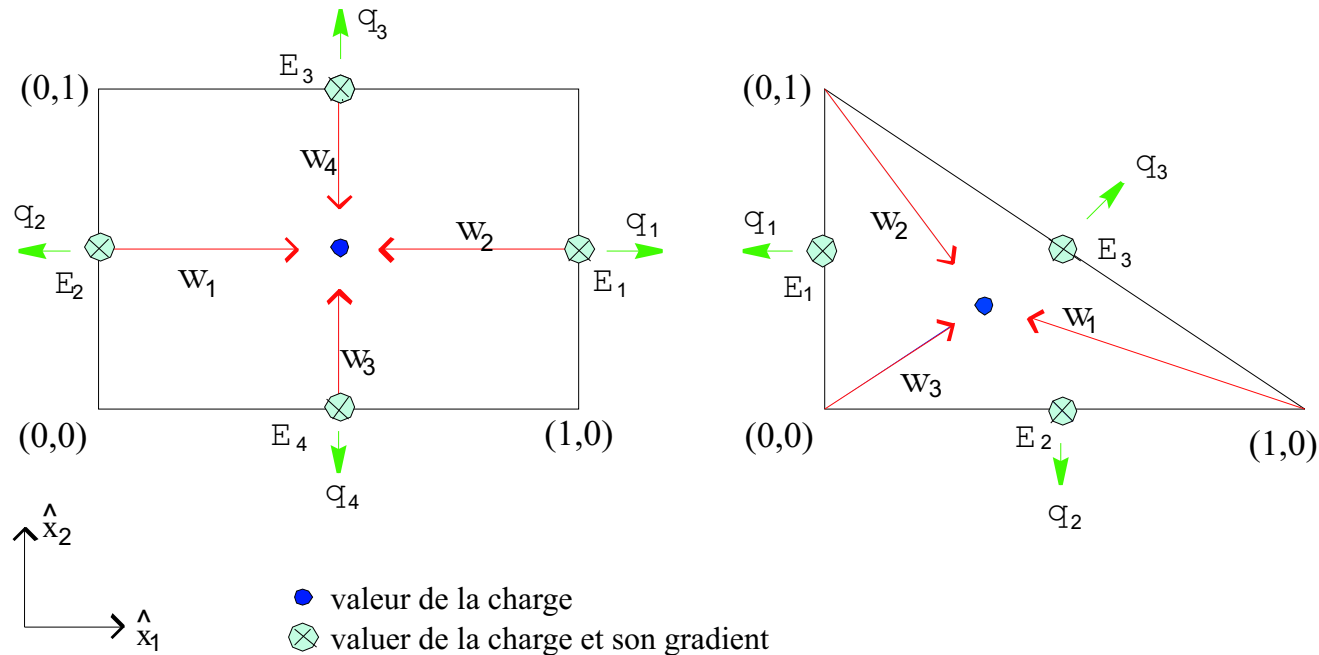
- ▷ la continuité des flux à travers les facettes

$$\int_E u \cdot \nu_{K_1} = \int_E u \cdot \nu_{K_2}, \quad E = \partial K_1 \cap \partial K_2$$

- ▷ les tenseurs pleins sont facilement manipulés

Espace de Raviart-Thomas d'ordre 0

Variables nodales sur l'élément de référence



Élément courant

$$w_{K,E} = \frac{J}{|J|} \hat{w}_{\hat{K},E}$$

Éléments finis mixtes EFM

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \tilde{R} \\ \tilde{R}^T & -\tilde{M} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathcal{J}}} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{V} \end{pmatrix}$$

P : charges moyennes sur les mailles (ordre nm)

Q : flux à travers les facettes (ordre nf)

\tilde{F} : terme puits-source et conditions aux limites (ordre nm)

\tilde{V} : conditions aux limites (ordre nf)

S : matrice diagonale d'ordre nm

\tilde{M} : matrice creuse d'ordre nf

\tilde{R} : matrice creuse de dimensions $nm \times nf$

Éléments finis mixtes hybrides EFMH

$$\underbrace{\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \frac{dP}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} D & -R \\ -R^T & M \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ V \end{pmatrix}$$

P : charges moyennes sur les mailles (ordre nm)

T : charges moyennes sur les facettes (ordre nf)

F : terme puits-source et conditions aux limites (ordre nm)

V : conditions aux limites (ordre nf)

S : matrice diagonale d'ordre nm

D : matrice diagonale d'ordre nm

M : matrice creuse d'ordre nf

R : matrice creuse de dimensions $nm \times nf$

Propriétés des matrices

Mixte EFM

\widetilde{M} est symétrique définie positive

$\widetilde{\mathcal{J}}$ est symétrique indéfinie

Mixte hybride EFMH

M est symétrique définie positive

\mathcal{J} est symétrique définie positive

Régime permanent

Résoudre

$$\mathcal{J} \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ V \end{pmatrix}$$

Mixte EFM

méthode directe : factorisation LDL^T

méthode itérative : SYMMLQ ou MINRES

Préconditionnement ?

Mixte hybride EFMH

méthode directe : factorisation de Cholesky LL^T

méthode itérative : Gradient Conjugué Préconditionné

Régime transitoire - EFM

Systeme raide : schéma en temps **implicite**

Schéma d'Euler implicite, d'ordre 1, pas de temps h

Mixte

$$\begin{pmatrix} S & hR \\ R^T & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{n+1} \\ Q^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^n \\ Q^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hF^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix}$$

complément de Schur **symétrique défini positif**

$$(M + hR^T S^{-1} R)Q^{n+1} = R^T P^n + hS^{-1} F^{n+1} - V^{n+1}$$

Mixte hybride

$$\begin{pmatrix} S + hD & -hR \\ -R^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{n+1} \\ T^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^n \\ T^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hF^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix}$$

complément de Schur **symétrique défini positif**

$$(M - hR^T(S + hD)^{-1}R)T^{n+1} = R^T(S + hD)^{-1}(SP^n + hF^{n+1}) + V^{n+1}$$

Effets de la discrétisation spatiale

Calcul des matrices en mixte hybride

Pour chaque triangle K , inversion de B_K

$$(B_K)_{E,E'} = \int_K w_{K,E}^T \mathcal{K}_K^{-1} w_{K,E'} dx$$

Conditionnement de B_K

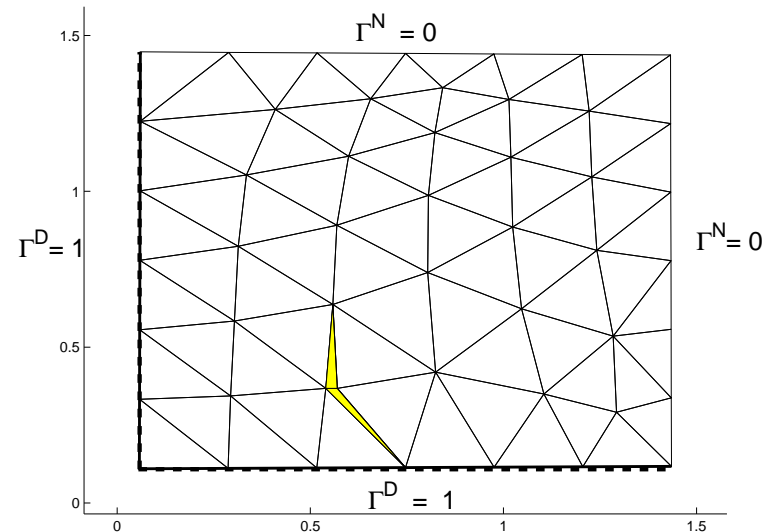
▶ Qualité du maillage

Stabilité numérique du code d'inversion

▶ Méthode de Cramer (généralisé automatiquement par **Maple**)

▶ Décomposition matricielle $B_K = LDL^T$ ($B_K^{-1} = L^{-T} D^{-1} L^{-1}$)

Test numérique avec maillage irrégulier



$$T = 3, \Delta t = 1, s = 1, \mathcal{K} = I_{2 \times 2}, f = 0$$

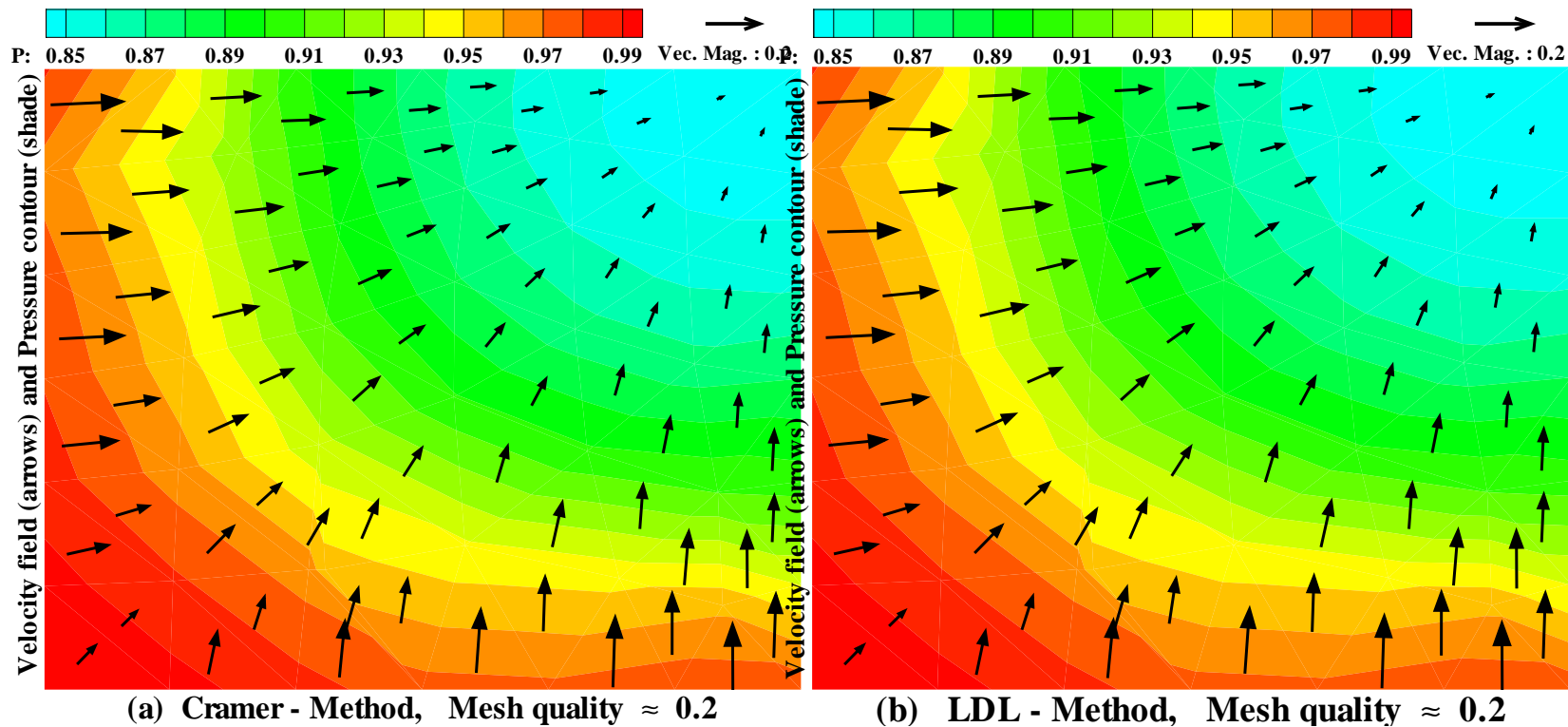
Qualité d'un triangle K

$$Q(K) = 2\sqrt{3} \frac{\rho_K}{h_K}, \quad (Q(K) = 1 \text{ si } K \text{ triangle équilatéral})$$

ρ_K : diamètre de l'élément (côté le plus long)

h_K : rayon du cercle inscrit dans le triangle

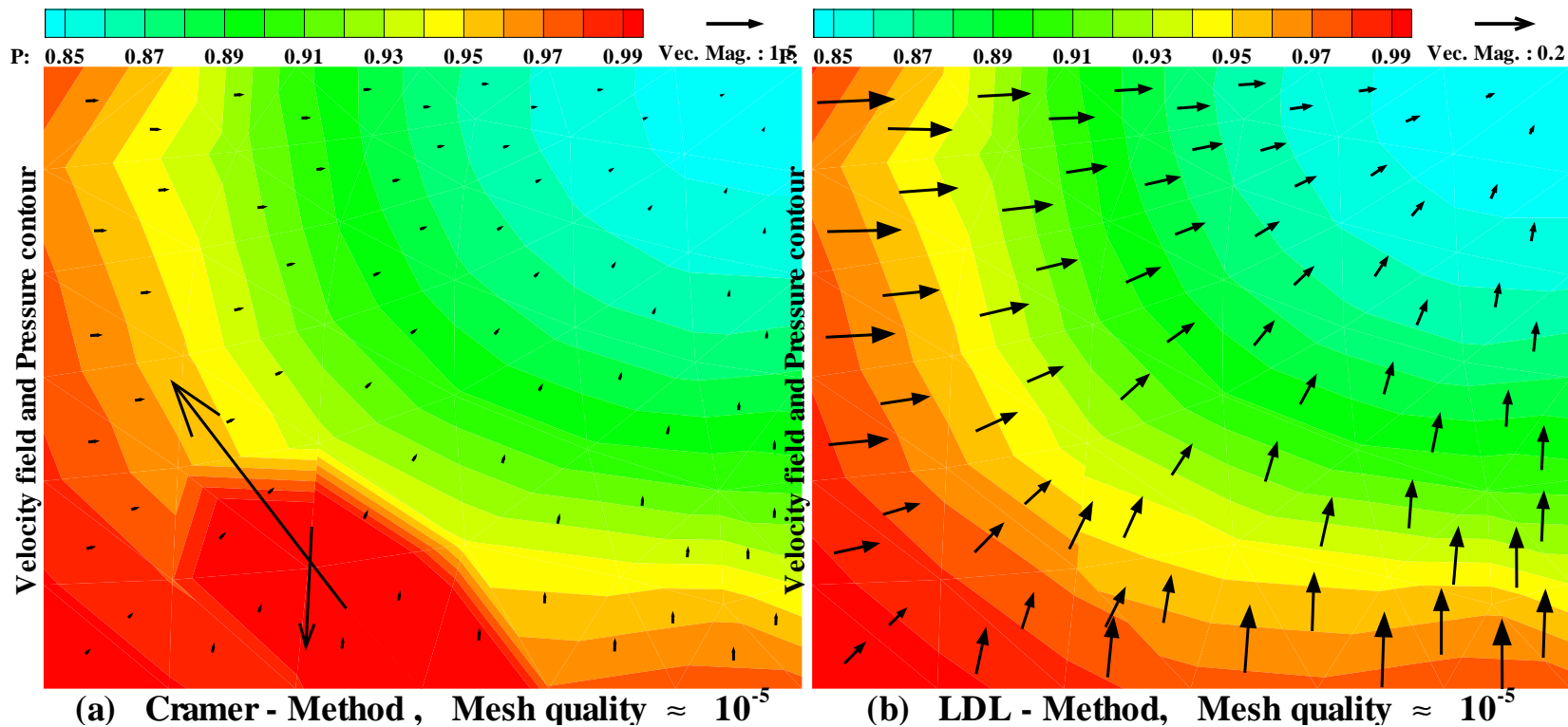
Maillage assez régulier - Cramer et Cholesky



Distribution de charges et champs de vitesse de Darcy

$$Q(K) \approx 0.2$$

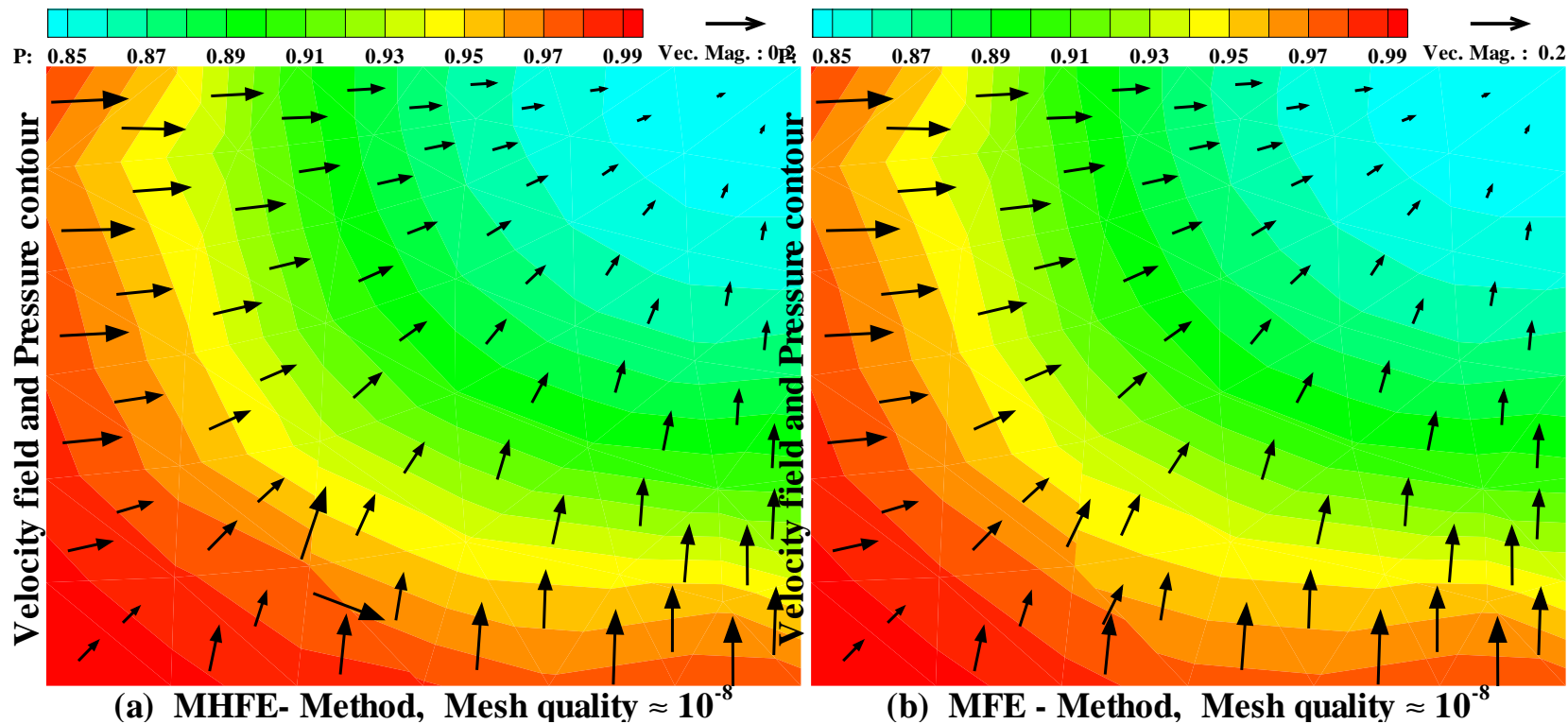
Maillage très irrégulier - Cramer et Cholesky



Distribution de charges et champs de vitesse de Darcy

$$Q(K) \approx 10^{-5}$$

Maillage très irrégulier - EFMH et EFM



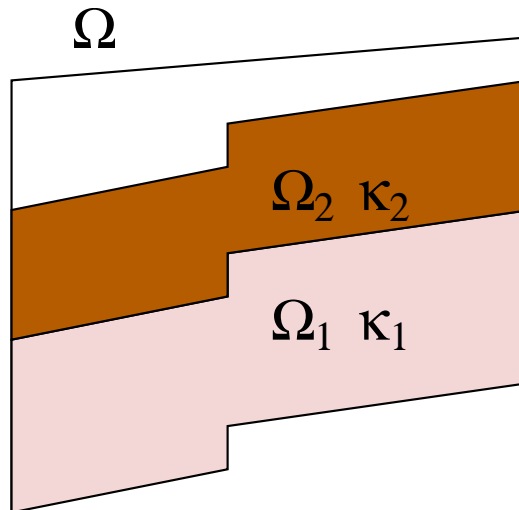
Distribution de charges et champs de vitesse de Darcy

$$Q(K) \approx 10^{-8}, \text{ cond. de la matrice} \approx 10^{15}$$

Effets du contraste de perméabilité

Exemple hétérogène

Domaine Ω décomposé en sous-domaines Ω_i de perméabilité κ_i



$\kappa_2/\kappa_1 \gg 1$: le contraste le plus grand

Modèle hétérogène - Conditionnements des matrices

Régime permanent : $\text{cond}(J)$

EFM et EFMH : $\mathcal{O}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$

Régime transitoire : $\text{cond}(\text{complément de Schur})$

EFMH : $\mathcal{O}\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$

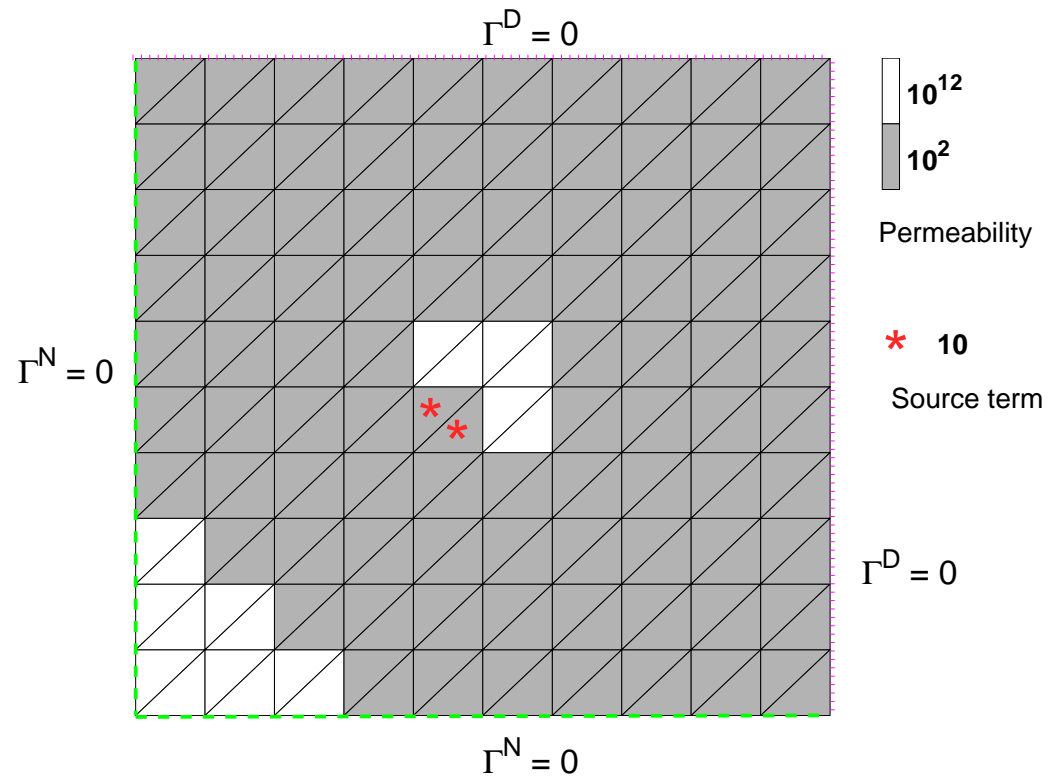
EFM : $\mathcal{O}\left(\max(\kappa_1 h \|S^{-1}\|, \frac{\kappa_2 (1 + \kappa_1 h \|S^{-1}\|)}{\kappa_1 (1 + \kappa_2 h \|S^{-1}\|)})\right)$

Mixte hybride : calcul du flux (permanent et transitoire)

$B_K Q_K = p_K e - T_K$, pour chaque triangle K

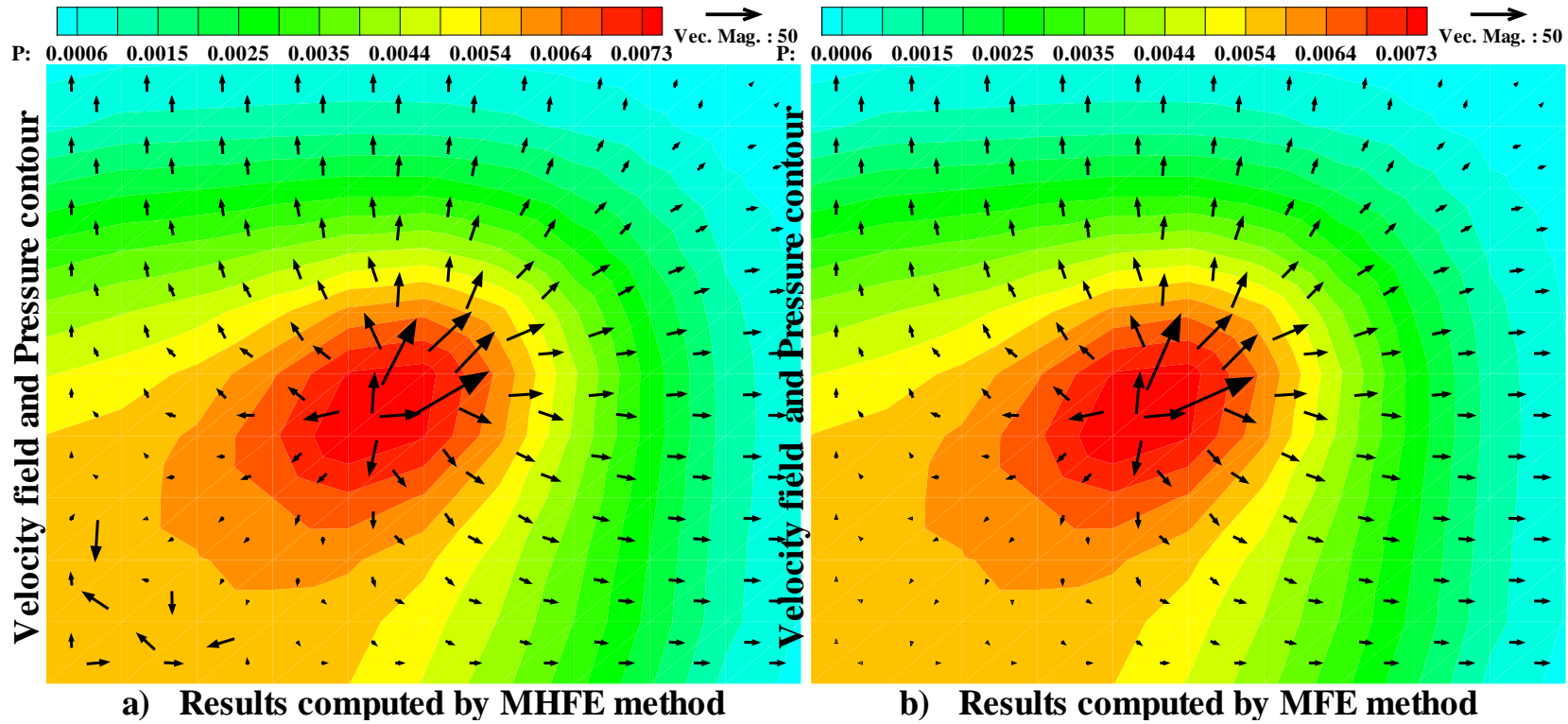
EFMH : $\mathcal{O}\left(\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2\right)$

Test numérique permanent hétérogène

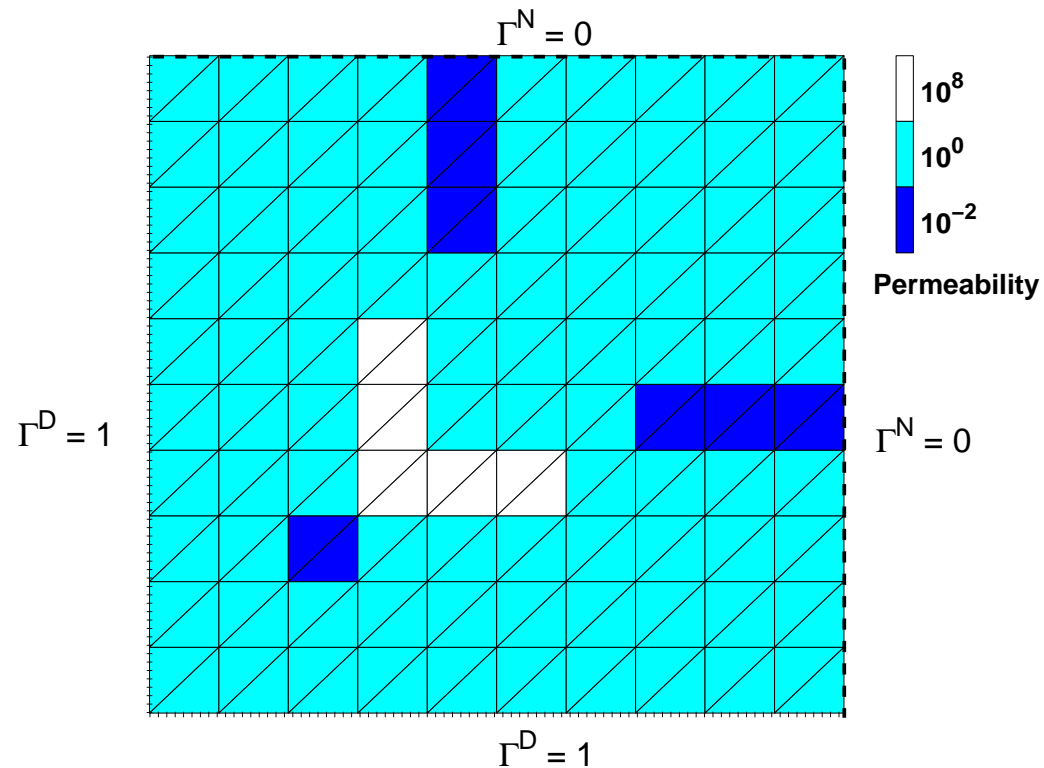


Discrétisation uniforme du domaine

Permanent hétérogène - EFM et EFMH

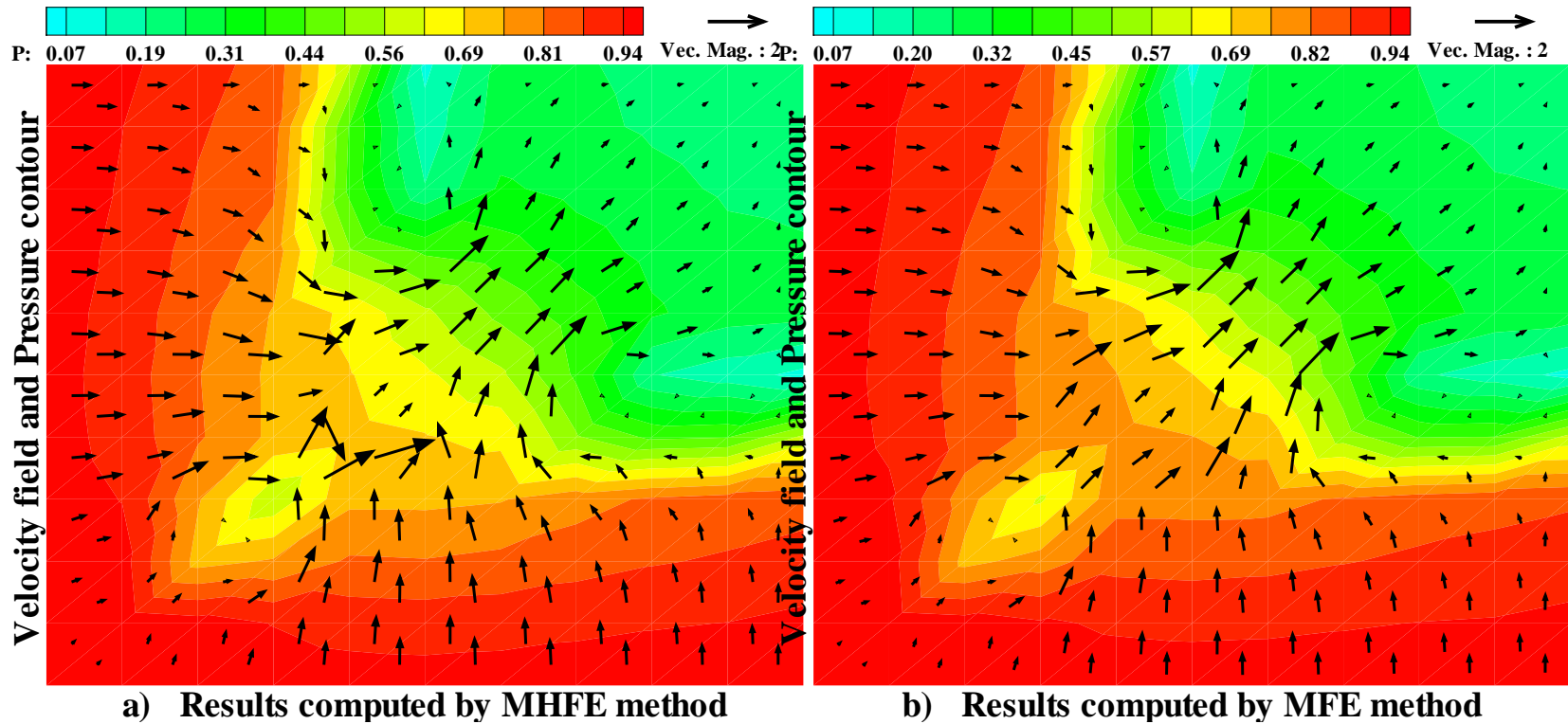


Test numérique transitoire hétérogène



$$T =]0, 1], \Delta t = \frac{1}{10}, s = 1, f = 0$$

Transitoire hétérogène - EFM et EFMH



Transitoire hétérogène - Convergence et temps de calcul

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $h = 1/10$, $s = 1$ PCG solveur

κ_2/κ_1	MHFE			MFE		
	CPU	Cond.	# Iter.	CPU	Cond.	# Iter.
10^2	2.2	10.2×10^2	22–21	1.8	4.3×10^2	33–31
10^4	2.3	10.9×10^4	24–23	2.1	4.2×10^4	42–40
10^6	2.4	10.7×10^6	26–25	2.4	4.5×10^6	55–54

$h = 1/10$, $\kappa = 1$ PCG solveur

Transitoire hétérogène - Convergence et temps de calcul

	MHFE			MFE		
s	CPU	Cond.	# Iter.	CPU	Cond.	# Iter.
10^{-2}	2.2	50.9	20–19	2.4	65.1×10^1	30–29
10^{-4}	2.2	55.1	20–19	3.2	68.3×10^3	51–50
10^{-6}	2.2	55.1	20–19	3.9	68.3×10^5	84–83

Positivité des schémas

Principe du maximum

Principe du maximum continu

$$\begin{aligned}\max_{\Omega \times (0, T]} p(x, t) &\leq \max_{\partial\Omega \times (0, T]} (p(x, t), 0) \\ \min_{\Omega \times (0, T]} p(x, t) &\geq \min_{\partial\Omega \times (0, T]} (p(x, t), 0)\end{aligned}$$

Positivité d'un schéma

$$p_D \geq 0, \quad q_N = 0, \quad p_0 \geq 0, \quad f \geq 0 \Rightarrow p \geq 0$$

Élimination du flux

$$S \frac{dP}{dt} + RM^{-1}R^T P = F + RM^{-1}V$$

Solution exacte

$$P(t) = e^{-tRM^{-1}R^T} P_0 + P_1$$

Condition suffisante pour que le schéma soit positif

$$(RM^{-1}R^T)_{K,K'} \leq 0, \quad K \neq K'$$

Élimination des traces de pression

$$S \frac{dP}{dt} + (D - RM^{-1}R^T)P = F + RM^{-1}V$$

Solution exacte

$$P(t) = e^{-t(D - RM^{-1}R^T)} P_0 + P_1$$

Condition suffisante

$$(RM^{-1}R^T)_{K,K'} \geq 0, \quad K \neq K'$$

$$M_{E,E'} \leq 0, \quad E' \neq E \quad \text{et} \quad R_{K,E} \geq 0$$

Positivité EFM et EFMH

Cas particulier

B_K est diagonal pour tout K (alors M diagonal)

Condensation de masse sur un maillage régulier
et tenseur de perméabilité diagonal

⇒ principe du maximum discret respecté

Élimination de la pression P

$$\begin{aligned}N &= R^T (S + hD)^{-1} R \\(M - hN)T^{n+1} &= R^T (S + hD)^{-1} (SP^n + hF^{n+1}) + V^{n+1} \\P^{n+1} &= (S + hD)^{-1} (SP^n + hRT^{n+1} + hF^{n+1})\end{aligned}$$

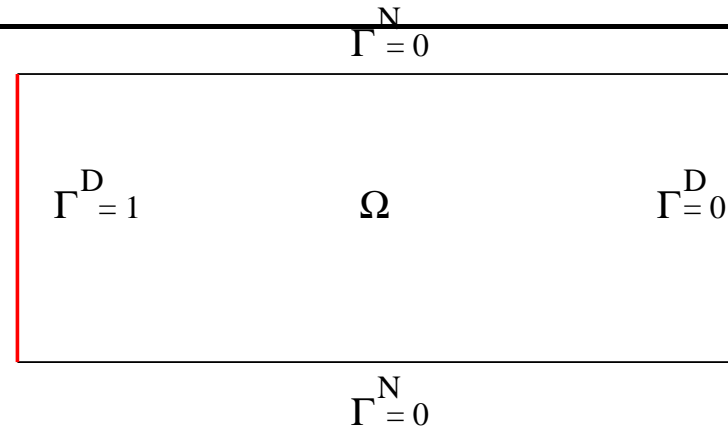
Condition suffisante

$$(M - hN)_{E,E'} \leq 0, \quad E \neq E' \text{ et } R \geq 0$$

Condition du type $h \geq C \times (\Delta x)^2$

Test transitoire de la positivité

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ u = -\nabla p & \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ p(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

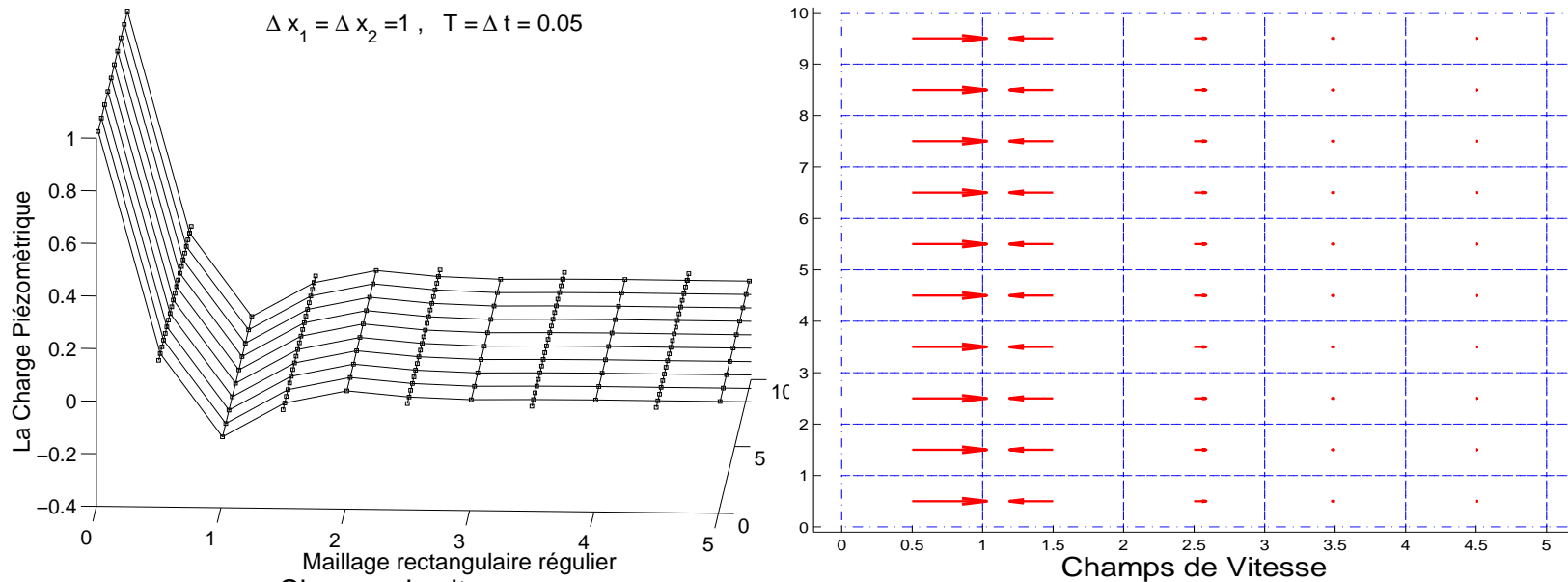


Domaine Ω et conditions aux limites

solution analytique sur un domaine suffisamment long

$$p(x, t) = p_D \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad (x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty),$$
$$\operatorname{erfc}(\nu) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\nu e^{-x^2} dx, \quad \nu \in \mathbb{R}$$

Transitoire mixte hybride - schéma non positif



Pression négative et vitesse inversée

Transitoire - exact, mixte hybride et différences finies

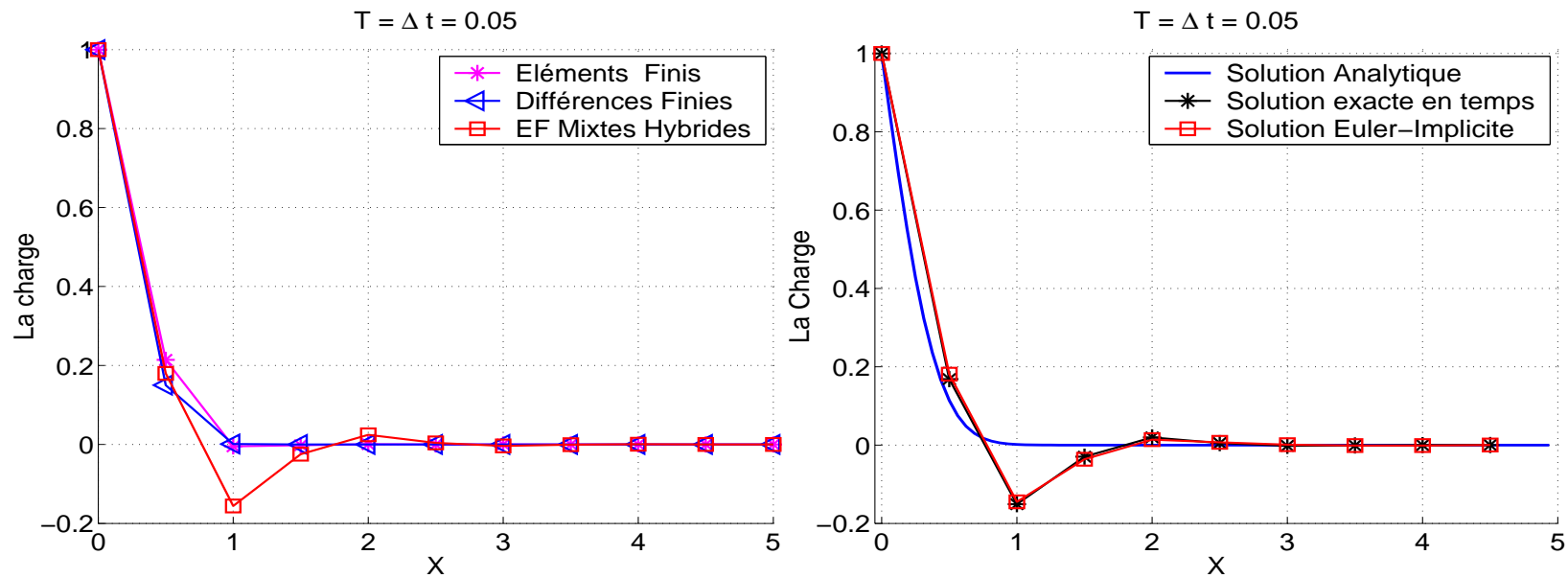
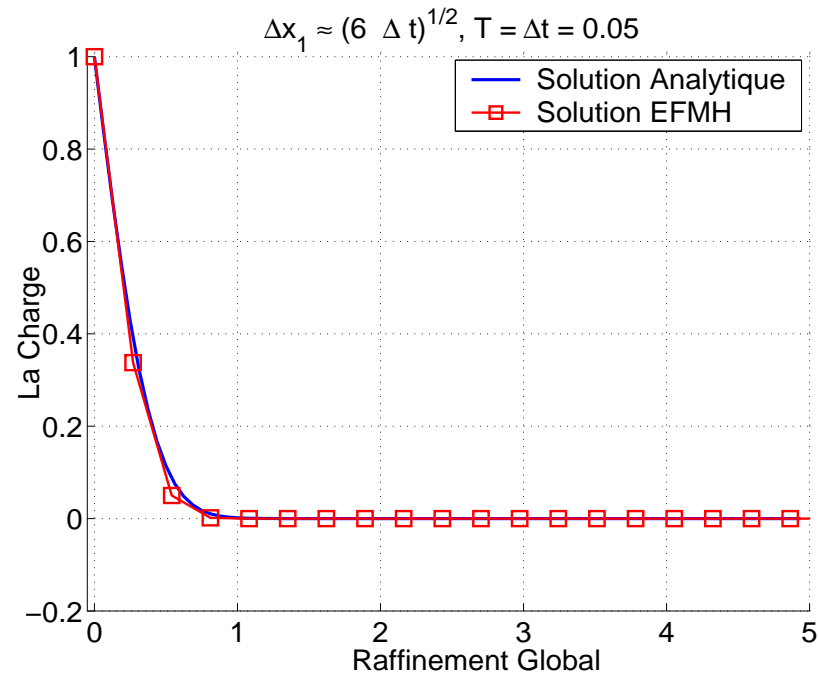


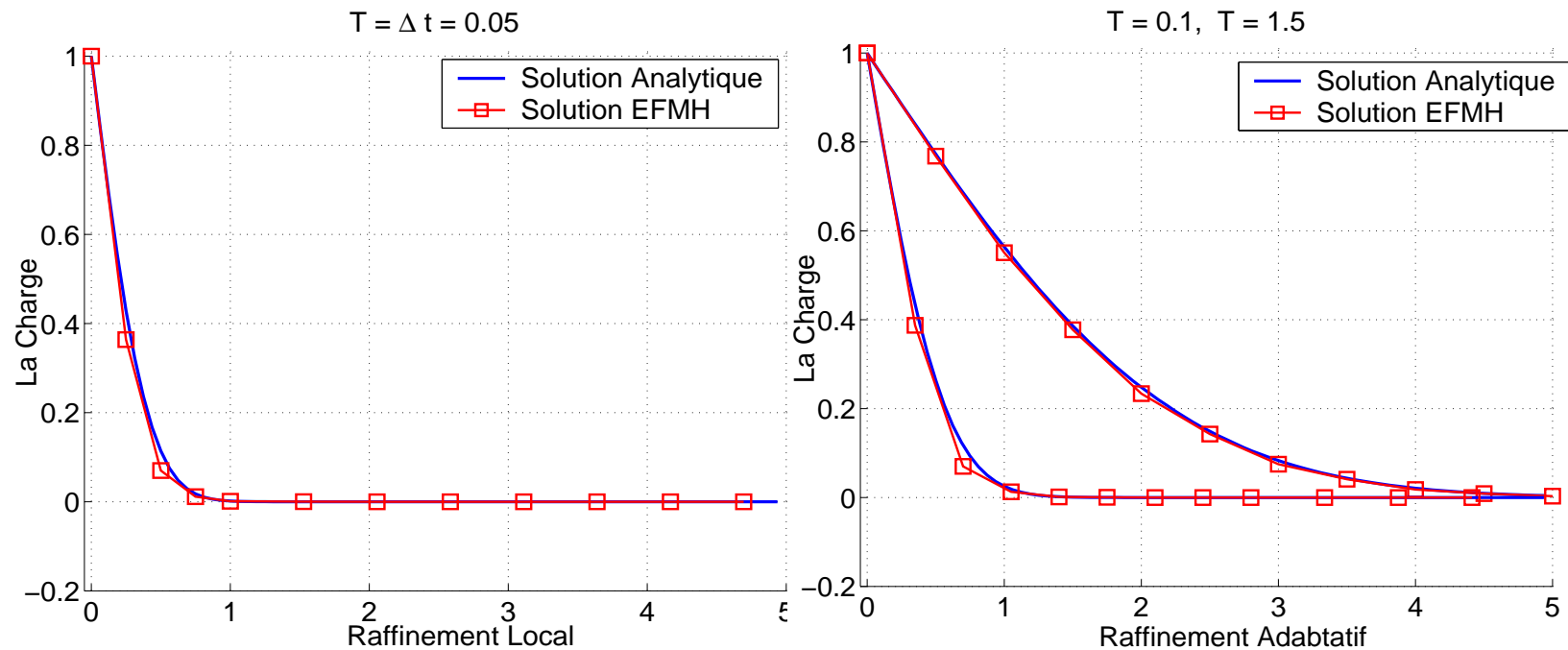
Schéma mixte non positif - Schémas DF et EF positifs

Transitoire - EFMH - raffinement global



Condition de positivité avec Euler implicite

Transitoire - EFMH - raffinement local



Raffinement local dans les endroits de grands gradients

Conclusion

Comparaison Mixte et Mixte Hybride

- ▶ EFM plus précis que EFMH sur maillage irrégulier
- ▶ EFM plus précis que EFMH avec contraste de perméabilité
- ▶ résolution EFMH plus facile en régime permanent
- ▶ résolution EFMH plus facile avec emmagasinement faible
- ▶ EFM et EFMH en général non positifs
- ▶ EFM et EFMH positifs avec maillage régulier et condensation de masse
- ▶ EFMH avec Euler implicite conditionnellement positif

Perspectives

- ▶ Utilisation de solveurs linéaires
- ▶ Utilisation de solveurs en temps
- ▶ Préconditionnement pour matrice symétrique indéfinie
- ▶ Condition de positivité pour Mixte avec Euler implicite