

---

Intrusion d'eau salée  
couplage écoulement-transport

J. Erhel - INRIA-RENNES

Projet Hydrogrid

Chaire UNESCO - TUNIS

Mars 2004

# Modèle d'écoulement avec densité variable

---

Conservation de la masse du fluide

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \vec{V}) = \rho Q_S$$

Loi de Darcy généralisée

$$\varepsilon \vec{V} = -\frac{1}{\mu} \mathbb{K} (\nabla P + \rho g \vec{n}_z)$$

- $\varepsilon$  : porosité
- $\rho$  : densité du fluide
- $\vec{V}$  : vitesse de Darcy
- $Q_S$  : terme source
- $\mathbb{K}$  : tenseur de perméabilité
- $P$  : pression
- $\mu$  : mobilité
- $g$  : gravité

# Écoulement avec densité variable

---

## Équations d'état

$$\varepsilon = \varepsilon(P), \quad \rho = \rho(P, C), \quad \mu = \mu(C),$$
$$S = \frac{\partial \varepsilon}{\partial P} + \frac{\varepsilon \partial \rho}{\rho \partial P} = (1 - \varepsilon) \alpha + \varepsilon \beta$$

- $C$  : concentration de sel (fraction)
- $S$  : emmagasinement

## Conservation de la masse

$$\rho S \frac{\partial P}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \vec{V}) = \rho Q_S.$$

$\alpha \simeq 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ ,  $\beta \simeq 10^{-7}$  à  $10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$ , donc  $S \ll 1$

# Modèle de transport

---

Conservation de la masse de sel

$$\varepsilon\rho\frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon\rho\vec{V}\cdot\nabla C = \nabla\cdot(\varepsilon\rho\mathbf{D}(\vec{V})\nabla C),$$

$$\mathbf{D}(\vec{V}) = D_m I + (\alpha_L - \alpha_T) \frac{\vec{V} \otimes \vec{V}}{|\vec{V}|} + \alpha_T |\vec{V}| I : \text{tenseur de dispersion}$$

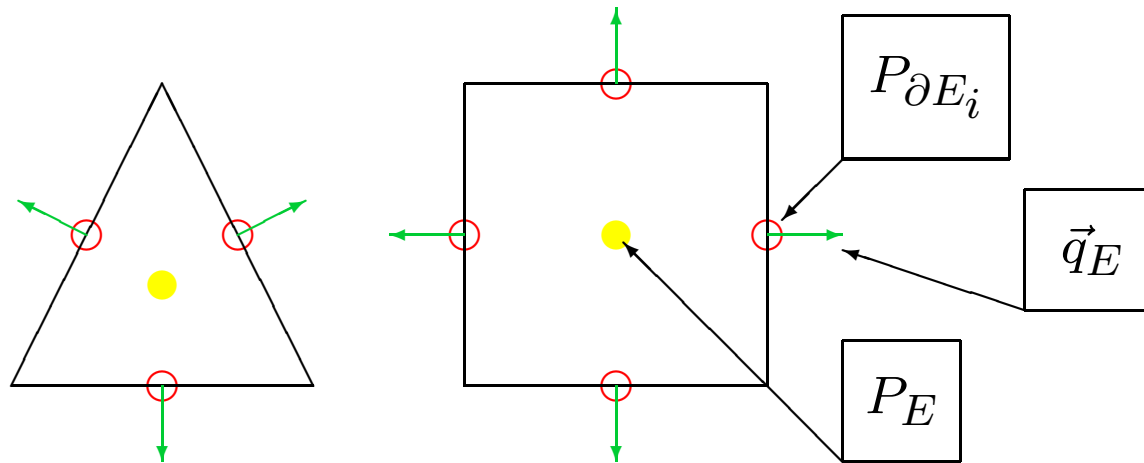
- $D_m$  : diffusion moléculaire
- $\alpha_L$  (resp.  $\alpha_T$ ) : dispersivité longitudinale (resp. transverse)

Si  $\alpha_L = \alpha_T = 0$  alors  $\mathbf{D} = D_m I$  est constant

# Discretisation spatiale de l'écoulement

## Eléments Finis Mixtes : élément de Raviart Thomas

$$\int_{\partial E_j} \vec{w}_i \cdot \vec{n}_{\partial E_j} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \int_E \nabla \cdot \vec{w}_i = 1.$$



↑ DOF  $\vec{q}_E = \sum_{\partial E_j \subset \partial E} Q_j \vec{w}_j$      
 • DOF for  $P_E$      
 ○ DOF for  $P_{\partial E_i}$

# Écoulement avec éléments finis mixtes

---

$$\begin{cases} A_1 \frac{dP}{dt} + A_2 \frac{dC}{dt} + N_q Q = F_1 \\ R_q^T P - M_q Q = F_2 \end{cases}$$

$P$  : charges moyennes sur les mailles (ordre  $nm$ )

$Q$  : flux à travers les facettes (ordre  $nf$ )

$F_1$  : source, CL et terme en  $\rho g n_z$  (ordre  $nm$ )

$F_2$  : CL et terme en  $\rho g n_z$  (ordre  $nf$ )

$A_1$  : matrice diagonale d'ordre  $nm$

$A_2$  : matrice diagonale d'ordre  $nm$

$N_q$  : matrice creuse de dimensions  $nm \times nf$

$R_q$  : matrice creuse de dimensions  $nm \times nf$

$M_q$  : matrice creuse d'ordre  $nf$

# Écoulement avec éléments finis mixtes

---

## Matrices élémentaires

$$a_K = (\mathbb{K}/\mu)_K, B_{K,i,j} = \int_K a_K^{-1} \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j,$$
$$\nu_{K,E} = \pm 1, \tilde{B}_{K,i,j} = \nu_{K,E} \nu_{K,E'} B_{K,i,j}, E = \partial K_i, E' = \partial K_j$$

## Matrices creuses

$$A_{1,K} = S_K \rho_K,$$
$$A_{2,K} = \varepsilon_K (\partial \rho / \partial C)_K,$$
$$M_{q,E,E'} = \tilde{B}_{K,i,j}, E \neq E', E = \partial K_i, E' = \partial K_j,$$
$$M_{q,E,E} = \tilde{B}_{K,i,i} + \tilde{B}_{K',i,i}, E = \partial K_i = \partial K'_i,$$
$$R_{q,K,E} = \nu_{K,E},$$
$$N_{q,K,E} = \rho_{K,E} \nu_{K,E}$$

# Écoulement avec éléments finis mixtes hybrides

---

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{dP}{dt} + A_2 \frac{dC}{dt} + \Delta_p P - N_p T = F_1 \\ R_p^T P - M_p T = F_2 \\ \vec{V} = \vec{Q}(P, T) / \varepsilon \end{array} \right.$$

$P$  : charges moyennes sur les mailles (ordre  $nm$ )

$T$  : charges à travers les facettes (ordre  $nf$ )

$F_1$  : source, CL et terme en  $\rho g n_z$  (ordre  $nm$ )

$F_2$  : CL et terme en  $\rho g n_z$  (ordre  $nf$ )

$A_1$  : matrice diagonale d'ordre  $nm$

$A_2$  : matrice diagonale d'ordre  $nm$

$\Delta_p$  : matrice diagonale d'ordre  $nm$

$N_p$  : matrice creuse de dimensions  $nm \times nf$

$R_p$  : matrice creuse de dimensions  $nm \times nf$

$M_p$  : matrice creuse d'ordre  $nf$



## Matrices élémentaires

$$a_K = (\mathbb{K}/\mu)_K, B_{K,i,j} = \int_K a_K^{-1} \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j,$$
$$\tilde{B}_K = B_K^{-1}, \alpha_{K,i} = \sum_j \tilde{B}_{K,i,j}.$$

## Matrices creuses

$$A_{1,K} = S_K \rho_K,$$
$$A_{2,K} = \varepsilon_K (\partial \rho / \partial C)_K,$$
$$M_{p,E,E'} = \tilde{B}_{K,i,j}, E \neq E', E = \partial K_i, E' = \partial K_j,$$
$$M_{p,E,E} = \tilde{B}_{K,i,i} + \tilde{B}_{K',i,i}, E = \partial K_i = \partial K'_i,$$
$$R_{p,K,E} = \alpha_{K,i}, E = \partial K_i$$
$$N_{p,K,E} = \sum_j \rho_{K,j} \tilde{B}_{K,i,j}, E = \partial K_i,$$
$$\Delta_{p,K} = \sum_i \rho_{K,i} \alpha_{K,i}$$

# Écoulement avec Euler implicite - un pas de temps

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{n+1} = \rho(\bar{C}^{n+1}), \mu^{n+1} = \mu(\bar{C}^{n+1}) \\ A_1(\rho^{n+1}) \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} + A_2(\varepsilon^{n+1}) \frac{\bar{C}^{n+1} - \bar{C}^n}{\Delta t} + \dots \\ \Delta_p(\rho^{n+1}) P^{n+1} - N_p(\rho^{n+1}) T = F_1(\rho^{n+1}) \\ R_p^T P^{n+1} - M_p T = F_2(\rho^{n+1}) \\ \varepsilon^{n+1} = \varepsilon(P^{n+1}), \vec{V}^{n+1} = \\ \text{vec} Q(P^{n+1}, T) / \varepsilon^{n+1} \end{array} \right.$$

## Écoulement - cas particulier

---

cas  $\alpha = \beta = S = 0$  ( $\varepsilon$  constant) et  $\partial\rho/\partial C = a_\rho$  et  $\mu$  constant

$$\rho^{n+1} = \rho_0 + a_\rho \bar{C}^{n+1}$$

$$A_2 \frac{\bar{C}^{n+1} - \bar{C}^n}{\Delta t} + \Delta_p(\rho^{n+1})P^{n+1} - N_p(\rho^{n+1})T = F_1(\rho^{n+1})$$

$$R_p^T P^{n+1} - M_p T = F_2(\rho^{n+1})$$

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{Q}(P^{n+1}, T)/\varepsilon$$

## Transport - un pas de temps

---

$$C_K = C_K^n + \Delta t \mathcal{A}(C_K^n, \vec{V}^{n+1})$$

$$C_K^* = \mathcal{L}(C_K), \quad \bar{C}_K^* = \frac{1}{|K|} \int_K C_K^* dx$$

$$D^{n+1} = D(\vec{V}^{n+1})$$

$$\frac{\bar{C}^{n+1} - \bar{C}^*}{\Delta t} + \Delta_c(D^{n+1})\bar{C}^{n+1} - R_c(D^{n+1})X = G_1$$

$$R_c^T(D^{n+1})\bar{C}^{n+1} - M_c(D^{n+1})X = G_2$$

$$C_K^{n+1} = C_K^n + \bar{C}_K^{n+1} - \bar{C}_K^n$$

# Couplage écoulement-transport - un pas de temps

---

$$\left\{ \begin{array}{l} C^* = bconv(\vec{V}^{n+1}, C^n) \\ D^{n+1} = Dis(\vec{V}^{n+1}) \\ Adis(D^{n+1})C^{n+1} = bdis(C^*, D^{n+1}) \\ \rho^{n+1} = Den(C^{n+1}) \\ Aflow(\rho^{n+1})P^{n+1} = bflow(\rho^{n+1}, C^{n+1}, C^n, P^n) \\ \vec{V}^{n+1} = Vel(P^{n+1}) \end{array} \right.$$

Systeme d'equations non lineaires

# Couplage - point fixe

---

## Boucle de point fixe

### Transport

$$\begin{cases} C^* = bconv(\vec{V}^{n+1,k}, C^n) \\ D^{n+1,k+1} = Dis(\vec{V}^{n+1,k}) \\ Adis(D^{n+1,k+1})C^{n+1,k+1} = bdis(C^*, D^{n+1,k+1}) \end{cases}$$

### Ecoulement

$$\begin{cases} \rho^{n+1,k+1} = Den(C^{n+1,k+1}) \\ Aflow(\rho^{n+1,k+1})P^{n+1,k+1} = bflow(\rho^{n+1,k+1}, C^{n+1,k+1}, C^n, P^n) \\ \vec{V}^{n+1,k+1} = Vel(P^{n+1,k+1}) \end{cases}$$

# Écoulement mixte hybride - système linéaire

---

Système avec  $(P, T)$

$$\begin{pmatrix} 1/\Delta t A_1(\rho) + \Delta_p(\rho) & -N_p(\rho) \\ R_p^T & -M_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1(\rho, \Delta t) \\ F_2(\rho) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Système non symétrique d'ordre  $nm + nf$

Système avec  $T$

$$\begin{aligned} & (-M_p + R_p^T (1/\Delta t A_1(\rho) + \Delta_p(\rho))^{-1} N_p(\rho)) T = \\ & F_2(\rho) - R_p^T (1/\Delta t A_1(\rho) + \Delta_p(\rho))^{-1} \tilde{F}_1(\rho, \Delta t) \end{aligned} \quad (2)$$

Système non symétrique d'ordre  $nf$

Systeme avec  $(C, X)$

$$\begin{pmatrix} 1/\Delta t I + \Delta_c(D) & -R_c(D) \\ R_c^T(D) & -M_c(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1(\Delta t) \\ G_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Systeme symétrique d'ordre  $nm + nf$

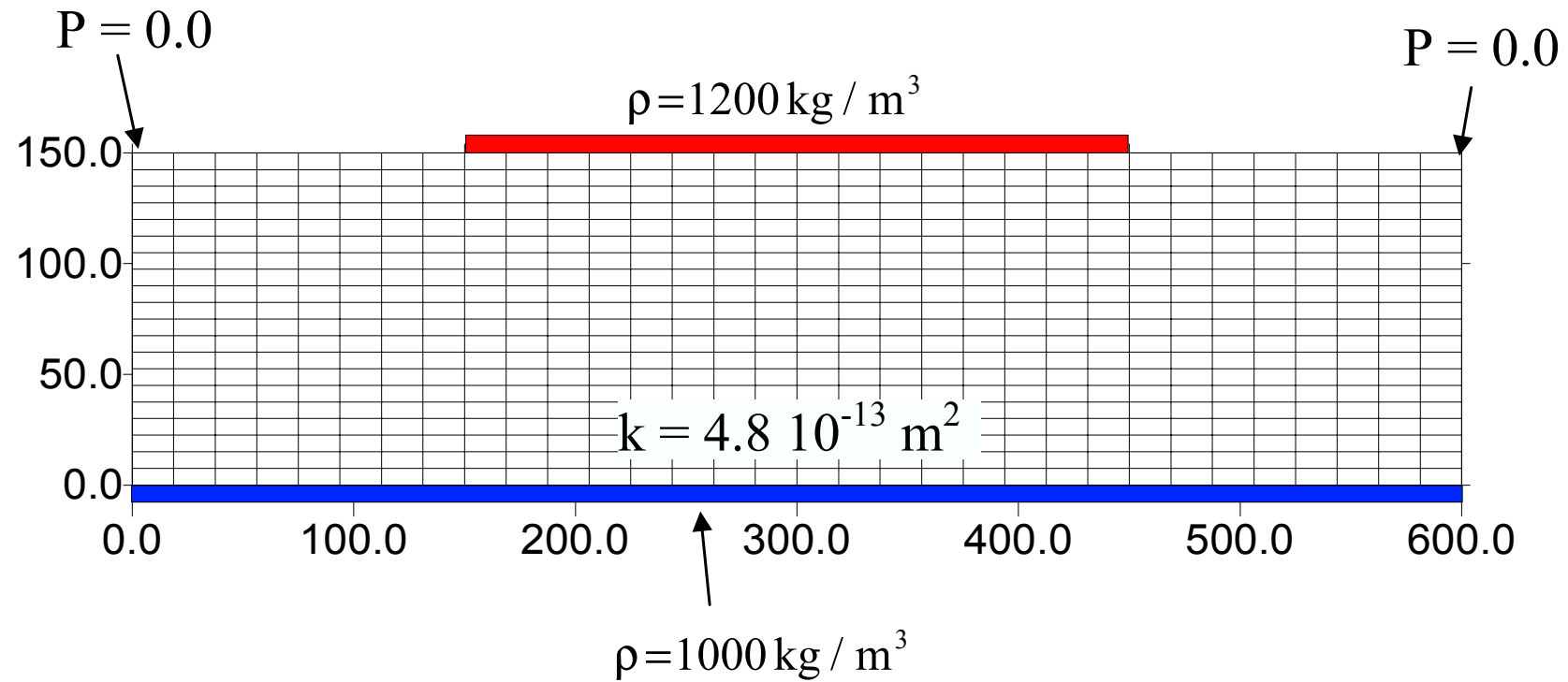
Systeme avec  $X$

$$\begin{aligned} & (-M_c(D) + R_c^T(D)(1/\Delta t I + \Delta_c(D))^{-1}R_c(D))X = \\ & G_2 - R_c^T(D)(1/\Delta t I + \Delta_c(D))^{-1}\tilde{G}_1(\Delta t) \end{aligned} \quad (4)$$

Systeme symétrique d'ordre  $nf$



# Cas test de Elder - géométrie



## Cas test de Elder - données

---

paramètre	valeur
perméabilité	$k_x = k_y = 4.845 \cdot 10^{-13} (m^2)$
emmagasinement	$S = 0$
porosité	$\varepsilon = 0.1 (-)$
dispersivité	$\alpha_L = \alpha_T = 0 (m)$
diffusion moléculaire	$D_m = 1.889 \cdot 10^{-6} (m^2 s^{-1})$
viscosité	$\mu = 10^{-3} (Pa s^{-1})$
densité	$\rho = \rho_0 + 200C$

# Cas test de Elder - convergence

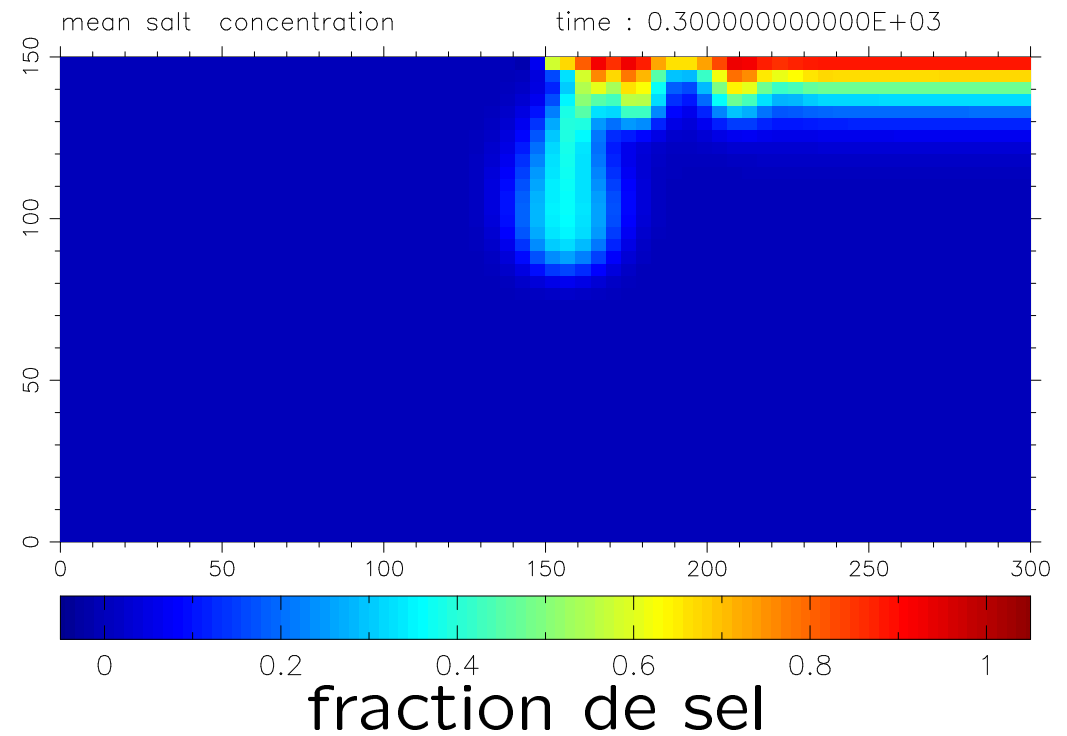
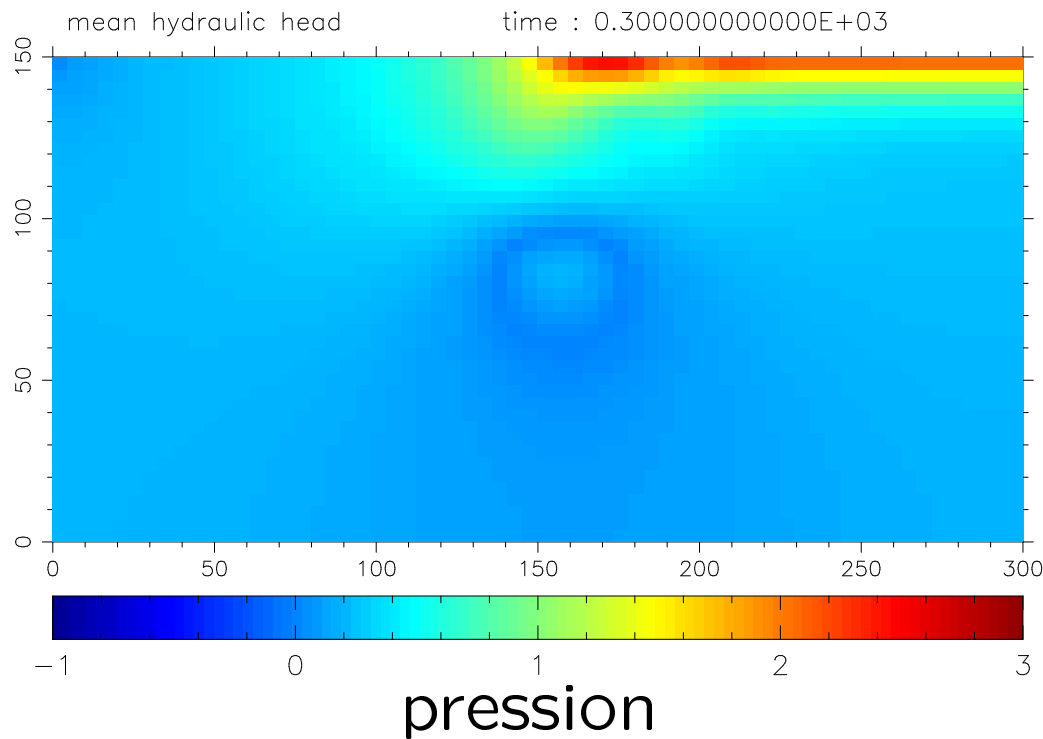
---

## Maillages et pas de temps

maillage	pas de temps	niter
32x20	2.	9
64x40	1.	8
128x80	0.5	8
256x160	0.1	7
512x320	0.01	6

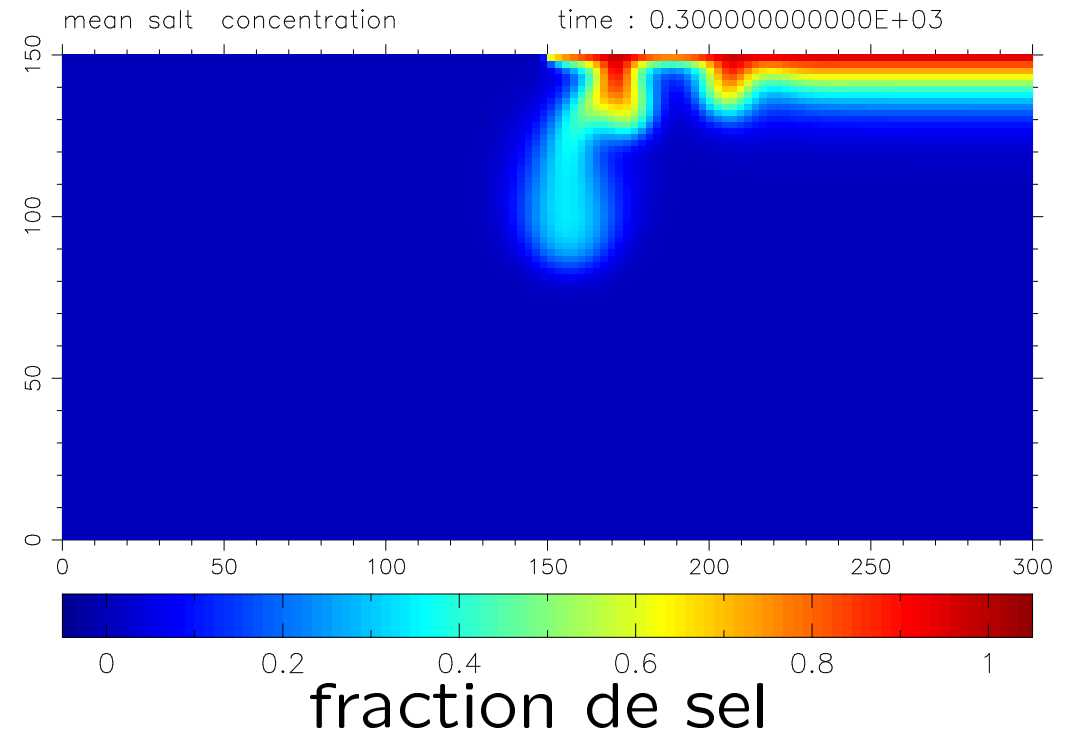
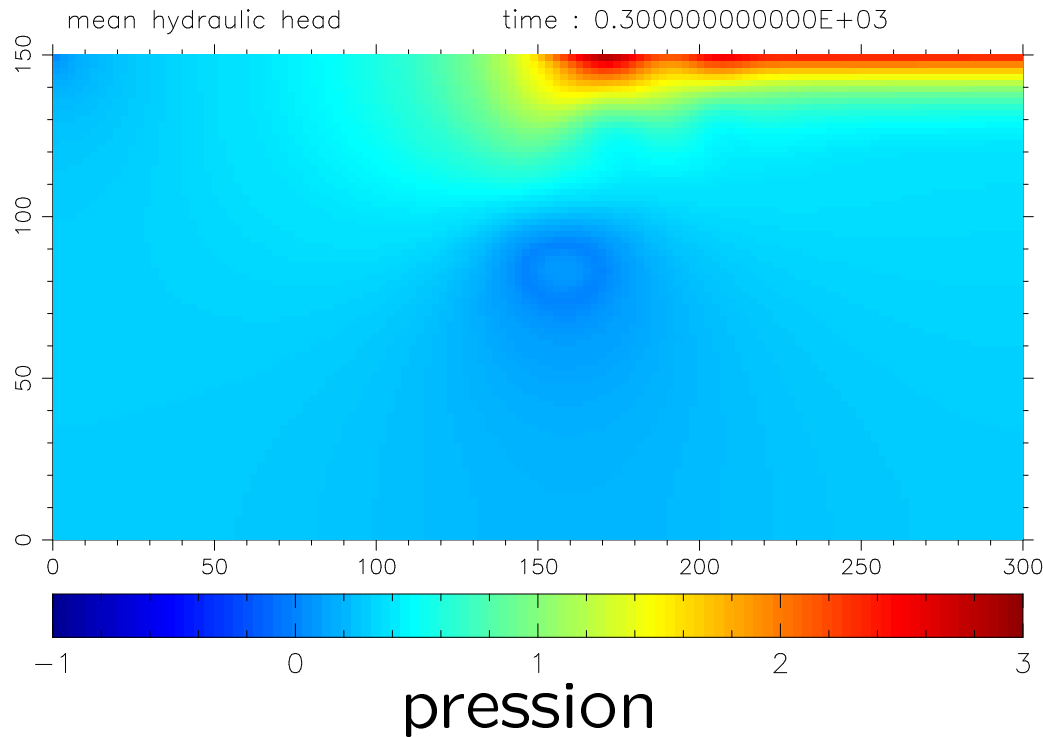
$\Delta t = 1$  équivaut à  $t = 45.3$  heures

# Cas test de Elder - résultats



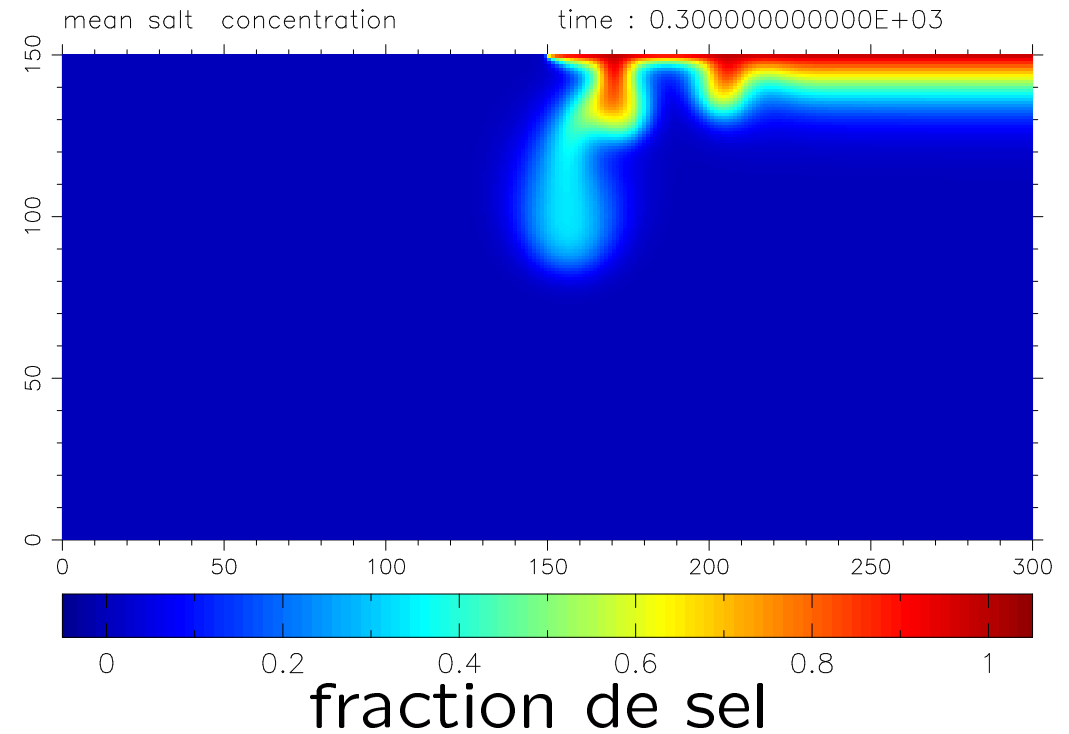
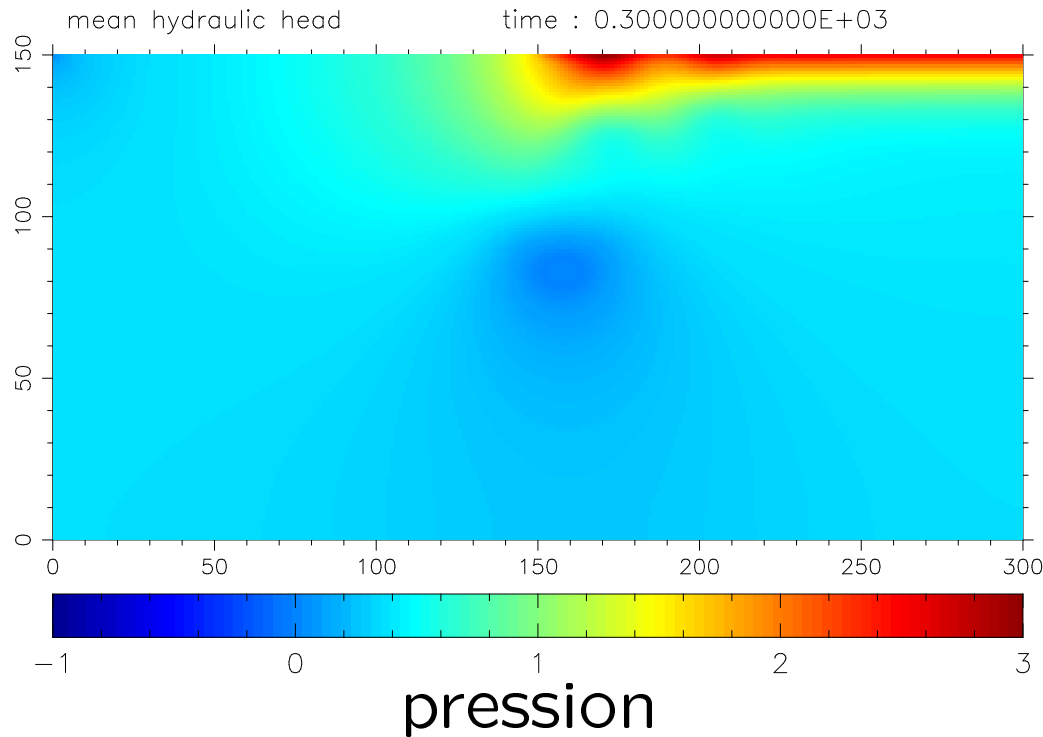
$t = 566$  jours - Maillage  $64 \times 40$

# Cas test de Elder - résultats



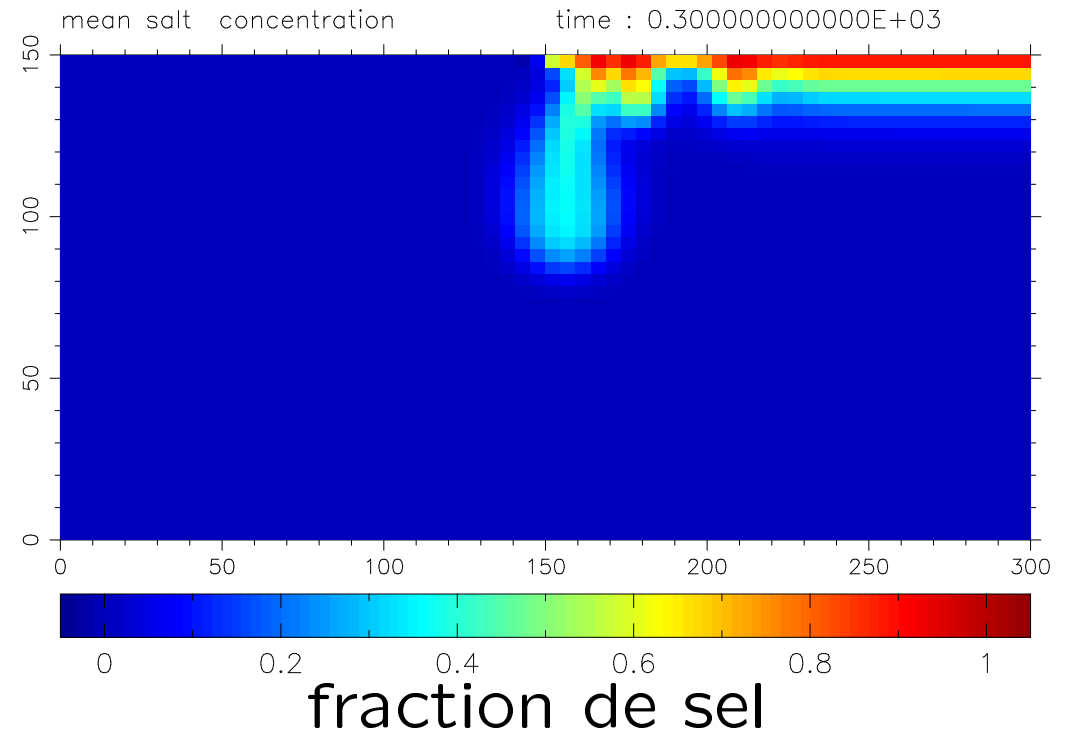
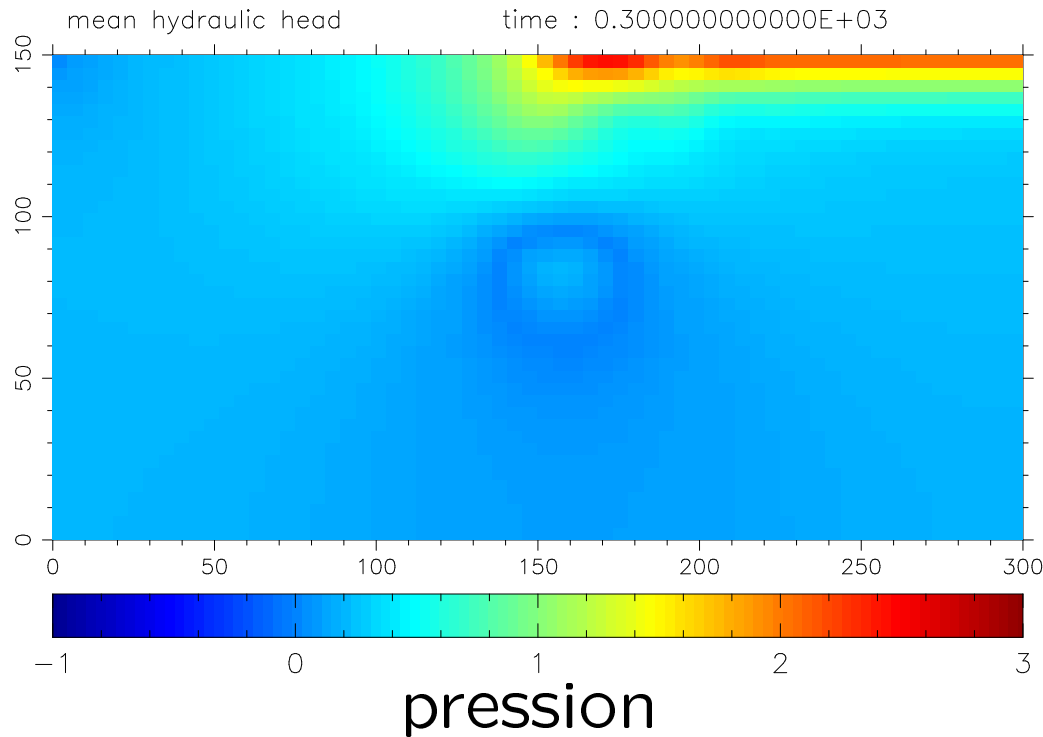
$t = 566$  jours - Maillage  $128 \times 80$

# Cas test de Elder - résultats



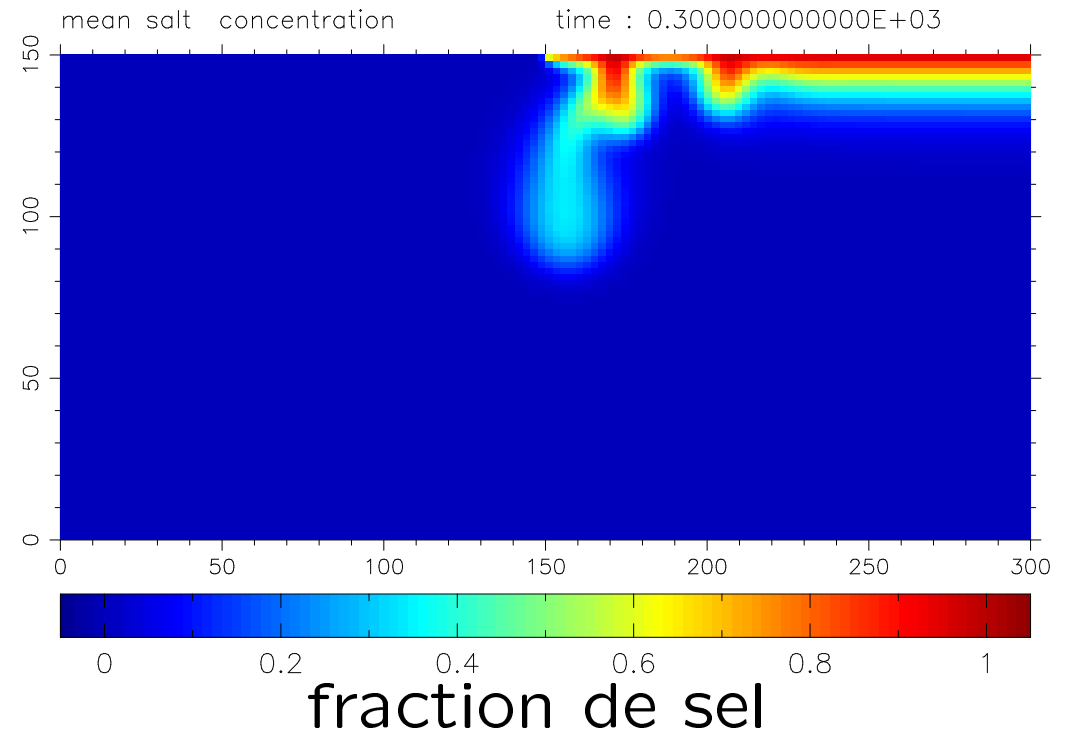
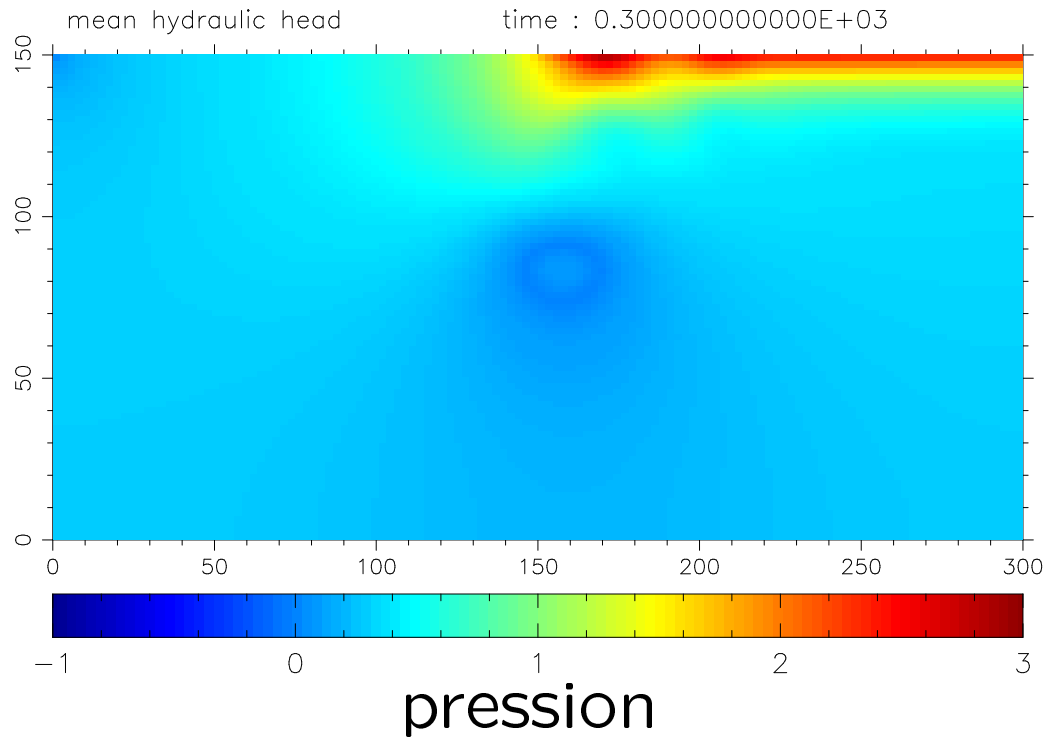
$t = 566$  jours - Maillage  $256 \times 160$

# Cas test de Elder - résultats



$t = 1132$  jours - Maillage  $64 \times 40$

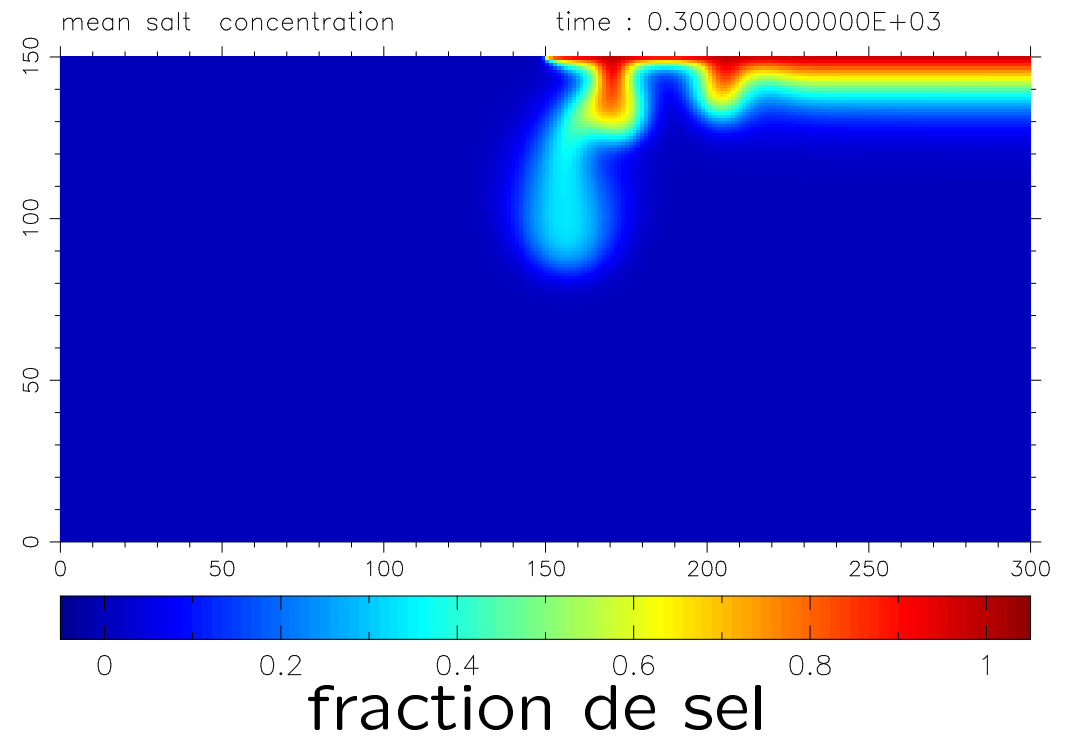
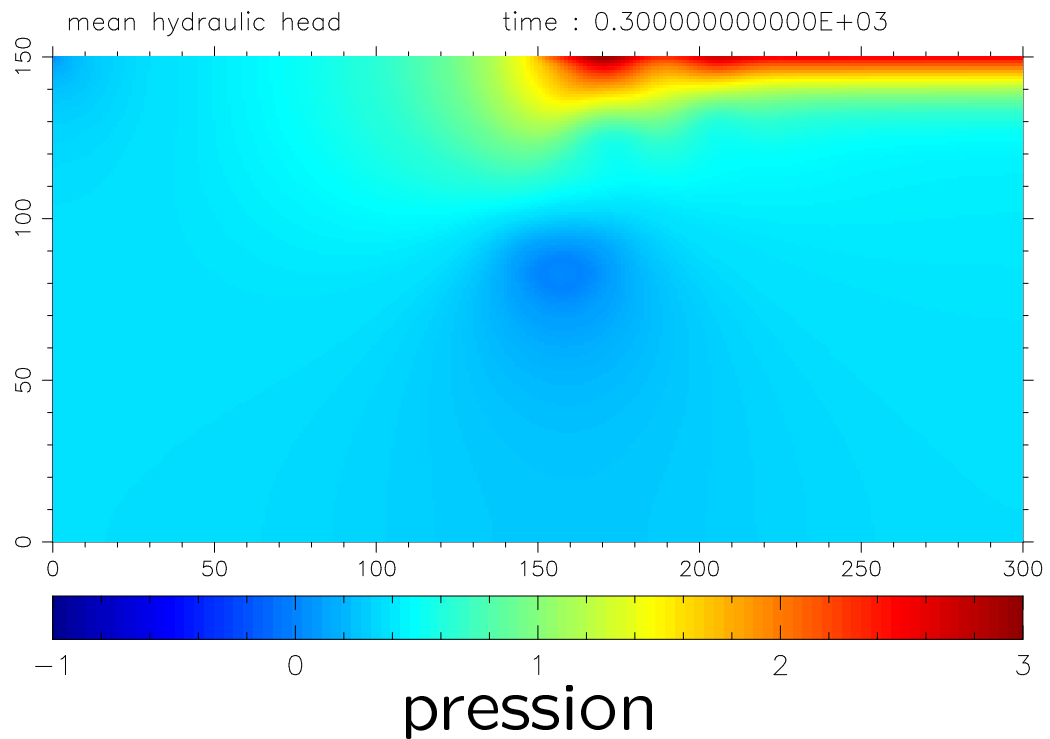
# Cas test de Elder - résultats



$t = 1132$  jours - Maillage  $128 \times 80$



# Cas test de Elder - résultats



$t = 1132$  jours - Maillage  $256 \times 160$

# Cas test de Elder - écoulement - solveur linéaire

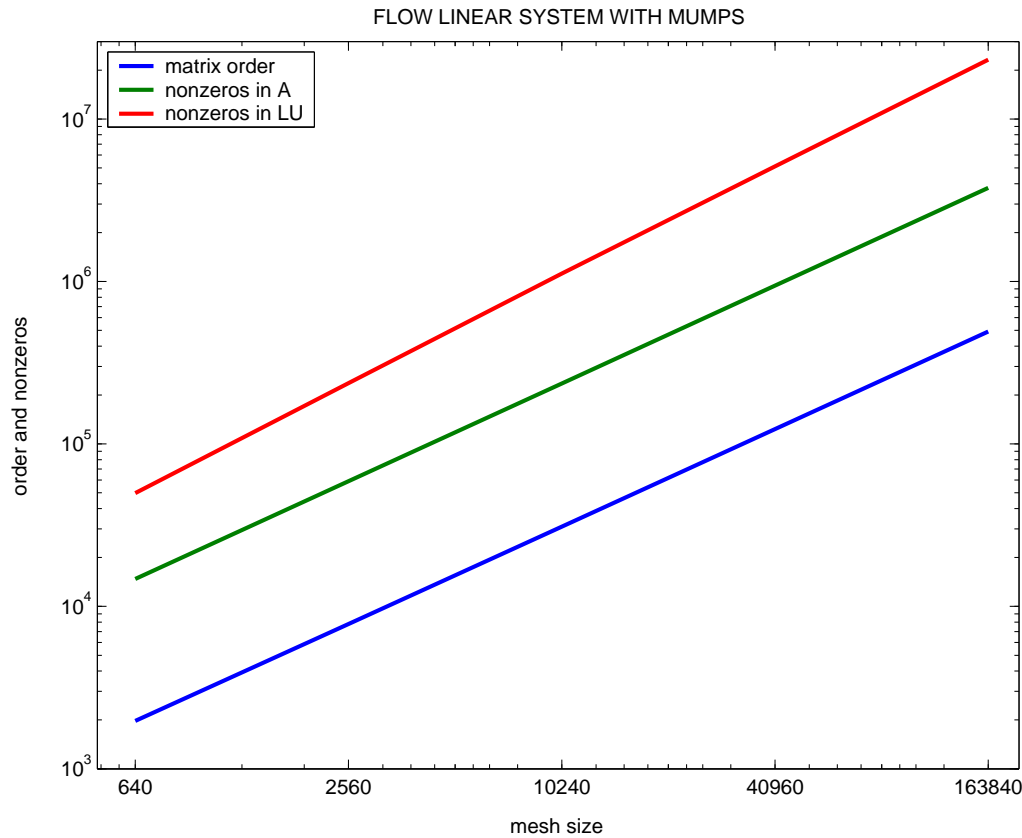
---

Maillage  $64 \times 40$  - temps CPU (ms)

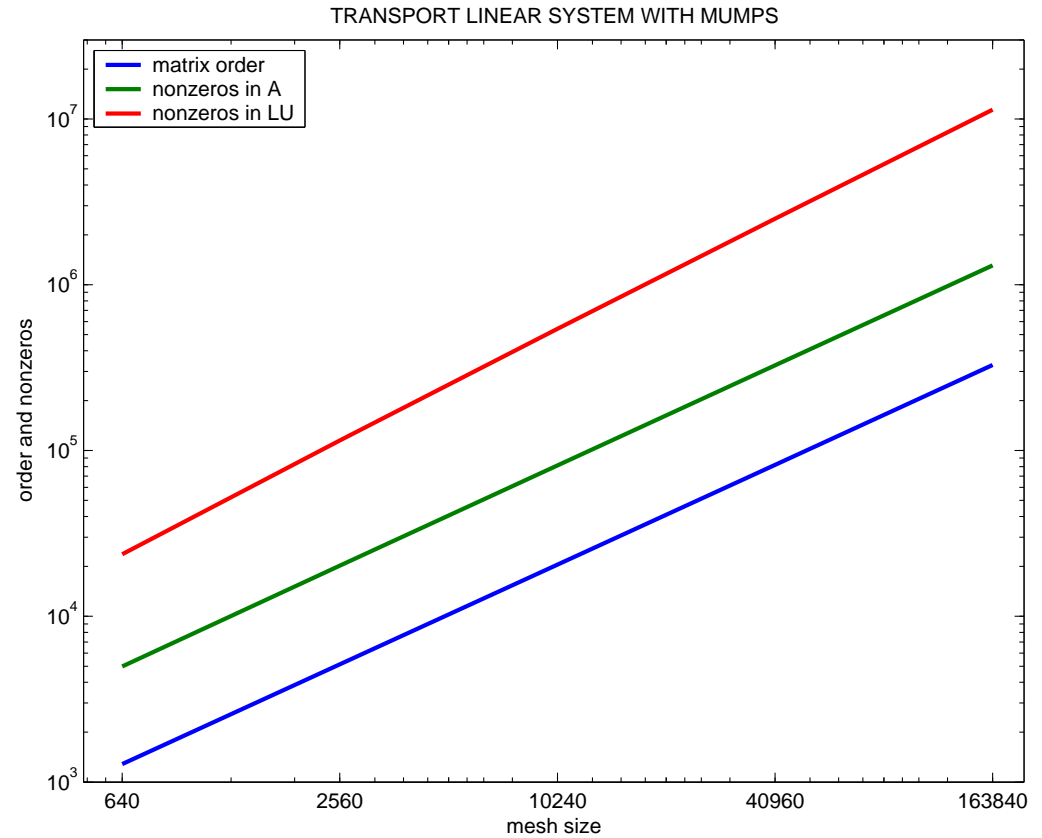
solveur	assemblage	résolution	flux	total
BICG	132	1300	56	1488
MUMPS (2)	143	390	20	553
MUMPS (1)	3	523	1	527

MUMPS avec P et T plus efficace (sauvegarde de matrices)

# Cas test de Elder - systèmes linéaires



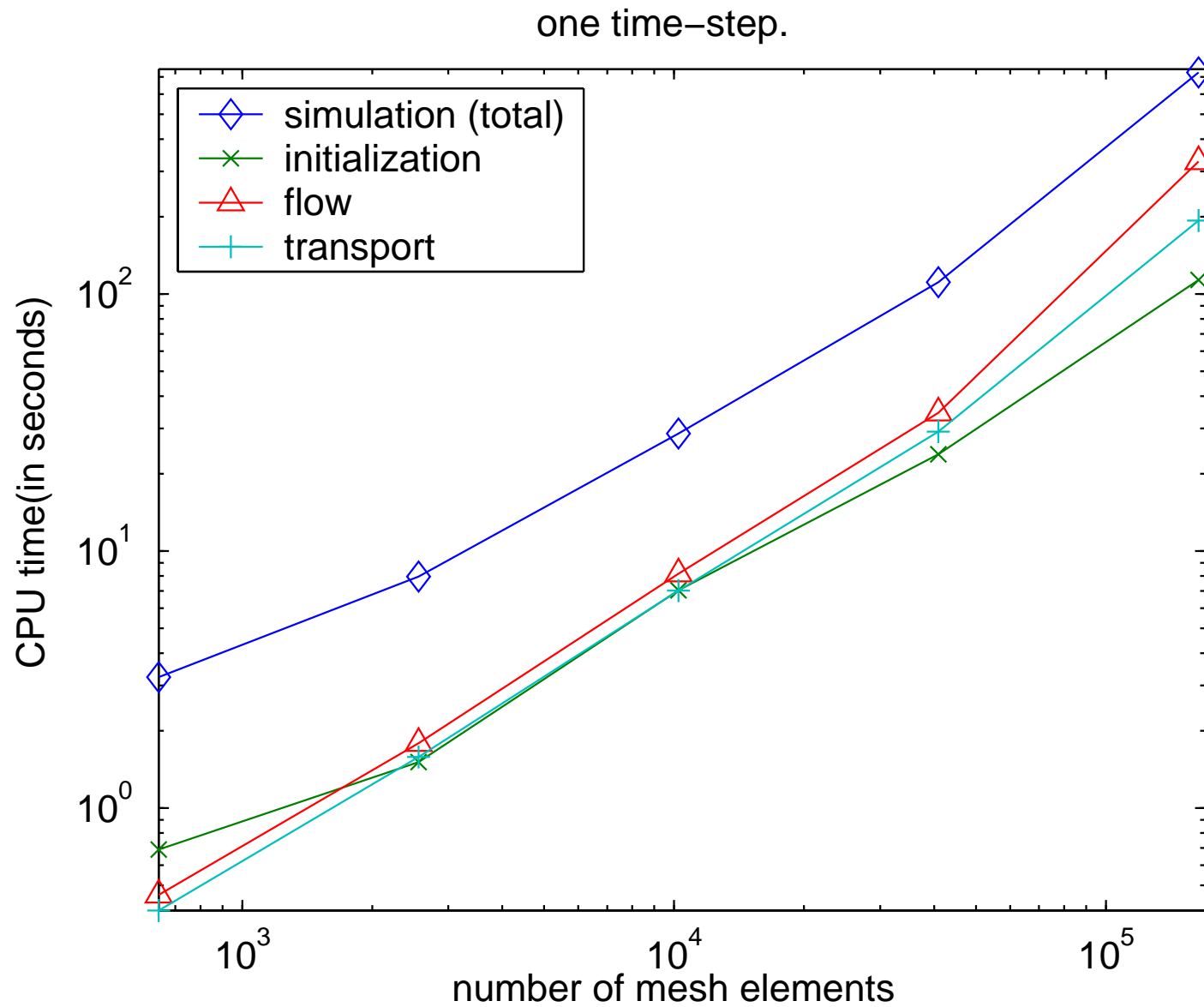
écoulement



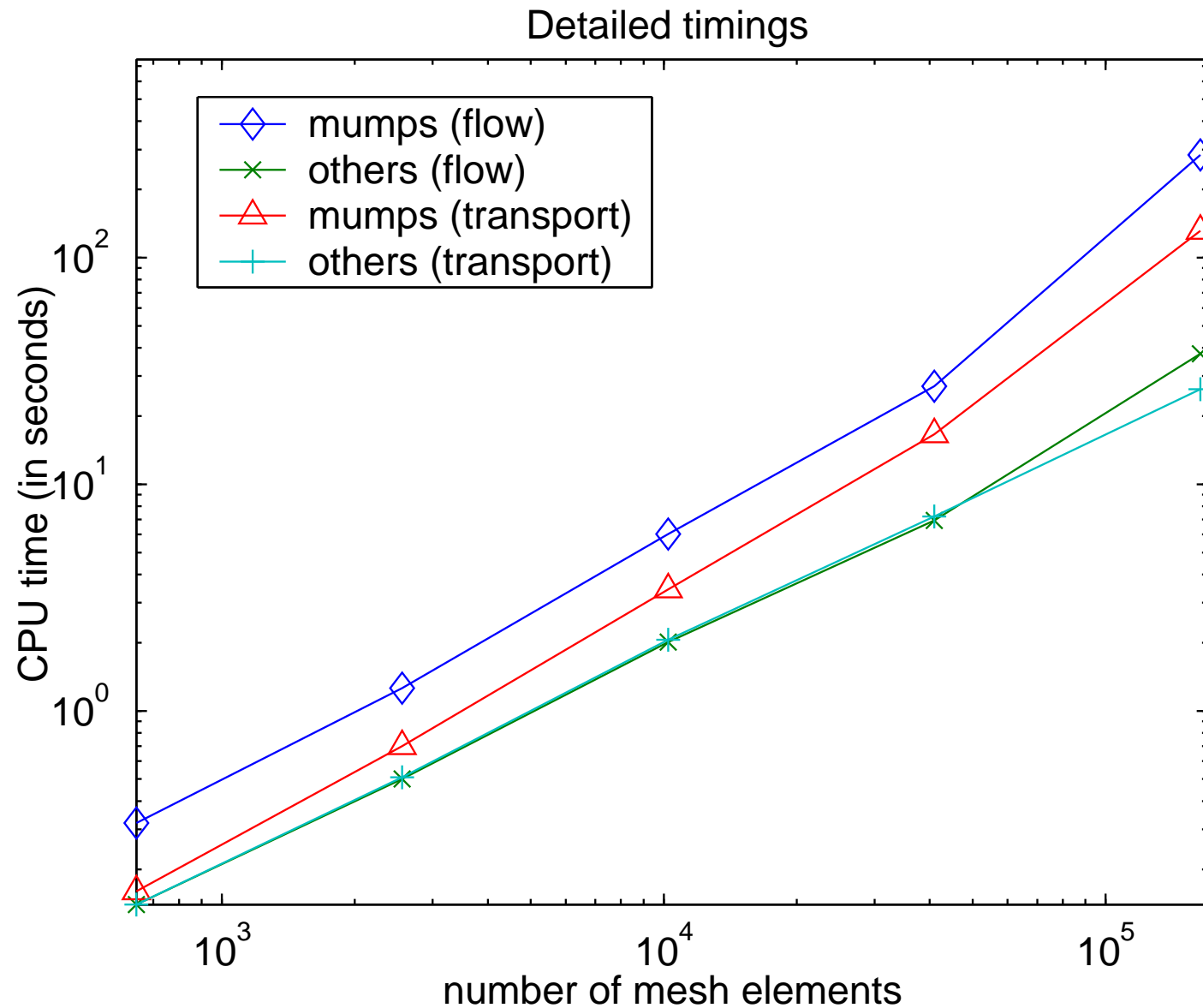
transport

$$nz(A) = O(n) \text{ et } nz(LU) = O(n^{1.1})$$

# Cas test de Elder - temps CPU



# Cas test de Elder - temps CPU - détails



# Conclusion et perspectives

---

- ▶ MUMPS plus efficace que BICG dans ce cadre
- ▶ Temps de calcul à peu près proportionnel au nombre de mailles
- ▶ Code 3D
- ▶ Parallélisation