ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Stabilité de la méthode des différentiations rétrogrades à ordre et pas variables (méthode de Gear).* Note (*) de **Bernard Philippe,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Nous démontrons que la méthode des différentiations rétrogrades à ordre et pas variables est stable pour de « petits » changement de pas, lorsque l'ordre n'excède pas cinq.

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. — Stability of the variable order variable step backward differentiation method (Gear method).

We prove that the variable order variable step backward differentiation method is stable with respect to "smooth" step size changes, when order remains under five.

1. Définition de la méthode. — Pour résoudre numériquement, le problème :

$$\begin{cases} y'(t)=f(t, y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases} \quad \text{où} \quad t\in[t_0, t_0+\mathrm{T}] \quad \text{et} \quad y\in\mathrm{C}^1([t_0, t_0+\mathrm{T}]\times\mathbb{R}^m),$$

on utilise le schéma :

$$y_{n+1}=h_n b_n f(t_{n+1}, y_{n+1})+\sum_{i=1}^{r_n} a_{n,i}\, y_{n+1-i}, \tag{1}$$

avec $h_n=t_{n+1}-t_n$; $t_{\mathrm{N}}=t+\mathrm{T}_0$; $1\leqq r_n\leqq n+1$ et $r_n\leqq r$; les coefficients $(a_{n,i})\ i=1, \ldots, r_n$ et b_n sont choisis de sorte que le schéma soit exact lorsque y est un polynôme de degré inférieur ou égal à r_n. Soit la matrice carrée d'ordre r :

$$\mathrm{R}_n=\begin{bmatrix} a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\ \ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où $a_{n,i}=0$ pour $i>r_n$.

On définit la condition de stabilité suivante :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \text{il existe un réel K tel que pour tous entiers } n \text{ et } k \text{ vérifiant} \\ \mathrm{N}-1\geqq n\geqq k\geqq 0 \text{ on ait : } \|\mathrm{R}_n \ldots \mathrm{R}_k\|\leqq \mathrm{K}. \end{cases}$$

On montre alors (*voir* par exemple [1]) que si f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, et si la condition de stabilité (S) est vérifiée, alors le schéma (1) est stable.

A pas et ordre constants ($h_n=h$ et $r_n=r$), la situation est bien connue : le schéma vérifie la condition de stabilité (S) pour $r\leqq 6$, mais ne la vérifie plus pour les ordres supérieurs. On limite donc l'étude de la stabilité du schéma (1) à $r\leqq 6$.

2. Étude de la stabilité lorsque $r=5$. — Dans [3] on montre, que si les coefficients $(a_{n,i})_{i=1,\ldots,r_n}$ et b_n sont uniformément bornés et si les changements de pas vérifient la condition :

$$\frac{h_{n+1}}{h_n}=1+\mathrm{O}(h) \quad \text{où} \quad h=\max_{0\leqq n\leqq \mathrm{N}-1} h_n, \tag{P$_1$}$$

alors il existe des entiers p_k tels que, en conservant l'ordre k sur p_k pas au moins, le schéma (1) est stable.

On montre ici que ces entiers peuvent être pris égaux à 1 lorsque l'ordre n'excède pas 5 sous la condition moins restrictive :

$$(P_{\beta,\gamma}) \qquad \beta \leqq \frac{h_{n+1}}{h_n} \leqq \gamma.$$

où β et γ sont des réels $0<\beta<1<\gamma$. Un résultat analogue a déjà été établi pour $r=3$ (*voir* [2]).

NOTATIONS :

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{matrice d'ordre } r.$$

$$\tilde{R}_n=H^{-1} R_n H=\left[\begin{array}{c|c} 1 & d_n \\ \hline 0 & R'_n \end{array}\right] \qquad \text{où} \quad R'_n=\begin{bmatrix} a'_{n,1} & \cdots & \cdots & a'_{n,r-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $a'_{n,i}=-(a_{n,i+1}+\ldots+a_{n,r})$ pour $1\leqq i\leqq r-1$ et $d_n=(-a'_{n,1},\ldots,-a'_{n,r-1})$.

LEMME. — *On suppose qu'il existe une matrice* H', *un réel* $C<1$ *et une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle, tels que dans le schéma* (1), *n'interviennent que des matrices* R'_n *vérifiant la condition :*

$$(S'_1) \qquad \| H'^{-1} R'_n H' \| \leqq C.$$

Le schéma (1) *est alors stable.*

On remarque que $\| R_n \ldots R_k \| \leqq \| H \| . \| H^{-1} \| . \| \tilde{R}_n \ldots \tilde{R}_k \|$. Avec :

$$\tilde{R}_n \ldots \tilde{R}_k=\left[\begin{array}{c|c} 1 & b_{n,k} \\ \hline 0 & R'_n \ldots R'_k \end{array}\right], \qquad N-1 \geqq n \geqq k \geqq 0$$

et $b_{n,k}=d_n R'_{n-1} \ldots R'_k+d_{n-1} R'_{n-2} \ldots R'_k+\ldots+d_{k+1} R'_k+d_k$.

Comme $\| R'_i \ldots R'_k \| \leqq \| H'^{-1} \| . \| H' \| C^{i-k+1}$, $N-1 \geqq n \geqq i \geqq k \geqq 0$ le produit $\tilde{R}_n \ldots \tilde{R}_k$ sera borné si $b_{n,k}$ l'est.

Les matrices (R'_i) étant bornées, les vecteurs lignes (d_i) le sont aussi.

Soit K_1 tel que $\| d_i \| \leqq K_1$ pour tout i vérifiant $n \leqq i \leqq k$.

On a la majoration :

$$\| b_{n,k} \| \leqq \| d_n \| . \| R'_n \ldots R'_k \| + \ldots + \| d_k \| \leqq K_1 \left(\| H' \| . \| H'^{-1} \| \frac{C}{1-C}+1 \right).$$

On en déduit que le schéma (1) est stable puisque la condition de stabilité (S) est vérifiée.

THÉORÈME. — *Il existe deux réels* β *et* γ *vérifiant* $0<\beta<1<\gamma$ *tels que, si la condition* $(P_{\beta,\gamma})$ *est vérifiée sur l'intervalle* $[t_0, t_0+T]$, *alors le schéma* (1) *est stable pour* $r=5$.

La matrice R'_n dépend continûment des variables $h_n/h_{n-1}, h_{n-1}/h_{n-2}, \ldots, h_{n-r_n+1}/h_{n-r_n}$. Soit $\overline{R}'_1, \ldots, \overline{R}'_r$ les matrices R'_n correspondant aux schémas d'ordre $1, \ldots, r$ à pas constants : si $r_n=i$ alors $R'_n(1, \ldots, 1)=\overline{R}'_i$.

Il suffit de vérifier la condition (S'_1) avec une constante $C<1$ sur les matrices $(\overline{R}'_i)_{i=1,\ldots,r}$ pour affirmer qu'il existe un voisinage $[\beta, \gamma]$ de 1, tel que cette condition (S'_1) reste vraie, avec une constante C' vérifiant $C<C'<1$, pour toutes les matrices R'_n qui correspondent à des changements de pas respectant la condition $(P_{\beta,\gamma})$. Le lemme permettra alors de conclure immédiatement.

La matrice :

$$H'=\begin{bmatrix} 1 & 1{,}309\,13 & 0{,}463\,956 & 0{,}425\,753 \\ 0 & 2{,}039\,50 & 3{,}193\,40 & 3{,}322\,01 \\ 0 & 0 & 5{,}443\,88 & 14{,}445\,2 \\ 0 & 0 & 0 & 44{,}297\,9 \end{bmatrix}$$

est telle que :

$$\|H'^{-1}\overline{R}'_1 H'\|<0{,}988, \qquad \|H'^{-1}\overline{R}'_2 H'\|<0{,}887,$$
$$\|H'^{-1}\overline{R}'_3 H'\|<0{,}752, \qquad \|H'^{-1}\overline{R}'_4 H\|<0{,}817,$$
$$\|H'^{-1}\overline{R}'_5 H'\|<0{,}996$$

où la norme est celle qui est subordonnée à la norme euclidienne. Ce résultat a été obtenu en minimisant $\|H'^{-1}\overline{R}'_5 H'\|^2$ sous les contraintes $\|H'^{-1}\overline{R}'_i H'\|^2 \leqq 0{,}995$ pour $1\leqq i\leqq 4$.

Remarque. — On ne peut espérer généraliser cette propriété à $r=6$, car les rayons spectraux de $\overline{R}_1\overline{R}_6$ et $\overline{R}_2\overline{R}_6$ sont supérieurs à 1 :

$\rho(\overline{R}_1\overline{R}_6)\simeq 1{,}284$ et $\rho(\overline{R}_2\overline{R}_6)\simeq 1{,}060$; ainsi les quantités $\|(\overline{R}_1\overline{R}_6)^m\|$ et $\|(\overline{R}_2\overline{R}_6)^m\|$ ne sont pas bornées.

(Dans de nombreux programmes, la méthode des différentiations rétrogrades est aussi limitée à $r=5$ à cause du mauvais domaine de stabilité de la méthode d'ordre 6).

(*) Remise le 8 mars 1982.

[1] M. CROUZEIX-LISBONA, *A Contribution to the Analysis of the Convergence of the Variable Step Variable Formula Multistep Methods* (à paraître).

[2] M. CROUZEIX et A. MIGNOT, *Analyse numérique des Équations différentielles*, Masson, Paris (à paraître).

[3] C. W. GEAR et D. S. WATANABE, *S.I.A.M. J. Numer. Anal.*, 11 n° 5, octobre 1974, p. 1044-1058.

I.R.I.S.A., Campus Universitaire de Beaulieu, avenue du Général Leclerc, 35042 *Rennes Cedex*.