Fiabilité des systèmes

Note : Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Les candidat(e)s sont laissé(e)s libres d'organiser leur discussion comme ils ou elles l'entendent. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées à la fin. Le candidat n'est pas tenu de les suivre. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples effectivement traités sur ordinateur.

Résumé

Ce texte décrit quelques concepts permettant l'étude de la fiabilité de systèmes composés de différentes unités. Après le rappel de la définition d'une chaîne de Markov, on montre comment déterminer numériquement l'état transitoire. Cela revient à intégrer un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants. Un exemple de modèle de fiabilité de système est décrit.

1 Définition de la fiabilité d'un système

Le terme “ fiabilité ” est un néologisme introduit dans les années 60 pour traduire le terme anglo-saxon “ reliability ” et, si l'on accepte de la considérer comme une science, la fiabilité est la science des défaillances. La Commission Electrotechnique Internationale donne de la fiabilité la définition suivante :

> *Aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée. Le terme de fiabilité est aussi utilisé comme caractéristique de fiabilité désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès.*

Dans la suite nous appelerons *système*, un ensemble d'éléments en interaction. Les *éléments* constituant le système sont susceptibles d'avoir des défaillances (c'est-à-dire de ne plus être en mesure de remplir leur mission). La défaillance d'un élément peut être *soudaine* ou *progressive*, *partielle* ou *totale*. Nous ne considérons que les défaillances soudaines et totales. Les éléments peuvent être *réparables* ou *non réparables*. Un élément sera dit réparable s'il est possible de lui restituer ses qualités primitives après une défaillance sans qu'il soit nécessaire d'arrêter le fonctionnement du système.

Définition 1.1 *La fiabilité $R(t)$ d'un système S est la probabilité que le système soit non défaillant sur l'intervalle de temps $[0\ ,t]$. C'est une fonction décroissante variant de 1 à 0 sur $[0\ ,\ +\infty[$.*

Définition 1.2 *La disponibilité $A(t)$ du système est la probabilité que le système S soit non défaillant à l'instant t. On remarquera que dans le cas de systèmes non réparables, la disponibilité est égale à la fiabilité du système.*

On peut montrer que dans certaines conditions très générales la disponibilité d'un système réparable en fonctionnement permanent tend vers une limite non nulle lorsque t tend vers l'infini et que cette limite est égale à la proportion du temps pendant lequel le système est en état de fonctionner. Pratiquement, cette valeur est atteinte très rapidement (de l'ordre d'une à dix fois le temps moyen de réparation du système).

Par contre la fiabilité de tous les systèmes tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Ce qui caractérise le système est la manière dont la limite est atteinte.

2 Chaîne de Markov continue homogène à espace d'état fini

On rappelle ici la définition d'une chaîne continue de Markov qui permet de modéliser le fonctionnement de nombreux systèmes.

On considère une famille de variables aléatoires $\{X(t)\ ,\ t \in [0\ ,+\infty[\}$ qui prennent leurs valeurs dans un espace fini d'états (tous les états possibles du système) : $E = \{1\ ,\ 2\ ,\cdots,\ N\}$. On dit que la famille est une chaîne de *Markov* si pour tout ensemble fini d'instants $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ les probabilités de changement d'état (probabilités conditionnelles[1] vérifient :

$$p\left([X(t_{n+1}) = i_{n+1}] \mid [X(t_n) = i_n\ ,\cdots,\ X(t_0) = i_0]\right) = p\left([X(t_{n+1}) = i_{n+1}] \mid [X(t_n) = i_n]\right).$$

Si de plus cette probabilité ne dépend que de l'écart $(t_{n+1} - t_n)$, la chaîne est dite *homogène* et on peut alors définir les fonctions :

$$p_{ij}(\tau) = p([X(t+\tau) = j] \mid [X(t) = i]) \text{ pour } i\ ,j \in E \tag{1}$$

avec $p_{ii}(0) = 1$ et $p_{ij}(0) = 0$ pour $i \neq j$. Ces fonctions vérifient aussi le théorème de Bayes que l'on peut exprimer par :

$$1 = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\tau) \text{ pour } i \in E. \tag{2}$$

Pour tout état j, on note $P_j(t)$ la probabilité pour la chaîne d'être dans cet état à l'instant t, c'est-à-dire $P_j(t) = p([X(t) = j])$. En admettant que les fonctions p_{ij} sont dérivables en 0, le *taux de transition de l'état i à l'état j* pour $i \neq j$ est la quantité positive ou nulle :

$$a_{ij} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\ p_{ij}(\tau) = \frac{dp_{ij}}{d\tau}(0). \tag{3}$$

De la relation (2), on en déduit que si on définit : $a_{ii} = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\ (p_{ii}(\tau) - 1) = \frac{dp_{ii}}{d\tau}(0)$, alors

$$a_{ii} = -\sum_{j\neq i} a_{ij}. \tag{4}$$

1. La probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé est notée : $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$.

Après un passage à la limite pour τ tendant vers 0 de la relation suivante :

$$\frac{1}{\tau}(P_j(t+\tau)-P_j(t)) = \sum_{i\neq j} \frac{1}{\tau}\ p_{ij}(\tau)P_i(t) + \frac{1}{\tau}\ (p_{jj}(\tau)-1)P_j(t) \tag{5}$$

on en déduit les équations de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{dP_j}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{N} P_i(t)a_{ij} \tag{6}$$

Le système différentiel (6) peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\frac{dP}{dt}(t) = P(t)\ A \tag{7}$$

où $P(t)$ est un vecteur ligne de probabilités et où la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice des taux de transition[2] .

On peut remarquer que la matrice A admet comme vecteur du noyau à droite le vecteur colonne $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $A\,\mathbb{1} = 0$.

On suppose maintenant que la chaîne est *irréductible*, c'est-à-dire qu'il est toujours possible de passer d'un état i à un état j en plusieurs étapes éventuellement; cela se traduit sur la matrice A par la propriété suivante (A est aussi dite irréductible)

$$\forall i,j \in E \ \ (\text{si } i \neq j \text{ alors } a_{ij} \neq 0 \text{ ou } \exists i_1, \cdots, i_k \text{ tels que } a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_kj} \neq 0). \tag{8}$$

Cela revient à supposer que l'on ne peut trouver une renumérotation des états telle que la matrice des taux de transitions que l'on obtiendrait soit triangulaire supérieure (ou inférieure) par bloc[3].

Soit S la matrice $S = I + \frac{1}{\alpha}A$ où $\alpha = \max_{i=1,\cdots,n} |a_{ii}|$; la matrice S est alors une matrice à termes positifs ou nuls dont chaque ligne est un vecteur de probabilité. Elle est dite stochastique et vérifie $S\,\mathbb{1} = \mathbb{1}$. Le rayon spectral de S, noté $\rho(S)$, est égal à 1 puisque : $1 = \|S\|_\infty \geq \rho(S) \geq 1$. La matrice S est aussi irréductible au sens de la propriété (8)

Proposition 2.1 *La matrice A des taux de transitions d'une chaîne continue de Markov homogène irréductible à espace fini d'état a les propriétés suivantes :*

- *les éléments non diagonaux de la matrice sont positifs ou nuls, et les éléments diagonaux sont strictement négatifs et définis par la relation (4).*
- *toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative ou nulle. La seule valeur propre à partie réelle nulle est 0.*

2. On conserve ici la notation habituelle de la spécialité qui consiste à multiplier la matrice des taux de transition à gauche par le vecteur de probabilité ligne. On peut aussi transposer vecteurs et matrices pour adopter une présentation plus habituelle en algèbre linéaire.

3. Une matrice carrée A est triangulaire supérieure par bloc, si elle peut être partitionnée sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, où B et D sont des matrices carrées et O représente une matrice rectangulaire de zéros.

Preuve. Les éléments diagonaux ne peuvent être nuls car sinon, toute la ligne correspondante serait nulle et la matrice ne serait pas irréductible. Il reste à montrer la deuxième partie de la proposition. On vient de voir que le spectre de S est inclus dans le disque unité du plan complexe. Par application du théorème de Perron-Frobenius (voir l'annexe) à la matrice S^t, matrice transposée de S, on en déduit que 1 est valeur propre simple de S et que le vecteur propre à gauche associé à 1 est à composantes de même signe (on choisit l'orientation positive). La propriété cherchée est alors obtenue en traduisant ces propriétés sur la matrice A. $\square$

Définition 2.1 *On appelle vecteur de probabilités du régime stationnaire, vecteur noté P_∞, l'unique (car 0 est valeur propre simple) vecteur propre à gauche normé en vecteur de probabilité. Il est à composantes positives ou nulles et vérifie : $P_\infty \mathbb{1} = 1$, $P_\infty S = P_\infty$ et $P_\infty A = 0$.*

Le système d'équations différentielles défini par les équations de Chapman-Kolmogorov (7) est linéaire à coefficients constants. Sa solution est

$$P(t) = P(0) \exp(tA) \tag{9}$$

où $P(0)$ est la distribution initiale des probabilités et $\exp(tA)$ représente l'exponentielle matricielle de la matrice (tA) (voir l'annexe). Le vecteur P_∞ est invariant à gauche par l'opérateur $\exp(tA)$ pour tout t.

Proposition 2.2 *Soit A la matrice des taux de transition d'une chaîne de Markov homogène et irréductible. Le système (7) est stable. Plus précisément, pour tout vecteur initial de probabilités $P(0)$ ($P(0) \geq 0$ et $P(0)\,\mathbb{1} = 1$), le vecteur $P(t) = P(0)\exp(tA)$ converge vers le vecteur de probabilités P_∞ tel que $P_\infty A = 0$.*

Preuve. On considère le sous-espace W des vecteurs lignes orthogonaux au vecteur $\mathbb{1}$. Ce sous-espace est invariant (à gauche) par A car $wA\,\mathbb{1} = 0$ pour tout vecteur w et donc en particulier pour $w \in W$. On peut donc décomposer l'espace des vecteurs lignes en deux sous-espaces supplémentaires invariants à gauche par A : (P_∞) et W. La valeur propre de A associée au vecteur propre à gauche P_∞ est nulle. Donc toutes les valeurs propres de la restriction de l'opérateur A à gauche, restreint à W, sont à parties réelles strictement négatives (conséquence du théorème de Perron-Frobenius). On en déduit que pour tout vecteur ligne w de W on a $\lim_{t\to\infty} w \exp(tA) = 0$. Soit $w = P(0) - P_\infty$. Alors w est un vecteur de W et donc $\lim_{t\to\infty} P(0)\exp(tA) = \lim_{t\to\infty} P_\infty \exp(tA) = P_\infty$. $\square$

En conclusion, deux informations peuvent être recherchées pour une chaîne de Markov homogène irréductible : le vecteur de probabilité P_∞ du régime stationnaire (qui revient à rechercher un vecteur propre) et l'évolution du vecteur de probabilité $P(t)$ pour tout t (qui correspond à l'intégration d'un système d'équations différentielles). Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse à la résolution numérique du second problème.

3 Intégration numérique du système d'équations différentielles

On décrit ici une méthode de calcul du vecteur $P(t)$ solution de (9) qui est adaptée au cas où la matrice A est de dimension telle que l'on puisse la manipuler sur l'ordinateur comme un tableau carré. C'est une méthode qui calcule explicitement la matrice $\exp(tA)$. La méthode est fondée sur un développement de Taylor combiné à une technique dite de "scaling and squaring".

La série de Taylor

$$\exp(A) = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}, \tag{10}$$

de l'exponentielle est toujours convergente mais sa vitesse de convergence dépend de la norme de la matrice. Soit τ tel que $\tau\|A\| = a_\tau < 1$ où la norme considérée peut être n'importe quelle norme matricielle comme par exemple les normes $\|.\|_1$ ou $\|.\|_\infty$. Soit $B = \tau A$. On approche l'exponentielle par troncature de la série :

$$\exp(B) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!}$$

On peut donc pour une précision donnée ϵ et un ordre donné N de la troncature de la série de Taylor, décider d'un seuil à ne pas dépasser pour la quantité a_τ. Par exemple pour $N = 10$ et $a_\tau \leq 0.35$, on garantit une erreur de troncature inférieure à 10^{-10}.

Une fois l'approximation de $\exp(B) = \exp(\tau A)$ calculée, on peut calculer les approximations des matrices $\exp(t_i A)$ pour $t_i = 2^i\tau$ et $i = 1, 2, \cdots$ par élevations successives au carré de la matrice $\exp(B)$. On sait que la suite des matrices va tendre vers la matrice qui a toutes ses lignes égales à P_∞ c'est-à-dire la matrice $\mathbb{1}P_\infty$.

4 Calcul de la disponibilité et de la fiabilité

On suppose maintenant que le système dont on veut étudier le fonctionnement est décrit par une chaîne de Markov continue homogène et irréductible à espace d'état fini E. On conserve les notations du paragraphe précédent pour la matrice A des taux de transition et le vecteur ligne de probabilité $P(t)$.

Pour calculer la disponibilité (voir la définition 1.2), on définit par I l'ensemble des états de pannes qui correspondent à une défaillance du système. Soit respectivement $\mathbb{1}_I$ et $\mathbb{1}_{\bar{I}}$ les vecteurs colonnes caractéristiques des états de défaillance ou de fonctionnement du système $((\mathbb{1}_I)_i = 1$ si $i \in I$ ou 0 sinon ; $\mathbb{1}_{\bar{I}} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_I)$. D'après la définition donnée au paragraphe 1, la disponibilité est égale à

$$A(t) = \sum_{i\notin I} P_i(t) = P(t)\,\mathbb{1}_{\bar{I}} = 1 - \sum_{i\in I} P_i(t) = 1 - P(t)\,\mathbb{1}_I.$$

La fiabilité étant la probabilité que le système se trouve dans un état de marche sans jamais être passé par un état de panne, il suffira de supprimer les transitions des états de panne vers les états de marche dans la matrice A. Soit A' la nouvelle matrice ainsi obtenue. Elle est construite à partir de A en annulant toutes les lignes correspondant à des états de panne. Le système différentiel obtenu est :

$$\left[\frac{dP'_1}{dt}, \frac{dP'_2}{dt}, \cdots, \frac{dP'_n}{dt}\right] = \left[P'_1, P'_2, \cdots, P'_n\right] A' \tag{11}$$

On peut remarquer que la matrice A' n'est plus irréductible , mais on peut facilement raisonner sur les matrices extraites correspondant aux états de fonctionnement et aux états de panne pour généraliser les résultats précédents. La fiabilité est calculable par :

$$R(t) = P'(t)\ \mathbb{1}_{\bar{I}} \text{ pour } t \geq 0.$$

5 Etude d'un système à redondance active

5.1 Cas élémentaire

Considérons un système constitué par deux éléments $\{1\ ,2\}$ en redondance active, de taux de défaillance et de réparation constants. Les taux respectifs de défaillance sont notés λ_i et les taux de réparation sont notés μ_i, pour $i = 1\ ,2$.

En notant i un élément en état de marche et $\bar{i}$ le même élément en état de panne, on obtiendra le graphe de Markov de la figure 1.

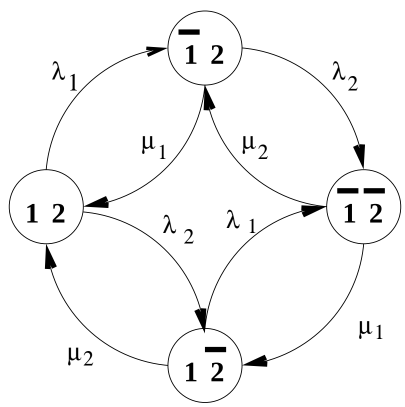

FIG. 1 – *Système à redondance active*

On obtient alors la matrice A par interprétation de ce graphe :

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_2+\lambda_1) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Par contre pour calculer la fiabilité, il faut rendre l'état de panne absorbant. Le graphe de Markov est décrit dans la figure 2.

On obtient alors la matrice A' par interprétation de ce graphe :

$$A' = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\mu_2+\lambda_1) & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

La résolution des systèmes (12) et (13), connaissant la distribution initiale $P(0)$, peut alors être effectuée par intégration des systèmes linéaires homogènes de matrices A et A'.

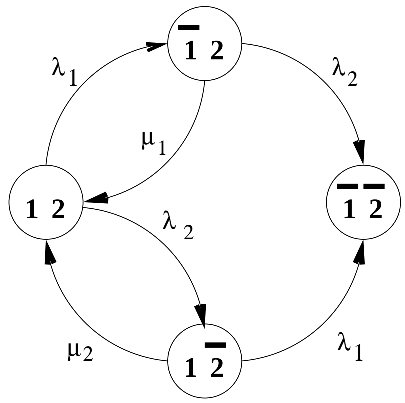

FIG. 2 – *Système à redondance active avec état absorbant.*

5.2 Généralisation

On suppose maintenant un système composé de deux classes d'éléments indexées par i où $i = 1$, 2. A tout instant t, le système ne fonctionne que si au moins un élément dans chaque classe fonctionne. La classe i est composée de p_i éléments qui peuvent tomber en panne à un taux λ_i et être réparés à un taux μ_i. Chaque état du système est décrit par un couple d'entiers qui indique le nombre d'éléments en panne dans chaque classe. Il y a donc $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$ états possibles pour le système.

On note que si le système est dans l'état $(e_1\ , e_2)$ il peut passer dans les états suivants (avec des cas particuliers évidents au bord du domaine lorsque $e_1 = 0$ ou p_1 ou lorsque $e_2 = 0$ ou p_2)

- $(e_1 + 1\ , e_2)$ au taux $(p_1 - e_1)\lambda_1$;
- $(e_1\ , e_2 + 1)$ au taux $(p_2 - e_2)\lambda_2$;
- $(e_1 - 1\ , e_2)$ au taux $e_1\mu_1$;
- $(e_1\ , e_2 - 1)$ au taux $e_2\mu_2$;

En énumérant les états dans l'ordre lexicographique, on trouve alors une matrice pentadiagonale. Dans le cas $p_1 = p_2 = 2$, la matrice des taux de transition est :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
* & 2\lambda_2 & & 2\lambda_1 & & & & & \\
\mu_2 & * & \lambda_2 & & 2\lambda_1 & & & & \\
& 2\mu_2 & * & & & 2\lambda_1 & & & \\
\hline
\mu_1 & & & * & 2\lambda_2 & & \lambda_1 & & \\
& \mu_1 & & \mu_2 & * & \lambda_2 & & \lambda_1 & \\
& & \mu_1 & & 2\mu_2 & * & & & \lambda_1 \\
\hline
& & & 2\mu_1 & & & * & 2\lambda_2 & \\
& & & & 2\mu_1 & & \mu_2 & * & \lambda_2 \\
& & & & & 2\mu_1 & & 2\mu_2 & *
\end{array}\right) \tag{14}$$

dans laquelle les étoiles indiquent l'opposé de la somme des éléments non diagonaux de la ligne correspondante et où les composantes non indiquées sont nulles.

En définissant la défaillance du système comme étant le cas où tous les éléments d'une classe sont en panne, on peut alors calculer la disponibilité du système en intégrant l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{dt}(t) = P(t)\ A$$

avec comme vecteur des conditions initiales le vecteur $P_0 = (1\ ,0\ ,\cdots\ ,0)$. Pour calculer la fiabilité, on procède comme cela a été décrit précédemment.

Exemple d'application On considère une usine d'embouteillage d'eau minérale qui fonctionne avec deux machines et deux réservoirs suivant le schéma de la figure 3. Chaque machine

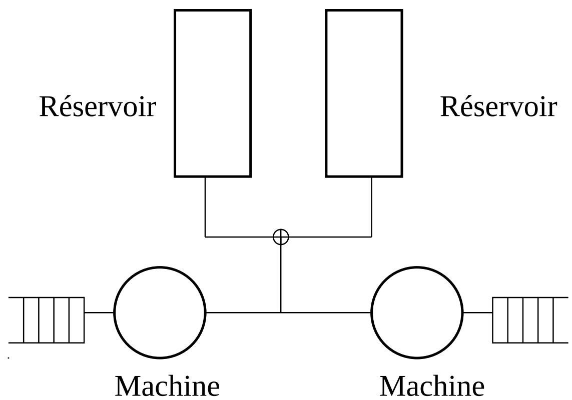

FIG. 3 – *Schéma du système d'embouteillage*

est alimentée par une file de bouteilles qui est approvisionnée de temps en temps. On déclare une machine en panne lorsqu'elle est en panne ou lorsque sa file d'approvisionnement est vide. D'autre part, les deux réservoirs alimentent en commun les deux machines, mais non simultanément : pour des raisons de maintenance ou de remplissage les opérateurs peuvent à tout moment faire basculer le branchement d'un réservoir sur l'autre. Un réservoir est dit en panne, lorsqu'il est vide. La panne générale du système correspond aux cas dans lesquels les deux machines sont en panne ou les deux réservoirs sont vides. On suppose que les hypothèses de fonctionnement permettent de modéliser le fonctionnement de l'usine avec une chaîne de Markov dont la matrice est donnée en (14) avec les paramètres suivants (unité de temps : 1 mn) :

$$\lambda_1 = 10^{-3}\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \mu_1 = 10^{-3}\ ,\ \mu_2 = 10\ ,$$

la classe 1 étant la classe des machines et la classe 2 celle des réservoirs. La figure 4 décrit les courbes obtenues pour la fiabilité et la disponibilité sur l'intervalle de temps $[0\ ,\ 10^4]$ en supposant qu'au démarrage toutes les unités du système fonctionnent.

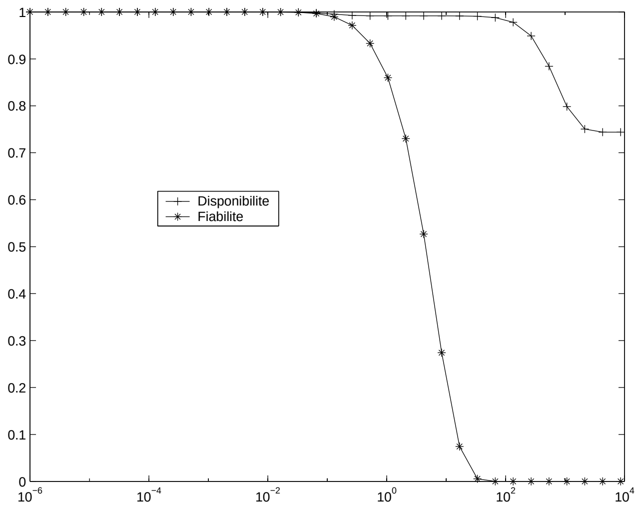

FIG. 4 – *Fiabilité et disponibilité du système d'embouteillage.*

Développements possibles suggérés pour le commentaire

- Description des propriétés spectrales de la matrice A' définie dans la section 4 dans le calcul de la fiabilité.
- Calcul des expressions analytiques de la disponibilité et de la fiabilité du système à deux éléments qui est décrit dans le paragraphe 5.1. On pourra utiliser un logiciel de calcul formel pour les obtenir.
- Justifier complètement la méthode "scaling and squaring" décrite dans le paragraphe 3.
- Description du cas général du système décrit dans le paragraphe 5.2. Appliquer la méthode "scaling and squaring" à un cas où le nombre d'états est inférieur à la centaine.
- Description de l'exemple d'application et commentaires sur les hypothèses induites par le modèle proposé et sur la signification du choix des paramètres. Interprétation des résultats. Programmation de la résolution dans l'environnement MATLAB ou SCILAB.