Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG — Troisième Bimestre 1996/97

Séance 5 : — 26 mars 1997

Analyse de Fourier des Signaux Discrèts

Formules du Jour

1) L'exponentielle Complexe est une angle dans la plane complexe

$$\boxed{e^{j\pi} = -1}$$

$e^{j\omega t} = \text{Cos}(\omega t) + j\ \text{Sin}(\omega\ t)$
$e^{j\pi/4} = 0.707 + j\ .707$
$e^{j\pi/2} = 0 + j$
$e^{j3\pi/4} = -0.707 + j\ .707$
$e^{j\pi} = -1 + j\ 0$

2) L'exponentielle Complexe est une decallage en temps.

$$e^{j\omega t}\, e^{j\alpha} = e^{j(\omega t+\alpha)} = \text{Cos}(\omega t + \alpha) + j\ \text{Sin}(\omega\ t + \alpha)$$

3) Sinus Cardinale :

$$\boxed{\mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \frac{\text{Sin}(\pi f)}{\pi f} \triangleq \text{Sinc}(f)}$$

Quelques Transformées de Fourier :

Transformée de FOURIER du Cosinus

La Transformée d'un cosinus de fréquence ω_o est une somme de 2 impulsions en ω_o et $-\omega_o$:

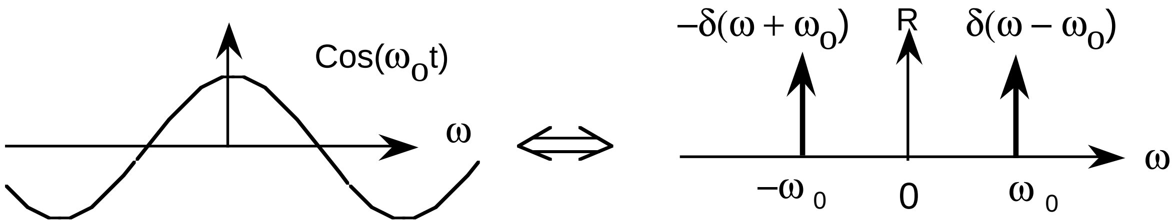
car $\quad \mathrm{Cos}(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{F}\{\ \mathrm{Cos}(\omega_o\, t)\ \} = \frac{1}{2}\ \mathcal{F}\{\ e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\ \}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]\ e^{-j\omega t}\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\ \left[\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt(\omega t - \omega_0 t)}\ dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt(\omega t + \omega_0 t)}\ dt\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)\right]$$



Transformée de FOURIER du Sinus

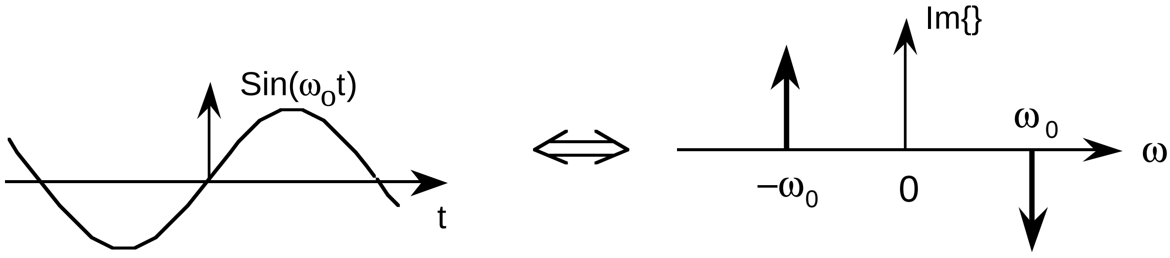
La Transformée d'un sinus de fréquence ω_o

$$\mathrm{Sin}(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\ [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\{\ \mathrm{Sin}(\omega_o\, t)\ \} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j}\ [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]\ e^{-j\omega t}\ dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\ e^{-j\omega t}\ dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t}\ e^{-j\omega t}\ dt\right]$$

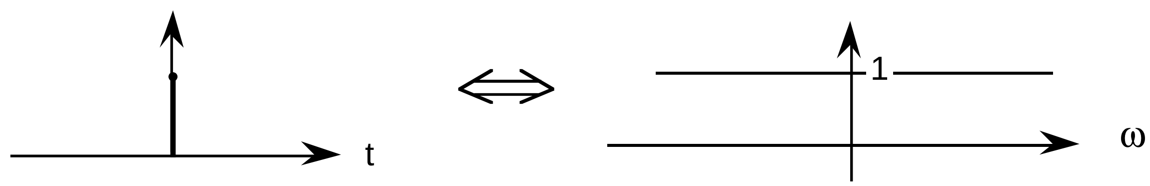
$$= \frac{-1}{2}\, j\left[\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)\right]$$



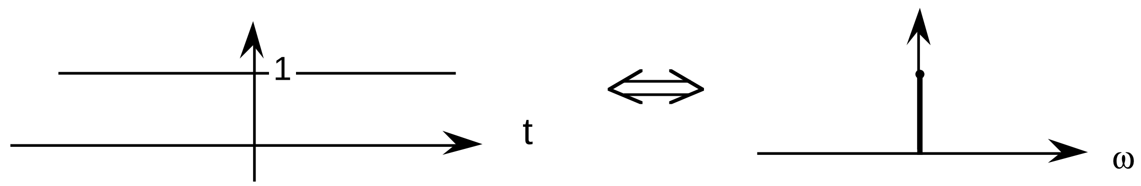
d'où la notion de fréquence négative qui n'a de sens que pour représenter des signaux réels dans l'espace fréquence :

Transformée de FOURIER du delta

Transformée de FOURIER du signal delta : $\mathcal{F}\{\ \delta(t)\ \} = 1$



$\mathcal{F}^{-1}\{\ \delta(\omega)\ \} = 1$



Transformée de FOURIER du signal Rect(t)

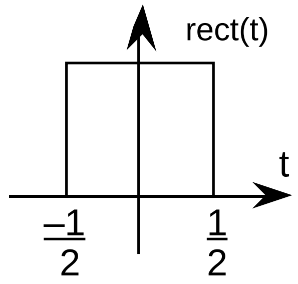
Rappel : $2j\ \sin(x) = e^{x} - e^{-x}$

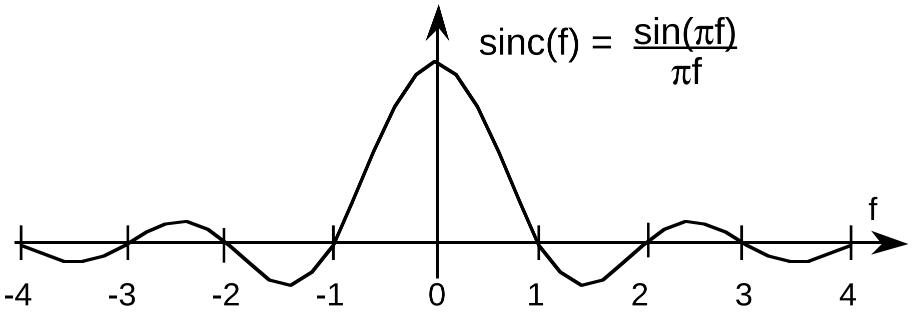
Nous allons définir : $\mathrm{Sinc}(f) \triangleq \dfrac{\mathrm{Sin}(\pi f)}{\pi f} \triangleq \mathrm{Sinc}(\dfrac{\omega}{2\pi})$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right] = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \frac{\mathrm{Sin}(\pi f)}{\pi f} \triangleq \mathrm{Sinc}(f)$$

ou bien $\triangleq \mathrm{Sinc}(\dfrac{\omega}{2\pi})$

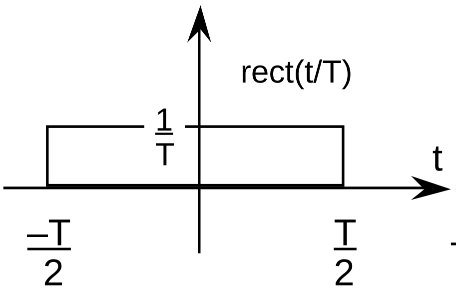
$$\boxed{\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \frac{\mathrm{Sin}(\pi f)}{\pi f} \triangleq \mathrm{Sinc}(f)}$$

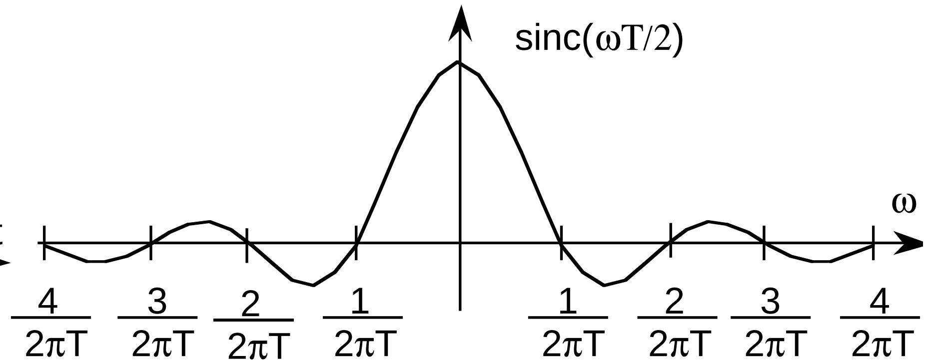




$$f\{\mathrm{rect}(\frac{t}{2T})\} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega T}\left[e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right] = \frac{1}{j\omega T}\, 2j \sin(\omega T) = 2\ \mathrm{Sinc}\ (2Tf)$$

$$f\{\mathrm{rect}(\frac{t}{T})\} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega T}\left[e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right] = \frac{2j}{j\omega T} \sin(\omega T/2) = \mathrm{Sinc}(T\ f)$$





et par symétrie :

$$f^{-1}\{\ \mathrm{rect}(f)\ \} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi ft}df = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2\pi jt}\left[e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right] = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Sinc}(t)$$

La Fonction Sinc Discrète

Soit un signal x(n), non-périodique, pour lequel on dispose d'une section de N points. Le fait de limiter un signal à N échantillons est équivalent de multiplier par w(n).

w(n) est une fenêtre rectangulaire ou fonction de porte (parfois appellé $rect_N(n)$)

$$w(n) \triangleq \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases}$$

$$x(n) = x(n) \cdot w(n)$$

On peut analyser cette effet avec la TFTD.

$$\text{TFTD}\{\, x(n) \cdot w(n)\} = X(\omega) * W(\omega). \quad \text{(Convolution en fréquence)}$$

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n$$

afin de simplifier l'agebre, on substitu : $z = e^{-j\omega}$

Il est connu que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1}$

Demonstration : $$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = (1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1})$$

$$z\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = z(1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1}) = (z^1 + z^2 + ...+z^{N-1} + z^N)$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n - z\left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = (1 + z^1 + z^2 + ...z^{N-1}) – (z^1 + z^2 + ...+z^{N-1} + z^N)$$

$$(1–z) \left(\sum_{n=0}^{N-1} z^n\right) = (1 – z^N)$$

donc $$\sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

avec

$$W(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z} = \frac{z^{N/2}}{z^{1/2}} \frac{(z^{-N/2} - z^{N/2})}{(z^{-1/2} - z^{1/2})}$$

donc pour z $= e^{-j\omega} = e^{-j2\pi f}$

$$W(f) = e^{-j\pi(N\text{-}1)f} \frac{(e^{-j2\pi nfN/2} - e^{j2\pi nfN/2})}{(e^{-j2\pi nf/2} - e^{j2\pi nf/2})} = e^{-j\pi\ f(N-1)} \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$

ou bien

$$W(\omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

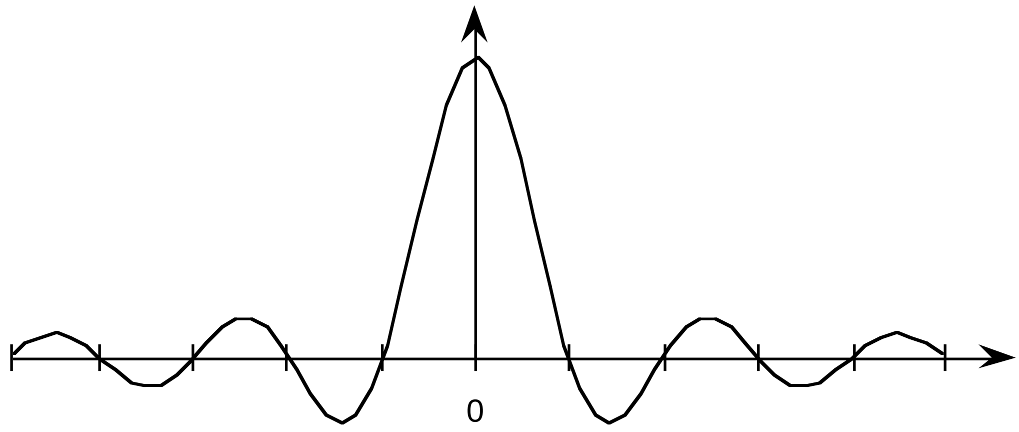
Il s’agit de l’équivalent discrète à sinc(πf).

Si on prefère, on peut définir w(n) avec un nombre impaire de coefficients, centré sur zéro :

$$w(n) \triangleq \begin{cases} 1 & -N/2 \leq n < N/2 \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

puis :

$$W(f) = \frac{(e^{-j2\pi nfN/2} - e^{j2\pi nfN/2})}{(e^{-j2\pi nf/2} - e^{j2\pi nf/2})} = \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$



Le decomposition frequentiel d'une séquence x(n).

Les exponentielles complexes $e^{\pm j\omega t}$ forment une base orthogonale sur $[-\infty, \infty]$:

$$< e^{j\omega_0 t}, e^{j\omega_1 t} > = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega_1 t}\, dt = \begin{cases} \delta(\omega) & \omega_0 = \omega_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut projetter une séquence de N echantillons, x(n) sur une base de N exponentielles complexes.

si x(n) est réel, on peut utiliser les parties réel et imaginaires de N/2 fréquences.

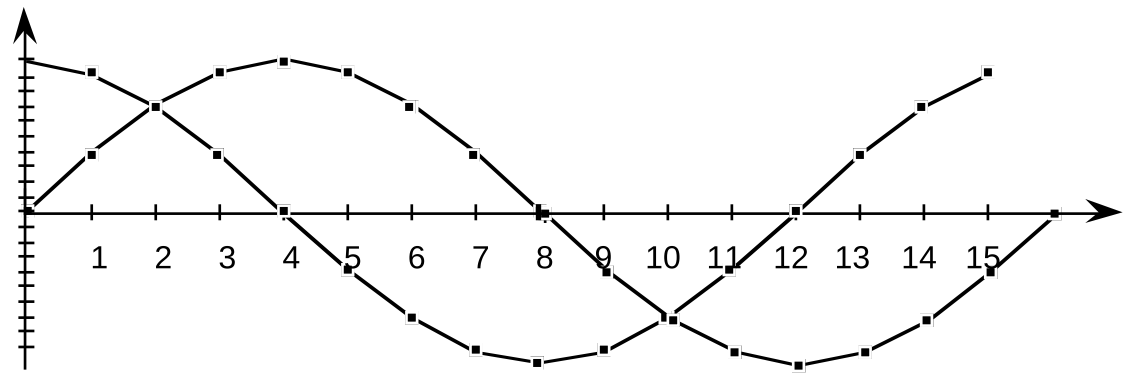
Pour le calcul numérique, il faut définir une exponentielle complexe "discrète" par échantillonage dans l'axe "t". Ceci est fait par un substitution de n pour t.

$$e^{j2\pi fn} = \mathrm{Cos}(2\pi fn) + j\ \mathrm{Sin}(2\pi fn)$$

Le fréquence sont $f = \frac{k}{N}$ pour $k \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$

Par exemple, pour $f = \frac{1}{16}$, (une cycle pour 16 echantillons),

$\mathrm{Cos}(\frac{2\pi n}{16}) + j\mathrm{Sin}(\frac{2\pi n}{16})$ a la forme :



Soit un séquence x(n) pour $n \in [0, N-1]$.

Le composant à la fréquence f de x(n) est une produit scalaire avec $e^{-j2\pi fn}$

$$X(f) = \langle e^{-j2\pi fn}, x(n)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(\mathrm{Cos}(2\pi fn) - j\ \mathrm{Sin}(2\pi fn))$$

(note : X(f) est complexe)

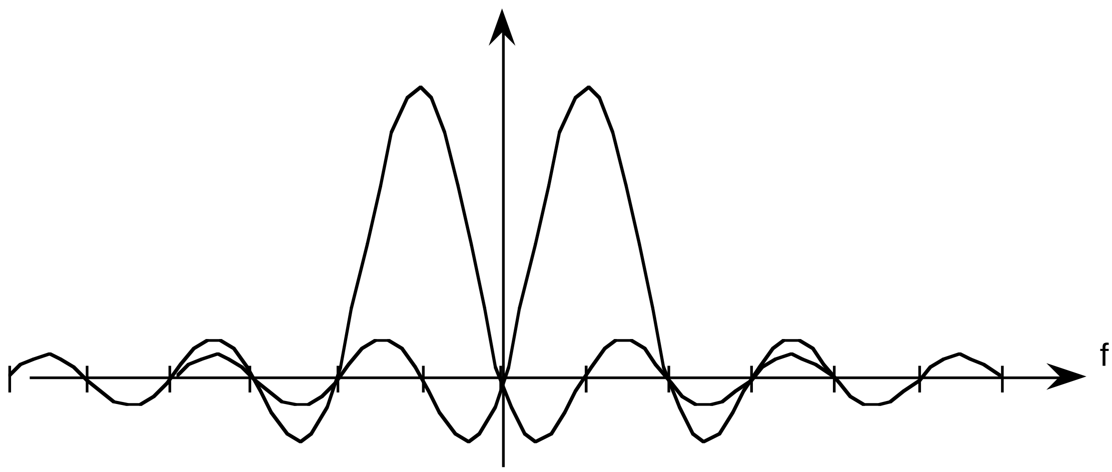
On peut ainsi definir une transformée de Fourier Discrète comme
une produit scalaire avec une ensemble de base orthogonales $e^{-j2\pi fn}$.
Mais, pour quelles valeurs de f?

Dans un système numérique, l'ensemble de fréquence est fini et discrèt.
mais, Combien de valeur de f? et Quelle interval de f?

La densité des echantillonage en f depend du durée du séquence.

Donc for une séquence de duration 16 echantillons,

$$w(n)\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \iff W(f) * \left(\frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{16}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{16}\right)\right]\right)$$



Echantillonage en Fréquence :

Soit une séquence x(n) non-null pour $n \in [0, N-1]$.

$$x(n) = x(n) \cdot w(n) \Rightarrow X(\omega) = X(\omega) * W(\omega)$$

donc

$$X(f) = \langle e^{-j2\pi fn}, x(n)\rangle = \langle e^{-j2\pi fn}, x(n) \cdot w(n)\rangle =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot w(n)\cdot e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot(\mathrm{Cos}(2\pi fn) - j\ \mathrm{Sin}(2\pi fn))\cdot w(n)$$

$$= \langle w(n)\cdot e^{-j2\pi fn}, x(n)\rangle$$

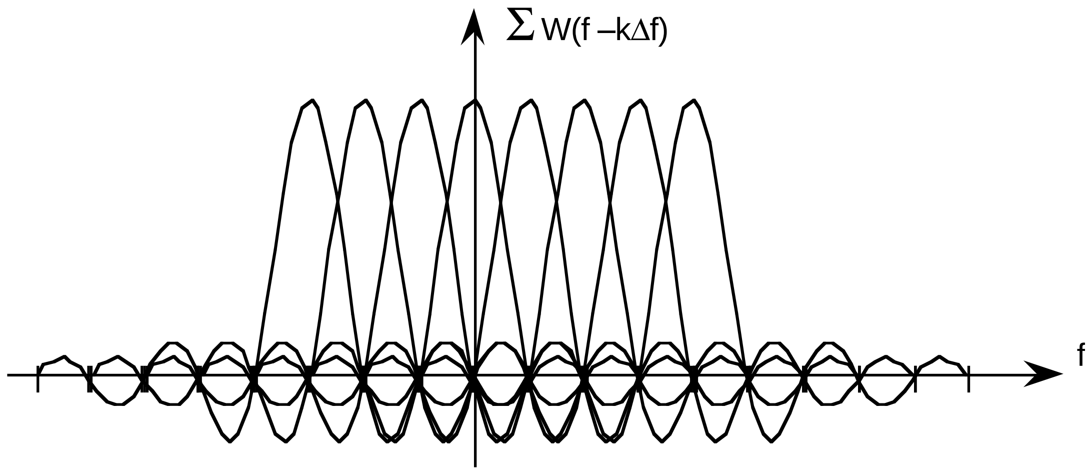
Donc il faut composeé en f avec $W(\omega) * \delta(\omega_n) = W(\omega-\omega_n)$
ou bien $W(f) * \delta(k\ \Delta f) = W(f - k\ \Delta f)$.

<u>Combien de valeur de f</u>?

Pour N échantillons indépendants, x(n), il faut N échantillons de f = k Δf.

<u>Quelles valeurs de f</u>?

Quand $\Delta f = \frac{1}{N}$ les nulls de chaque W(f – k Δf) s'aligne.



On peut distribuer les N echantillons sur l'intervalle de f entre $\{ \frac{-1}{2} , \frac{1}{2}\}$.

On obtient : f = k Δf pour $k \in [-\frac{N}{2} , \frac{N}{2} -1]$