Mise à niveau en maths discrètes

1 Démonstration

Notation $A \Rightarrow B$: A implique B

$\rightsquigarrow$ Supposons A. On a ... donc on a B.

Déf $A \Leftrightarrow B$ si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

2 Ensembles

2.1 Bases et opérations

Notation

$\emptyset$: ensemble vide
$\{1, 2, 3\}$
$\mathbb{N}$: ensembles des entiers naturels
$\mathbb{Z}$: ensembles des entiers relatifs
$\mathbb{Z}^*$: ensembles des entiers relatifs non nuls
$x \in E$: x appartient à E.
$\{x \in E \mid \ldots\}$: ensemble des éléments x de E qui vérifie ...
$card(E)$: cardinal de E (nombre d'éléments)
$\cup$: union
$\cap$: intersection
$A \setminus B$: A privé de B
$\forall x \in E$: pour tout x dans E
$\exists x \in E$: il existe x dans E

Déf $A \subseteq B$ ssi $\forall x \in A, x \in B$.

Déf $A = B$ ssi $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Exercice 1 *Montrer que*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

.

Exercice 2 *Montrer que*

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$$

.

2.2 Produits cartésiens

Déf $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Exercice 3 *Résoudre l'équation* $A \times B = \emptyset$.

Exercice 4
- *A-t-on* $(A \cap B) \times (C \cap D) =^? (A \times C) \cap (B \times D)$*?*
- *A-t-on* $(A \cup B) \times (C \cup D) =^? (A \times C) \cup (B \times D)$*?*

(donner une démonstration ou un contre-exemple)

2.3 Parties

Déf $P(E) = \{A \mid A \subseteq E\}$.

Exercice 5 *Calculer* $P(\{1, 2\})$, $P(\{1\})$, $P(\emptyset)$, $P(P(\{1\}))$, $P(P(P(\emptyset)))$.

Exercice 6 *Est-ce que ces trois assertions* $x \in P(E)$, $x \subseteq P(E)$ *et* $x \subseteq E$ *sont équivalentes ?*

2.4 Dénombrement

Exercice 7 *Soit E un ensemble fini à n élements. Quel est le cardinal, noté C_n^k de l'ensemble des parties de E à k éléments ? (sans démonstration)*

Exercice 8 *Calculer* $\Sigma_{k=0}^{n} C_n^k$.

Exercice 9 *P un polygone convexe à n sommets. ($n \geq 3$). Une diagonale de P est une droite joignant deux sommets non consécutifs. Combien P a-t-il de diagonales distinctes ?*

3 Techniques de démonstration

3.1 Absurde

$\rightsquigarrow$ (surtout pour montrer la non-existence) Montrons A. Supposons par l'absurde que A est faux. ... Contradiction. Donc on a A.

Exercice 10

Donner la négation de

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R} \Big(|x - y| < \alpha \text{ implique } |f(x) - f(y)| < \epsilon \Big)$$

Exercice 11 *Montrer que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

3.2 Récurrence - induction

$\rightsquigarrow$

- Cas de base : Je montre $\mathcal{P}(0)$.
- Cas récursif : Je montre $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
- Par récurrence, j'ai montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 12 *Soit* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$.

- *Trouver* a *et* b *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = x^2$. *Dans la suite, cette propriété est vérifiée.*
- *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ *est un entier.*
- *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{k=0}^{n} k^2 = f(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 13 *Rappeler la définition d'un arbre binaire. Soit* A *un arbre binaire. Donner une inégalité entre le nombre de noeuds dans* A *et la hauteur de* A.

Exercice 14 *Montrer que tout nombre entier* $n \geq 2$ *a un diviseur premier. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

4 Graphes et relations

4.1 Généralités

Déf Un graphe est un couple (S, A) où S est un ensemble et $A \subseteq S \times S$. Le graphe est non orienté et sans boucle si $\forall s, t \in S$, $(s, t) \in A$ ssi $(t, s) \in A$ et $\forall s \in S$, $(s, s) \notin A$.
Déf Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté sans boucle. Soit $s \in S$. Le degré de s, noté $d(s)$ est le cardinal de $R(s) = \{t \in S \mid (s, t) \in A\}$.

Exercice 15 *Calculer* $\sum_{x \in S} d(x)$.

Exercice 16 *Les 9 amis se disent bonjour. Soit ils se serrent la main, soit ils s'embrassent. Chacun d'eux embrasse 5 de ses amis. Qu'en pensez-vous ?*

Exercice 17 *Dans un pays, deux villes quelconques sont toujours reliées soit par voie ferrée, soit par route. Démontrer que l'un des deux types de voies permet d'aller de toute ville à toute ville (directement ou indirectement).*

4.2 Relation d'équivalence

Déf $R \subseteq E \times E$ est une relation d'équivalence sur E ssi

- R est réflexive : $\forall x \in E, xRx$
- R est transitive : $\forall x, y, z \in E$, $(xRy$ et $yRz)$ implique xRz
- R est symétrique : $\forall x, y \in E$, xRy implique yRx

$\rightsquigarrow$ Pour montrer qu'un objet est un 'quelque chose', on montre les points de la définition du 'quelque chose'.

Exercice 18 *Montrer que la relation* R *définie sur* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *par* $(a, b)R(x, y)$ *ssi* $ay = bx$ *est une relation d'équivalence.*

5 Logique

Exercice 19 *Donner les définitions de l'ensemble des formules de la logique propositionnelle, de valuation, de formules satisfiables et valides.*

6 Cardinalité

6.1 Fonctions

Notation $f : A \to B$ est une fonction de A dans B.
Déf $f : A \to B$ est surjective ssi $\forall b \in B, \exists a \in A \mid b = f(a)$
Déf $f : A \to B$ est injective ssi $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.
Déf $f : A \to B$ est bijective ssi $\forall b \in B, \exists! a \in A \mid b = f(a)$

Exercice 20 *Montrer que* f *est bijective ssi* f *est injective et surjective.*

6.2 Dénombrabilité

Déf Un ensemble E est dénombrable si il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to E$.

Exercice 21 *Démontrer que l'ensemble* $P(\mathbb{N})$ *n'est pas dénombrable.*