# TD4

François Schwarzentruber

5 novembre 2019

| Devoir maison à rendre le 26 novembre 2019 : tous les exercices, ou alors un des problèmes |
|---|

**Exercice 1** *Écrire un algorithme alternant qui décide GEOGRAPHIE en temps polynomial.*

**Exercice 2** *Montrer que* $NP = P^{SAT}$ *implique* $NP = coNP$.

**Exercice 3** *Montrer que si* $PH = PSPACE$ *alors il existe* $i$ *tel que* $PH = \Sigma_i^p$.

**Exercice 4** *Donner un problème* $\Sigma_i^p$*-complet et un problème* $\Pi_i^p$*-complet.*

**Exercice 5** *Montrer que* $\Sigma_k^p \cup \Pi_k^p \subseteq \Delta_{k+1}^p \subseteq \Sigma_{k+1}^p \cap \Pi_{k+1}^p$.

**Exercice 6** *Montrer que l'ensemble des formules de la logique propositionnelle classique satisfaites par une* unique *valuation est dans* $\Delta_2^p$.

**Problème 1** *Montrer que la définition de* $\Sigma_i^p$ *avec les machines alternantes et la définition de* $\Sigma_i^p$ *avec les oracles sont équivalentes.*

**Problème 2** *Montrer que le problème de décision* $G_4$ *(PEEK) est EXPTIME-complet.*
*(Lire* Provably difficult combinatorial games *de Stockmeyer et Chandra.)*

**Problème 3** *Montrer que* $BPP \subseteq \Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$.
*(Lire par exemple le chapitre correspondant dans Theory of computation Kozen.)*

**Problème 4 (dimension de Vapnik-Chervonenkis)** *La dimension de Vapnik-Chervonenkis (VC) est un concept important en apprentissage automatique statistique. Soit* $U$ *un ensemble fini. Soit* $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ *une collection de sous-ensembles de* $U$. *La dimension de VC de* $\mathcal{S}$, *notée* $VC(\mathcal{S})$, *est le cardinal du plus grand sous-ensemble* $X \subseteq U$ *tel que pour tout* $X' \subseteq X$, *il existe* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *tel que* $S_i \cap X = X'$ *(on dit que* $X$ *est pulvérisé par* $\mathcal{S}$*).*

*Un circuit booléen* $C$ *représente une collection* $\mathcal{S}$ *de manière succincte si* $S_i$ *contient exactement les éléments de* $x \in U$ *pour lesquels* $C(i, x) = 1$. *Soit*

$$\textbf{\textit{VC-DIMENSION}} = \{(C, k) \mid C \text{ représente une collection } \mathcal{S} \text{ avec } VC(\mathcal{S}) \geq k\}$$

- *Montrer que* ***VC-DIMENSION*** $\in \Sigma_3^p$.
- *Montrer que* ***VC-DIMENSION*** *est* $\Sigma_3^p$*-dur.*

**Problème 5 (Wikipedia)** *Améliorer la section "Exemples de problèmes" de la page Wikipedia Hiérarchie polynomiale. On s'aidera des références données dans "Completeness in the Polynomial-Time Hierarchy. Marcus Schaefer and Christopher Umans".*