CVFP - Terminal

Année 2014-2015

durée : 2 heures

L'effort pédagogique dans les réponses est prise en compte dans l'évaluation. Écrivez assez grand. Rédigez soigneusement. Les exercices sont indépendants.

`Exercice 1` `NP-complétude`

On considère le langage $\mathcal{L}$ suivant :

$$\varphi ::= t = t \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi)$$
$$t ::= x \mid f_0 \mid \ldots f_n(\underbrace{t, \ldots, t}_{n \text{ termes}}) \mid \ldots$$

où x est un symbole de variable, f_n est un symbole de fonctions d'arité n. Ce sont les formules du premier ordre sans quantificateurs sans prédicat sauf l'égalité. Le symbole $=$ est interprété comme l'égalité.

1. Montrer que le problème de satisfiabilité d'une formule de $\mathcal{L}$ est NP-complet.

`Exercice 2` `DPLL et apprentissage de clauses`

On considère la formule ϕ suivante :

$$\underbrace{(a \vee x \vee y)}_{\alpha} \wedge \underbrace{(a \vee b)}_{\beta} \wedge \underbrace{(\neg b \vee c \vee d)}_{\gamma} \wedge \underbrace{(\neg d \vee e \vee f)}_{\delta} \wedge \underbrace{(\neg x \vee \neg y)}_{\epsilon} \wedge \underbrace{(x \vee \neg y)}_{\theta} \wedge \underbrace{(\neg x \vee y)}_{\lambda}$$

où a, b, c, d, e, f, x, y sont des propositions atomiques.

1. Construire le graphe d'implication avec les choix suivants : $\neg a, \neg c, \neg e, \neg x$.

2. Expliquez comment fonctionne le backtracking sur cet exemple.

On suppose maintenant que l'on utilise le backjumping avec apprentissage de clauses.

3. À ce stade, quelle est la clause apprise ? Expliquez comment fonctionne le backjumping sur cet exemple.

Exercice 3 **Fourier-Motzkin**

Soit (S) le système suivant :

$$\begin{cases} x - y \leq 0 & ① \\ x - z \leq 0 & ② \\ -x + y + 2z \leq 0 & ③ \\ -z \leq -1 & ④ \end{cases}$$

1. Appliquer la procédure d'élimination des variables de Fourier-Motzkin pour savoir s'ils existent $x, y, z \in \mathbb{R}$ qui vérifient (S). On éliminera les variables dans l'ordre suivant : x, y, z.

Exercice 4 **Nelson-Oppen**

$T_{\mathbb{Z}}$, $T_{\mathbb{R}}$, T_{UF} dénote respectivement la théorie des inégalités linéaires sur les entiers, les réels et la théorie de l'égalité avec fonctions non interprétées. On souhaite ici tester si des formules sont satisfiables dans des unions de théories.

Pour chacun des trois exemples, on demande d'indiquer quelle version de Nelson-Oppen (déterministe ou non-déterministe) est appropriée, d'appliquer l'algorithme en expliquant les étapes de calcul, sans détailler les étapes de calcul dans le $T_{\mathbb{Z}}$-solveur, le $T_{\mathbb{R}}$-solveur ou le T_{UF}-solveur utilisé.

1. Tester si $1 \leq x \wedge x \leq 2 \wedge f(x) \neq f(1) \wedge f(x) \neq f(2)$ est $T_{\mathbb{Z}} \cup T_{UF}$-satisfiable.

2. Tester si $1 \leq x \wedge x \leq 2 \wedge f(x) \neq f(1) \wedge f(x) \neq f(2)$ est $T_{\mathbb{R}} \cup T_{UF}$-satisfiable.

3. Tester si $f(f(x) - f(y)) \neq f(z) \wedge x \leq y \wedge y + z \leq x \wedge 0 \leq z$ est $T_{\mathbb{R}} \cup T_{UF}$-satisfiable.