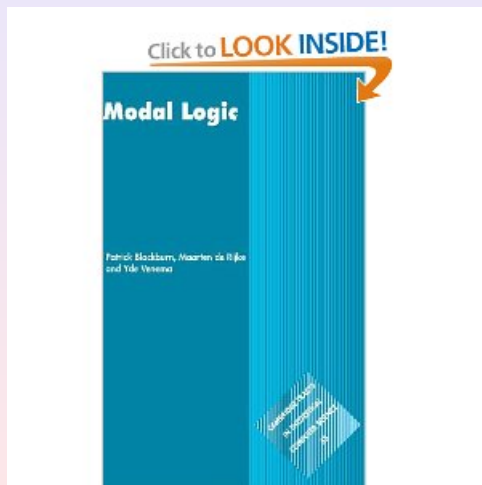
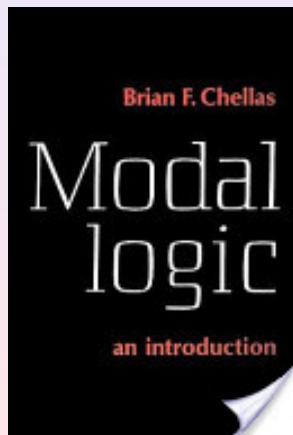


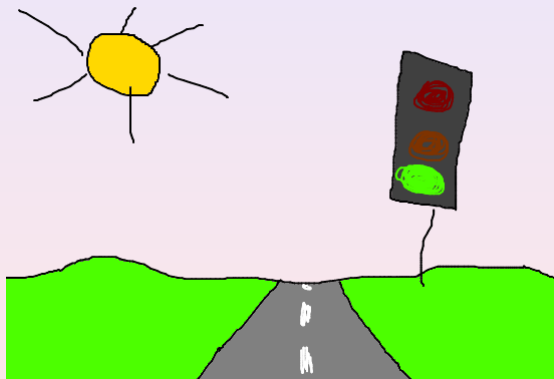
Logique modale... un peu d'histoire

François SCHWARZENTRUBER

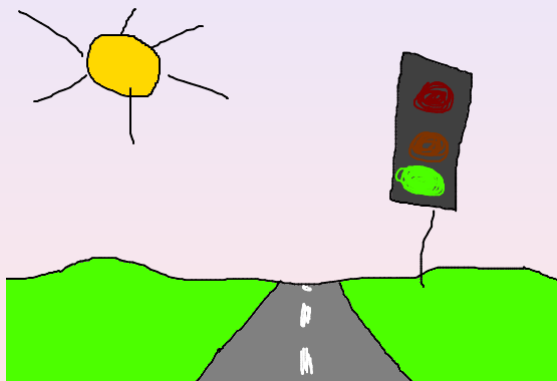
Références



Causalité : est-ce que le beau temps implique que le feu soit au vert ?



Causalité : est-ce que le beau temps implique que le feu soit au vert ?



$\nu \models \text{beautemps} \rightarrow \text{feuvent}$

Clarence Irving Lewis. A Survey of Symbolic Logic (1918)

- $I\varphi$: il est impossible que φ ;
- $\varphi \prec \psi = I(\varphi \wedge \neg\psi)$ (φ strictly implies ψ)

300

A Survey of Symbolic Logic

1-1 $p q \supset q p$

If p and q are both true, then q and p are both true.

1-2 $q p \supset p$

If q and p are both true, then p is true.

1-3 $p \supset p p$

If p is true, then p and p are both true.

1-4 $p(q r) \supset q(p r)$

The correspondence exhibited in the last line seems incomplete. But we should note with care that while

3-11 $p \circ q \supset q \circ p$

If p and q are consistent, then q and p are consistent.

3-12 $q \circ p \supset \sim p$

If q and p are consistent, then it is possible that p be true.

3-13 $\sim \sim p \supset p \circ p$

If it is possible that p be true, then p is consistent with itself.

3-14 $p \circ (q r) \supset q \circ (p r)$

Lewis and Langford. Symbolic Logic (1932)

Systemes axiomatiques :

- **S1;**
- **S2;**
- **S3;**
- **S4;**
- **S5.**



Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkülus (1933)

- Gödel redéfinit la logique **S4** :
logique propositionnelle + \Box
- Il plonge la logique (propositionnelle) intuitionniste dans **S4**.



Alfred Tarski

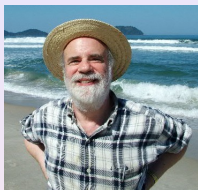
McKinsey, Tarski... (1941-1945)

- Décidabilité de **S2** et **S4**
- Interprétation des symboles comme des opérations algébriques
- Interprétation topologique de **S4**
 $\Box\varphi$ est vrai en x ssi φ dans un voisinage de x .

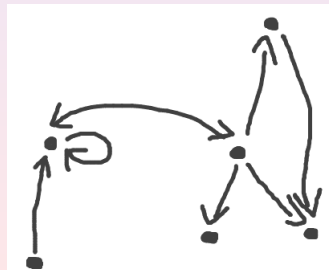
Jónsson et Tarski : résultats généraux entre preuves et algèbres (sémantique)

- Carnap. Premier lien entre modalité et relation.
(1946-1947)
 $\Box\varphi$ est satisfaite en $s \in S$ ssi pour tout $s' \in S$, φ est satisfaite en s'
- Von Wright. An Essay in Modal Logic. (1951)
Tente de modéliser l'obligation, la croyance, la connaissance.
- Prior (1950-1955). Temporal logic.
 $\Box\varphi$: φ est toujours vraie.
Sémantique $(\mathbb{N}, <)$

Révolution : sémantique relationnelle !



Saul Kripke

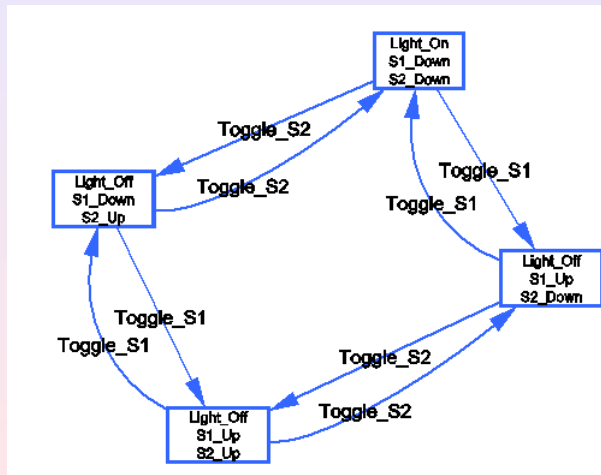
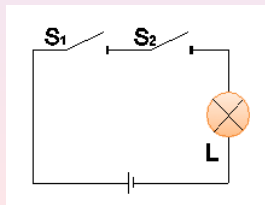


Révolution : sémantique relationnelle !

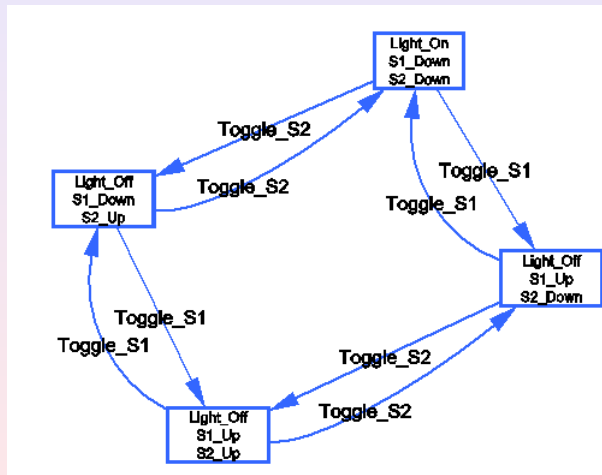
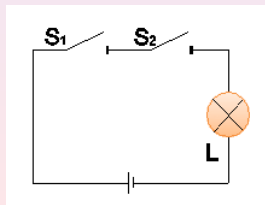
Kripke. A completeness theorem in modal logic. (1959)

- **K** = formules valides sur la classe de tous les modèles
- **S5** = formules valides sur la classe de tous les modèles où R est la relation globale
- **S4** = formules valides sur la classe de tous les modèles où R est une relation réflexive et transitive

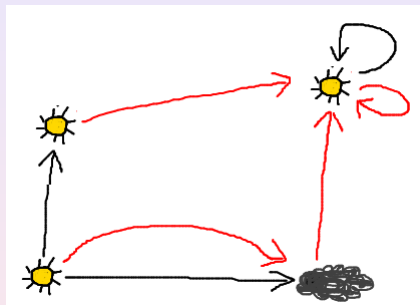
Révolution : sémantique relationnelle !



Révolution : sémantique relationnelle !



Révolution : sémantique relationnelle !



Hintikka. Knowledge and Belief. (1962)

- $\Box\varphi$: je sais que φ ;
- $\square\varphi$: je crois que φ ;

- Invention du modèle canonique
Makinson, Cresswell, Lemmon, Scott, etc.
- Filtration : construire des modèles finis
An introduction to modal logic : the Lemmon notes (écrit avant 1966, publié en 1977)

“However, it seems reasonable to conjecture that, if a consistent normal K -system S is *closed with respect to substitution instances*... then S determines a class Γ_S of world systems such that $\vdash_S \varphi$ iff $\models_{\Gamma_S} \varphi$.”

- S.K. Thomason, Fine (1972-1974).
Résultat d'incomplétude.
- Expressivité : bissimulations entre modèle qui caractérise exactement le pouvoir expressif de la logique modale (théorème de Van Benthem)
- Informatique

Création de nouvelles logiques modales

- Fischer, Ladner, Pratt, Harel : Propositional Dynamic logic
 $[\pi]\varphi$: après toute exécution du programme π , φ est vraie.
- Pnueli, Gabbay, Clarke, Emerson : logiques temporelles
- Fagin, Halpern, Moses, Vardi : logique temporelle et connaissances
- Alur, Henzinger, Kupferman : Logique multi-agents, théorie des jeux : Alternating-time temporal logic.
 $\langle\langle Ann, Bob \rangle\rangle F\varphi$
- Baltag, van Ditmarsch : logique dynamique et connaissances

Logique de descriptions

mamifere \sqsubseteq *animal*

mamifere $\sqsubseteq \exists R_{\text{contient}} \cdot \text{oeil}$

- De Giacomo, Areces, de Rijke : Lien entre logiques modales et logiques de descriptions;
- Berardi, Calvanese and Giuseppe : Reasoning on UML Class Diagrams (2005)