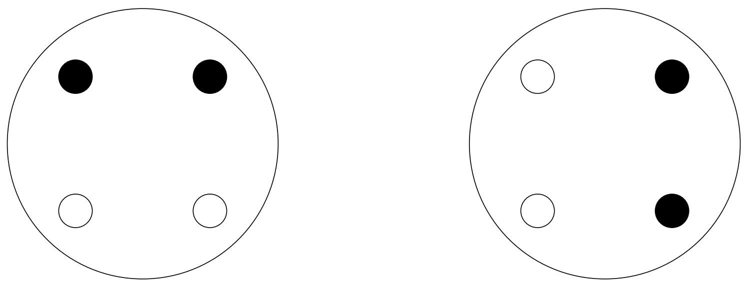
Module Langages Formels
TD 3 : Automates, Lemme de l'étoile, Propriétés de clôture

Exercice 1 `Le barman aveugle`

On dispose de 4 jetons, chacun ayant une face blanche et une face noire. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 jetons sur la même couleur. Dès que les 4 jetons sont retournés, la partie s'arrête et le barman a gagné.

Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 jetons. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.



En utilisant une modélisation par des automates, montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.

Exercice 2 `Propriétés de clôture des langages rationnels en utilisant les automates`

Shuffle Soient $u, v \in \Sigma^*$. On définit l'ensemble des shuffles (mélanges) de u et v par :

$$u \sqcup\!\sqcup\, v = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_1, v_1, \cdots u_n, v_n \in \Sigma^* \text{ tels que } u = u_1 \cdots u_n, v = v_1 \cdots v_n \; et \; w = u_1 v_1 \cdots u_n v_n\}$$

Pour $K, L \in \Sigma^*$, on diéfinit $K \sqcup\!\sqcup\, L = \bigcup_{u \in K, v \in L} \{u \sqcup\!\sqcup\, v\}$.

Le mélange de deux mots peut correspondre à la trace de deux exécutions de processus totalement indépendants.
Montrer que si K et L sont des langages reconnaissables, $K \sqcup\!\sqcup\, L$ est reconnaissable.

Mixage Soient $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Sigma$, avec $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, soit $u \in \Sigma_1^*$ et $v \in \Sigma_2^*$. On définit le produit de mixage de u et v par :

$$u \uparrow_{\Sigma_1,\Sigma_2} v = \{w \in \Sigma \mid \pi_{\Sigma_1}(w) = u \text{ et } \pi_{\Sigma_2}(w) = v\}$$

où π_A est le morphisme de Σ^* dans A^* défini par $\pi_A(x) = x$, pour tout $x \in A$, et $\pi_A(x) = \epsilon$, pour tout $x \in \Sigma \setminus A$.

Pour $K \in \Sigma_1^*$ et $L \in \Sigma_2^*$, on définit $K \uparrow_{\Sigma_1,\Sigma_2} L = \bigcup_{u \in K, v \in L} \{u \uparrow_{\Sigma_1,\Sigma_2} v\}$.

Le mixage décrit l'idée que des processus exécutent certaines actions en même temps, celles de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.
Montrer que si K et L sont reconnaissables alors $K \uparrow_{\Sigma_1,\Sigma_2} L$ est reconnaissable.

Exercice 3 `Différentes versions du lemme de l'étoile`

Dans cet exercice, nous allons considérer les trois versions du lemme de l'étoile :

1. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u \in L,\ |u| \geq n \implies \exists v, t, w \in \Sigma^*, \quad u = vtw \ \wedge\ |t| > 0 \wedge \forall m \in \mathbb{N},\ vt^m w \in L$$

2. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u = rst \in L,\ |s| \geq n \implies \exists v, w, x \in \Sigma^*, \quad s = vxw \wedge\ |x| > 0 \wedge \forall m \in \mathbb{N},\ rvx^m wt \in L$$

3. Si L est un langage reconnu par un automate fini, alors

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall u = ru_1u_2 \ldots u_n s \in L,\ (\forall i, |u_i| \geq 1) \implies \exists 1 \leq i < j \leq n, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \\ ru_1 \ldots u_{i-1}(u_i \ldots u_j)^m u_{j+1} \ldots u_n s \in L$$

3.1. Soit $L = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$, montrer que L vérifie le lemme 1 mais pas le lemme 2.

3.2. Soit $L' = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \Sigma^*(aa + bb + cc + dd + ac + bd)\Sigma^*$, avec $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Montrer que L' vérifie le lemme 2 mais pas le lemme 3.