

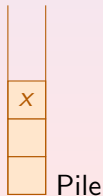
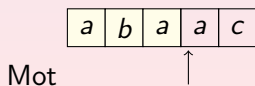
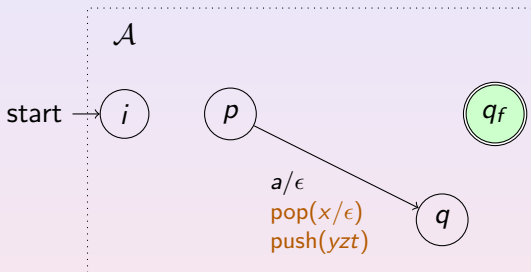
# Automates à pile - Cours 7

Francois Schwarzentruher

ENS Rennes, France

2015

## Automate à pile



## Motivation

### Ce qu'on a

- Une classe  $Alg(\Sigma)$  qui contient  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , etc.
- Stable par concaténation,  $\cup$ , étoile
- Des lemmes de pompage
- Pas de classes d'automates associée à  $Alg(\Sigma)$
  
- Problème d'appartenance du mot en  $O(|w|^3 P(|G|))$
  
- Non stable par complémentaire

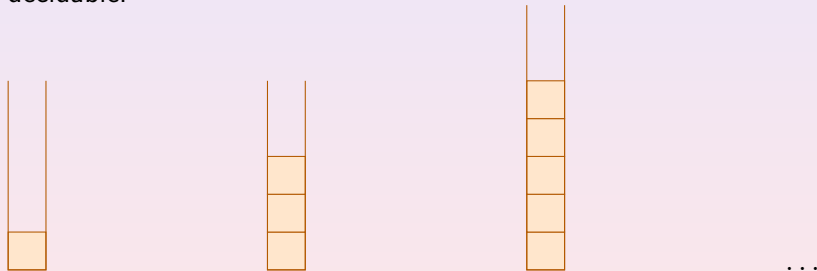
## Motivation

### Ce qu'on a / Ce qu'on aura à la fin du cours

- Une classe  $Alg(\Sigma)$  qui contient  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , etc.
- Stable par concaténation,  $\cup$ , étoile
- Des lemmes de pompage
- Automates à pile qui caractérisent  $Alg(\Sigma)$ 
  - Sous-classe d'automates : automates à pile déterministes
  - Sous-classe de langages : langages déterministes
- Problème d'appartenance du mot en  $O(|w|^3 P(|G|))$ 
  - En  $O(|w|)$  sur les langages déterministes
- Non stable par complémentaire
  - Langages déterministes stables par complémentaire

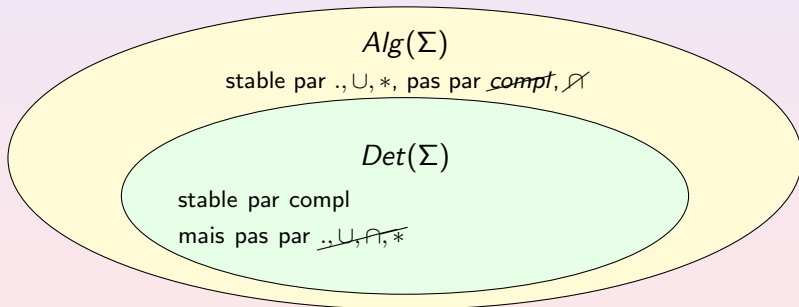
## Motivation

Nombre de configurations infinis, pourtant le problème du mot est décidable.



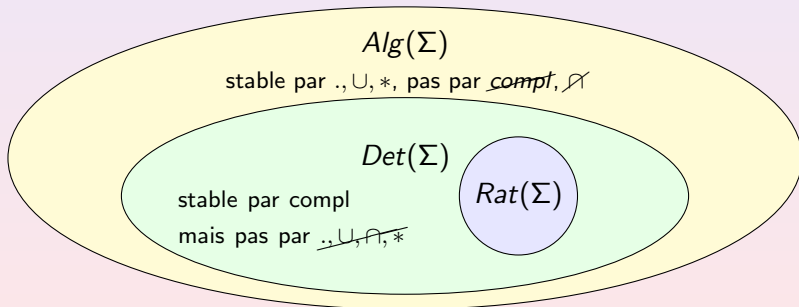
## Mais tout ne se passe pas comme prévu

- Automates à pile non-déterministes **plus expressifs** que les automates à pile déterministes
- Langages déterministes ne sont pas stables par  $\cup, \cap, \cdot, *$



## Mais tout ne se passe pas comme prévu

- Automates à pile non-déterministes **plus expressifs** que les automates à pile déterministes
- Langages déterministes ne sont pas stables par  $\cup, \cap, \cdot, *$

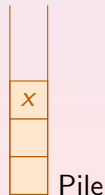
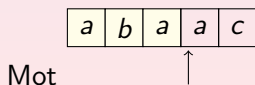
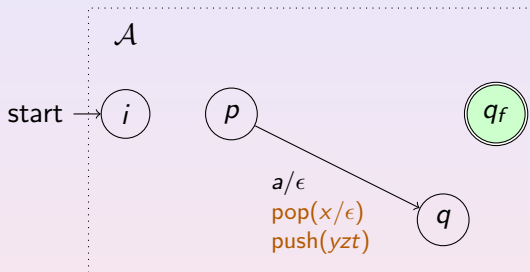


# Outline

- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
- 3 Automates à pile déterministes



# Automate à pile



# Outline

- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
  - Grammaires vers automates à pile
  - Automates à pile vers grammaires
- 3 Automates à pile déterministes

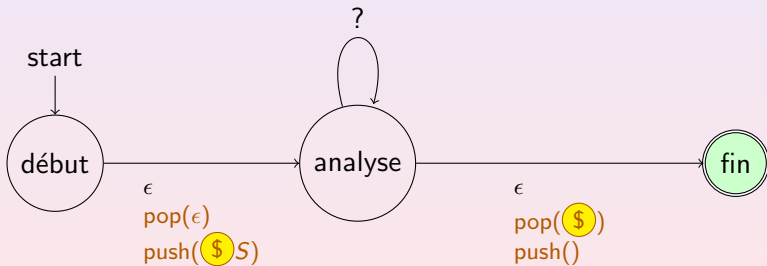
# Outline

- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
  - Grammaires vers automates à pile
  - Automates à pile vers grammaires
- 3 Automates à pile déterministes

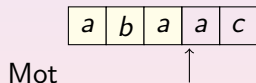
## Grammaires vers automates à pile

On a une grammaire  $G...$

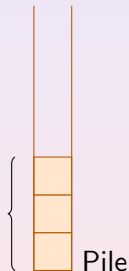
On construit un automate à pile  $\mathcal{A}$



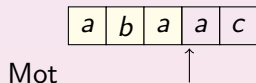
## Grammaire vers automates à pile



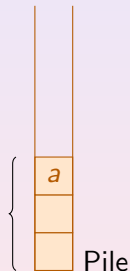
doit correspondre  
avec ce qui reste à  
lire dans le mot



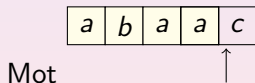
## Grammaire vers automates à pile



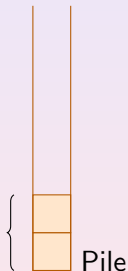
doit correspondre  
avec ce qui reste à  
lire dans le mot



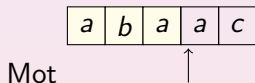
## Grammaire vers automates à pile



doit correspondre  
avec ce qui reste à  
lire dans le mot

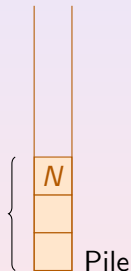


## Grammaire vers automates à pile



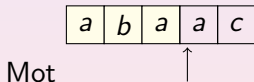
$N \rightarrow abc$

doit correspondre  
avec ce qui reste à  
lire dans le mot



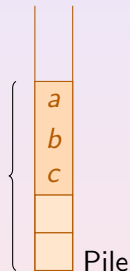


## Grammaire vers automates à pile



$N \rightarrow abc$

doit correspondre  
avec ce qui reste à  
lire dans le mot



# Outline

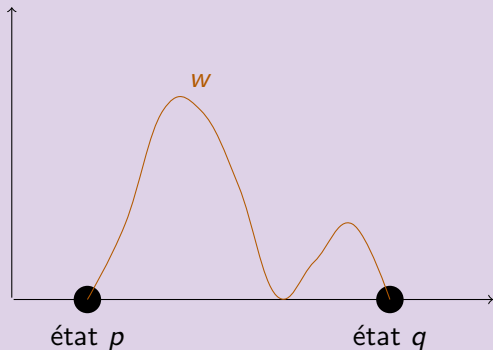
- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
  - Grammaires vers automates à pile
  - Automates à pile vers grammaires
- 3 Automates à pile déterministes

## Automates à pile vers grammaires

### Idée générale

Créer un non-terminal  $N_{pq}$  des mots  $w$  qui font

hauteur de la pile



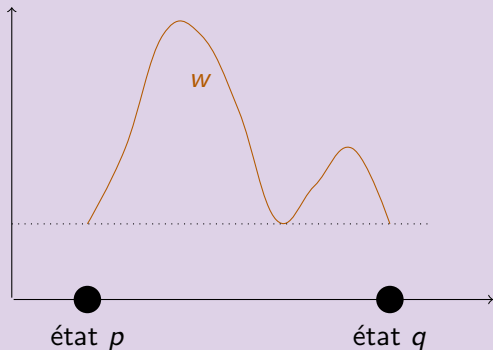
Evolution  
dans le  
temps

## Automates à pile vers grammaires

### Idée générale

Créer un non-terminal  $N_{pq}$  des mots  $w$  qui font

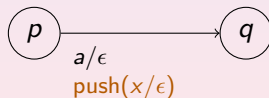
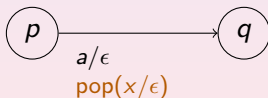
hauteur de la pile



Evolution  
dans le  
temps

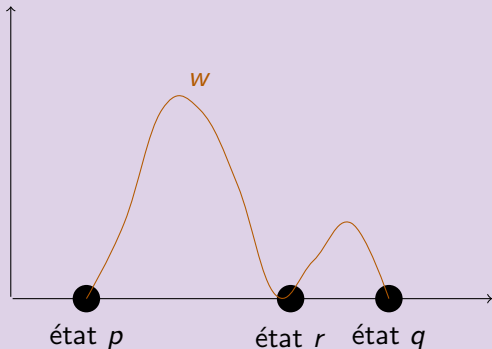
## D'abord on transforme un peu l'automate

- Un seul état final
- L'automate vide sa pile avant d'accepter
- Des transitions de deux sortes



## Premier type de règle

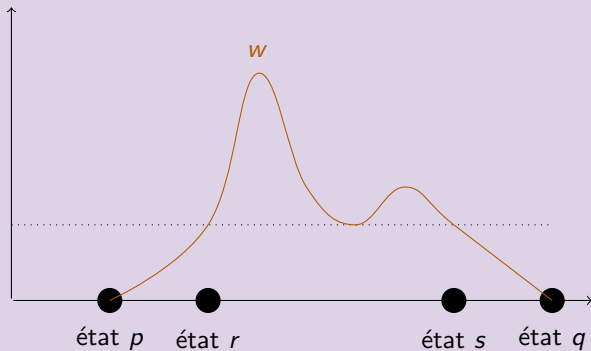
hauteur de la pile



Evolution  
dans le  
temps

## Deuxième type de règle

hauteur de la pile



Évolution  
dans le  
temps

# Outline

- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
- 3 Automates à pile déterministes
  - Définition
  - Stabilité par complémentaire

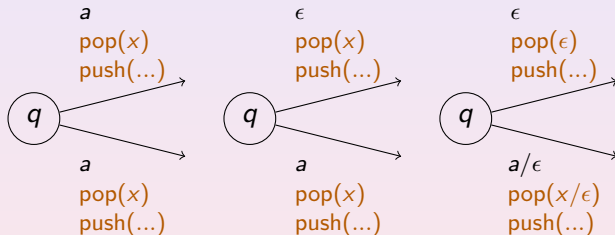


# Outline

- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
- 3 Automates à pile déterministes
  - Définition
  - Stabilité par complémentaire

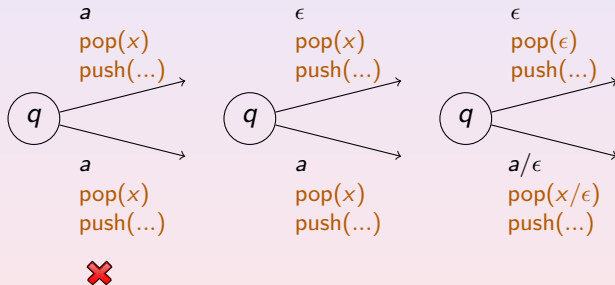
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x \in \Gamma$ ,



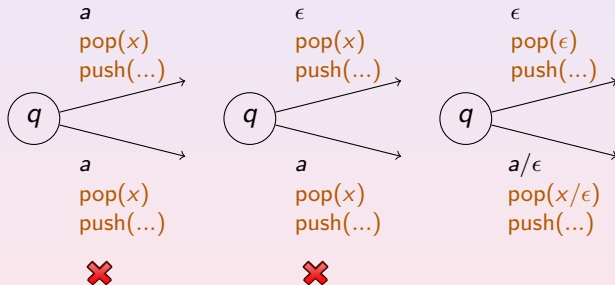
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x \in \Gamma$ ,



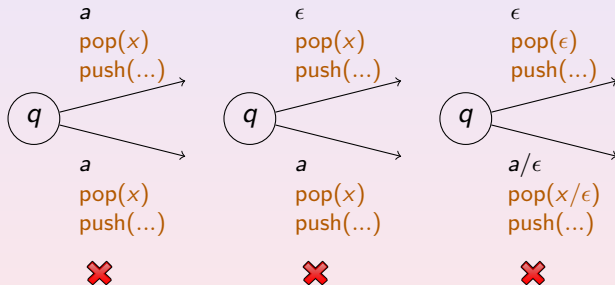
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x \in \Gamma$ ,



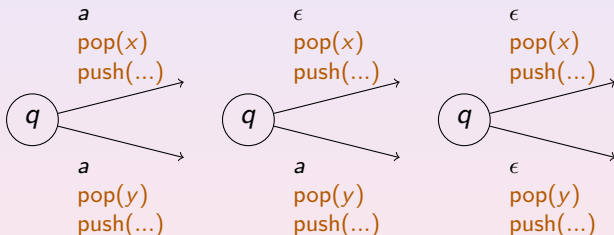
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x \in \Gamma$ ,



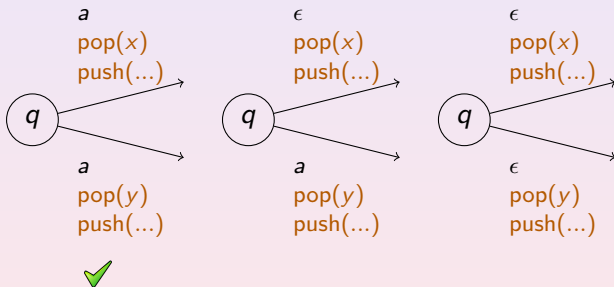
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x, y \in \Gamma$ ,  $x \neq y$ ,



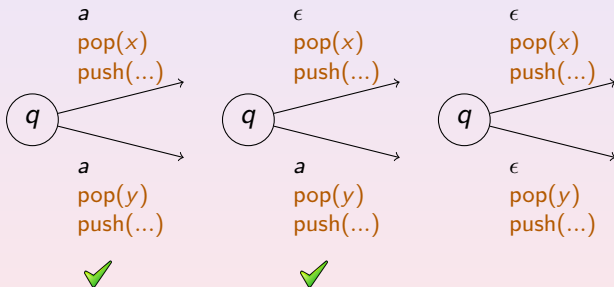
## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x, y \in \Gamma$ ,  $x \neq y$ ,



## Automates à pile déterministes

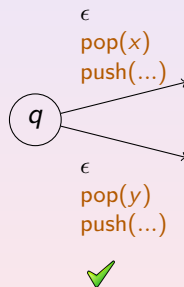
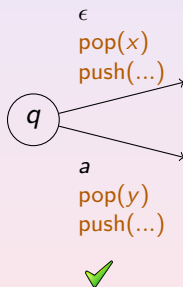
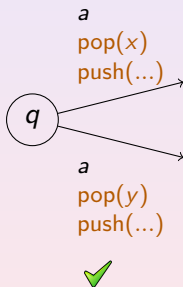
For all  $a \in \Sigma$ ,  $x, y \in \Gamma$ ,  $x \neq y$ ,





## Automates à pile déterministes

For all  $a \in \Sigma$ ,  $x, y \in \Gamma$ ,  $x \neq y$ ,

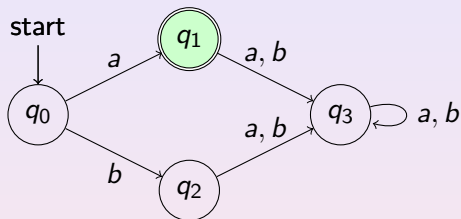


# Outline

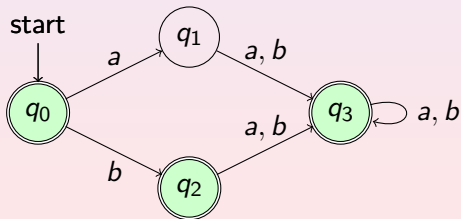
- 1 Définition d'un automate à pile
- 2 Équivalence entre automates à pile et grammaire
- 3 Automates à pile déterministes
  - Définition
  - Stabilité par complémentaire

## Flashback : automate fini déterministe complet

$\mathcal{A}$

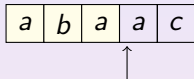



$\overline{\mathcal{A}}$



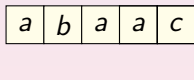
## Problèmes techniques

- L'automate ne lit peut-être pas tout le mot

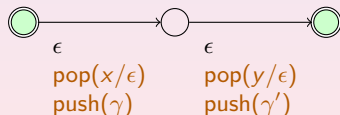



après inversion finaux/non finaux : toujours 

- L'automate peut aller dans des états finaux, non-finaux etc. sans avancer dans le mot.

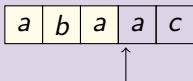


puis



après inversion finaux/non finaux : toujours 

## Pourquoi l'automate ne finit pas la lecture du mot ?



- Il se bloque car la pile est vide et aucune transition

$a/\epsilon$   
 $\text{pop}(\epsilon)$  ...  
 $\text{push}(\gamma)$

- ou il prend une infinité d' $\epsilon$ -transitions

$\epsilon$   
 $\text{pop}(x/\epsilon)$  ...  
 $\text{push}(\gamma)$