Entropie

1. **Entropie de fonctions de variables aléatoires. [CT Ex. 2.4]**

   Soit X une variable aléatoire discrète. Montrez que l'entropie d'une fonction de X est plus petite ou égale que l'entropie de X. Précisez dans quel cas on a égalité et interprétez le résultat.

2. **Fonctions. [CT Ex. 2.2]**

   (a) Soit $Y = X^7$, où X est une variable aléatoire prenant des valeurs entières positives et négatives. Quelle est la relation (d'ordre) entre $H(X)$ et $H(Y)$?

   (b) Et si $Y = X^2$?

   (c) Pour le cas précédent trouver un encadrement pour $H(X)$.

3. **Sommes modulo 2 de variables aléatoires**

   Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre 1/2. Supposons de plus que ces variables sont mutuellement indépendantes. Soit $X_4 = X_1 \oplus X_2$, $X_5 = X_1 \oplus X_3$ et $X_6 = X_2 \oplus X_3$.

   (a) Calculez $H(X_4), H(X_4, X_5)$ et $H(X_4, X_5, X_6)$.

   (b) Calculez $I(X_1; X_2, X_3), I(X_1; X_2, X_3, X_4)$ et $I(X_1, X_2; X_3, X_4, X_5)$.

4. **Information mutuelle. [CT Ex. 2.43]**

   (a) Soit le jeu de pile ou face réalisé avec une pièce non pipée. Modélisez le problème avec les variables aléatoires V et C qui représentent ce qui apparaît sur les faces visibles et cachées de la pièce. Quelle est l'information mutuelle entre les faces visibles et cachées de la pièce i.e. $I(V; C)$?

   (b) Soit le jeu de dé (non pipé) à 6 faces. Modélisez le problème avec une variable aléatoire S (C) qui représente ce qui apparaît sur la face supérieure (cachée) du dé. Quelle est l'information mutuelle entre la face cachée et supérieure du dé i.e. $I(S; C)$?

   (c) Pour le même problème que la question précédente, calculez l'information mutuelle entre la face supérieure (S) et celle juste devant vous du dé (D) ?

5. **2 interprétations...**

   (a) Soient X, Y_1, Y_2 des v.a. binaires. Supposons que $I(X; Y_1) = 0$ et $I(X; Y_2) = 0$. A-t-on $I(X; Y_1, Y_2) = 0$? Vrai ou faux ? Prouvez-le ou trouvez un contre-exemple.

   (b) Si $I(X; Y_1) = 0$ et $I(X; Y_2) = 0$; a-t-on $I(Y_1; Y_2) = 0$? Autrement dit si X et Y_1 sont indépendants et si X et Y_2 aussi, est-ce que Y_1 et Y_2 le sont ?

6. **Une mesure de la corrélation. [CT Ex. 2.11]**

   Soient X_1 et X_2 identiquement distribuées (mais pas nécessairement indépendantes). Soit

   $$\rho = 1 - \frac{H(X_2|X_1)}{H(X_1)}.$$

   (a) Montrez que $\rho = \dfrac{I(X_1; X_2)}{H(X_1)}$.

   (b) Montrez que $0 \leq \rho \leq 1$.

   (c) Quand a-t-on $\rho = 0$?

   (d) Quand a-t-on $\rho = 1$?

7. **Variables aléatoires indépendantes 2 à 2**.
Soit les variables aléatoires X, Y, Z Bernoulli de paramètre 1/2. Ces trois variables sont indépendantes deux à deux, c'est-à-dire $I(X;Y) = I(X;Z) = I(Y;Z) = 0$

   a) Avec cette contrainte d'indépendance, quelle est la valeur minimale que peut prendre $H(X,Y,Z)$?
   b) Donnez un exemple où cette borne peut être atteinte.

8. **Entropie d'une somme. [D'après CT Ex. 2.14]**
Soit les variables aléatoires X, Y prenant leurs valeurs dans les alphabets finis $\{x_1, \ldots, x_r\}$ et $\{y_1, \ldots, y_s\}$. Soit $Z = X + Y$.

   a) Montrez que $H(Z|X) = H(Y|X)$. Puis, montrez que si X et Y sont indépendantes, alors $H(Z|X) = H(Y)$, $H(Y) \leq H(Z)$ et $H(X) \leq H(Z)$. *Donc l'addition de 2 variables aléatoires indépendantes augmente l'incertitude.*
   b) Donnez des exemples de variables aléatoires X, Y telles que $Z = X + Y$ et $H(Y) > H(Z)$ et $H(X) > H(Z)$.
   c) Sous quelles conditions a-t-on $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

9. **Entropie de premier succès. [CT Ex. 2.1]**

On joue au jeu de pile ou face jusqu'à ce que la première face apparaisse. On suppose le cas d'une pièce **pipée**. Notons X le nombre de lancers nécessaire.

   (a) Quelle est l'entropie de X en bits ?
   (b) Considérez la suite de questions :
      - Est-ce que le résultat du premier lancer est Face ? (soit Y_1 la réponse)
      - deuxième lancer est Face ? (soit Y_2 la réponse)

      Quel est le nombre moyen de questions nécessaires pour déterminer X ?
      Cette suite de questions est-elle optimale pour déterminer X ?
   (c) Soit Z, le nombre de lancers jusqu'à ce que la face apparaisse pour la deuxième fois. Montrez le résultat suivant $H(Z) = H(X_1 + X_2) < H(X_1, X_2) = 2H(X_1)$ et interprétez.

Indication :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

10. **Entropie d'un mélange disjoint. [CT Ex. 2.10]**

Soient X_1 et X_2 des v.a. discrètes sur $\mathcal{X}_1 = 1, 2, ..., m$ et $\mathcal{X}_2 = m+1, ..., n$ et de lois $p_1(.)$ et $p_2(.)$. Notez que les alphabets sont disjoints. Notons

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{avec la probabilité } \alpha \\ X_2, & \text{avec la probabilité } 1-\alpha \end{cases}$$

   (a) Calculez $H(X)$ en fonction de $H(X_1), H(X_2)$ et α.
   (b) Maximisez $H(X)$ sur α et montrez que $2^{H(X)} \leq 2^{H(X_1)} + 2^{H(X_2)}$ et interprétez en utilisant le fait que $2^{H(X)}$ est la taille effective de l'alphabet.
   (c) Supposons maintenant que X_1 et X_2 sont uniformément distribuées sur leurs alphabets. Quelle est la valeur de α maximisant $H(X)$