

# Quelques aspects de la turbo-égalisation

Aline ROUMY<sup>1,2</sup>, Inbar FIJALKOW<sup>1</sup>, Didier PIREZ<sup>2</sup>, Patrick DUVAUT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Equipe de Traitement des Images et du Signal, UPRES-A CNRS 8051  
ETIS / ENSEA-UCP, 6 av. du Ponceau, 95014 Cergy Cedex, France

<sup>2</sup>THOMSON-CSF Communications TTC/TSI  
BP 156, 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers Cedex, France

roumy@ensea.fr, ano409@tcc.thomson-csf.com, fijalkow@ensea.fr, didier.pirez@tcc.thomson-csf.com

**Résumé** — On étudie la turbo-égalisation en tant qu'algorithme d'égalisation et de décodage conjoints. L'analyse des performances montre que ce traitement itératif présente un point de déclenchement, i.e. qu'il existe une valeur seuil du rapport signal à bruit à partir de laquelle les performances s'améliorent quand le nombre d'itérations augmente, produisant un effet d'avalanche. Nous montrons ici l'influence de différents facteurs sur ce point de déclenchement et cet effet d'avalanche, notamment les performances de l'égaliseur de la première itération et la capacité de l'entrelaceur à bien décorréler le bruit des données.

**Abstract** — This paper deals with turbo-equalization as a joint equalization and decoding algorithm. The performance analysis shows that there is a trigger point in this iterative process, just followed by a breakdown effect. Actually after a given point (the trigger one), the BER decreases widely as a function of the decoding step  $p$ . We show how these effects are sensitive to the equalizer of the very first iteration and the interleaver.

## 1 Introduction

Nous considérons ici les transmissions sur canaux bruités et dispersifs en temps, où la chaîne de communication comporte un ensemble codeur/décodeur de canal et un égaliseur (cf. Figure 1).

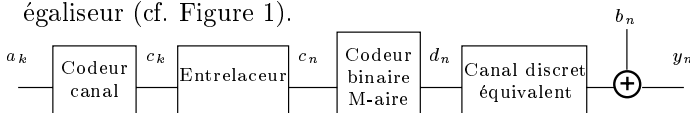


FIG. 1: Chaîne de communication

- $a_k$  : bits utiles,
- $c_k$  : bits codés,
- $c_n$  : bits codés et entrelacés,
- $d_n$  : symboles codés et entrelacés,
- $b_n$  : bruit additif blanc gaussien,
- $y_n$  : échantillons issus du canal discret équivalent.

Dans ce contexte, les récepteurs actuels sont des systèmes disjoints, où chaque traitement (égalisation puis décodage) se termine par une prise de décision qui représente donc une perte d'information. Ainsi, des systèmes qui prendraient en compte conjointement le codage et le canal de propagation pourraient permettre d'améliorer les performances car ils utiliseraient la totalité de l'information disponible. Le traitement optimal d'égalisation et de décodage conjoints serait un algorithme MAP correspondant au système {codeur + entrelaceur + canal}. L'usage d'un tel algorithme est prohibé par sa complexité exponentielle en la longueur des blocs traités (soit au moins la taille de l'entrelaceur). Aussi, on lui préfère un traitement itératif directement inspiré des turbo-codes [2] et appelé turbo-détection [4]. Cet algorithme, moins complexe que le précédent, fournit de bonnes performances mais il présente encore une grande complexité car l'égaliseur utilisé est un détecteur

maximisant les probabilités a posteriori. Ici, nous considérons une version simplifiée de ce turbo-détecteur, qui est appelée turbo-égaliseur [5]. Ce dernier traitement sous-optimal présente le double avantage d'être peu complexe, tout en maintenant des performances intéressantes. En effet, sur certains canaux, il est possible de retrouver les performances du canal à bruit additif blanc gaussien avec codage, i.e. de se débarrasser complètement de la dispersion temporelle du canal de propagation.

Le but de notre article est d'étudier les limitations de la structure actuelle du turbo-égaliseur afin d'en améliorer les performances. Notre étude s'inspire de [3], qui traite des turbo-codes.

## 2 Turbo-égalisation : principe

Nous nous proposons maintenant de présenter plus avant les principales caractéristiques du turbo-égaliseur (cf. Figure 2). Il s'agit d'un traitement itératif, où le résultat du décodeur de l'itération  $p - 1$  est utilisé par l'égaliseur de l'itération  $p$ .

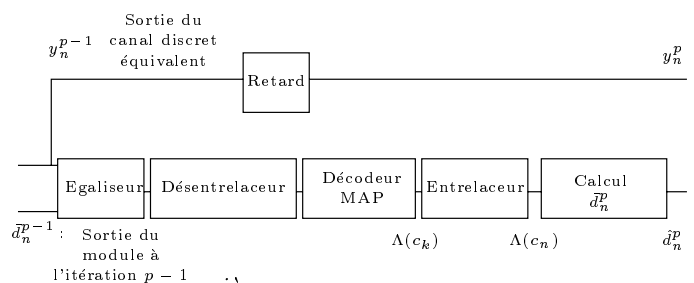


FIG. 2:  $p$  ième module du turbo-égaliseur

Le décodeur est un algorithme MAP [1]. Il fournit l'esti-

mation  $\hat{a}_k$  des bits utiles en maximisant leurs probabilités a posteriori. Pour chaque itération  $p$  du turbo-égaliseur, on peut alors calculer le taux d'erreur binaire (TEB) de ces estimations  $\hat{a}_k$  i.e. le TEB en sortie du décodeur présenté Figures 5, 6, 7 et 10. Afin de poursuivre l'étude, précisons que le décodeur fournit également à sa sortie une information pondérée sur les bits codés. En effet, à partir des probabilités a posteriori de transition d'un état du treillis vers un autre, on déduit la probabilité a posteriori d'avoir un mot codé puis celle d'avoir chaque bit du mot codé et donc le logarithme du rapport de vraisemblance de chaque bit codé:  $\Lambda(c_k)$ . Après entrelacement de  $\Lambda(c_k)$ , on obtient  $\Lambda(c_n)$ , logarithme du rapport de vraisemblance de chaque bit codé entrelacé. Il est alors possible de calculer  $\bar{d}_n^p$  qui est l'espérance des symboles codés, entrelacés. C'est cette information qui alimentera l'égaliseur de l'itération suivante.

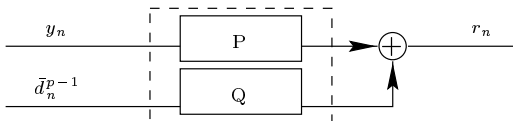


FIG. 3: Egaliseur de la  $p^{\text{ième}}$  itération ( $p > 1$ ): annuleur d'interférences

L'égaliseur utilisé est l'annuleur d'interférences (AI) de mise en œuvre peu coûteuse. C'est un égaliseur à 2 entrées, qui tient à la fois compte de la transmission sur canal dispersif et bruité ( $y_n$ : sortie du canal discret équivalent) et de la redondance apportée par le codeur de canal, issue de l'itération  $p-1$  ( $\bar{d}_n^{p-1}$ , information homogène aux symboles codés entrelacés). Les expressions des filtres  $P$  et  $Q$  s'obtiennent en minimisant l'erreur quadratique moyenne de l'AI alimenté en entrée du filtre  $Q$  par les vrais symboles codés entrelacés  $d_n$ :  $E[|r_n - d_n|^2]$  sous la contrainte  $q_0 = 0$ . Si  $H$  représente le canal discret équivalent,  $P$  et  $Q$  s'écrivent [5]:

$$P(z) = \alpha H^*(z^{-1}) \text{ et } Q(z) = \alpha H(z)H^*(z^{-1}) - 1$$

où  $H(z) = \sum_i h_i z^{-i}$ ,  $H^*(z) = \sum_i h_i^* z^{-i}$ ,  $\alpha = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 + \sigma_b^2} \approx 1$  et  $\sigma_d^2$  et  $\sigma_b^2$  sont respectivement les puissances des symboles codés entrelacés  $d$  et du bruit  $b$ . On remarque, que  $P$  n'est autre que le filtre adapté au canal et  $Q$  l'auto-corrélation du canal dont on aurait supprimé le terme central.

Il est à noter qu'à la première itération,  $d_n^0$  n'étant pas accessible, le premier égaliseur est un égaliseur classique (de type DFE), qui n'utilise pas les données issues du décodeur et traite uniquement les données sortant du canal discret équivalent.

Le schéma de turbo-égalisation présenté permet de réduire la complexité du traitement de réception par rapport au traitement optimal conjoint en utilisant un traitement itératif tout en maintenant des performances intéressantes. Des questions demeurent ouvertes quant à son fonctionnement et concernent :

- la présence d'une limite du rapport signal à bruit pour que le turbo-égaliseur soit efficace ainsi que l'égaliseur qui permet cet effet,
- le rôle de l'entrelaceur: sa taille et les lois de lecture qui règlent l'effet d'avalanche dans les performances.

C'est l'étude de l'effet de ces paramètres sur les performances du système, qui nous intéresse ici. Les simulations utilisent un turbo-égaliseur comprenant :

- codeur : convolutif et récursif systématique de polynômes  $[1, \frac{171}{133}]$ ,
- entrelaceur : uniforme de taille  $59 \times 59$ ,
- modulation : BPSK,
- égaliseur : DFE pour l'itération 1, puis AI,
- décodeur : MAP [1],
- simulation sur  $10^6$  bits utiles,
- canaux testés : Proakis B et C [6, page 616].

### 3 Influences réciproques de l'AI et du décodeur

Dans [3], Berrou propose d'interpréter la différence de 0.35 dB entre les performances des turbo-codes et celles sur le canal à bruit additif blanc gaussien comme une erreur résiduelle due uniquement à la structure itérative du traitement de réception et donc indépendante des différents modules constituant la chaîne de communication. Cette approche peut être appliquée au turbo-égaliseur, qui comprend 2 modules importants (l'AI et le décodeur), en étudiant le passage des paramètres entre ces 2 traitements.

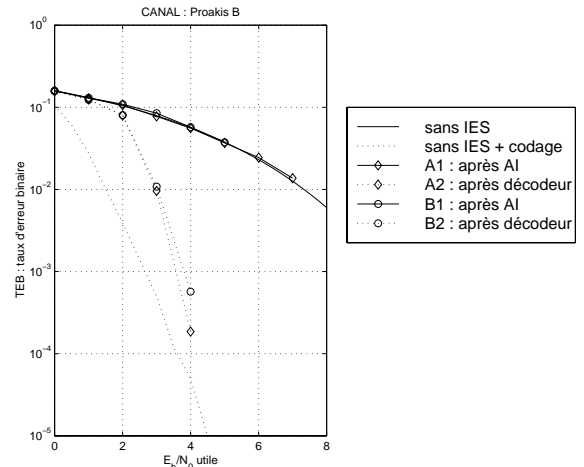


FIG. 4: Performances avec l'AI.

Ainsi, l'influence de l'AI sur le décodeur peut être étudiée à partir de l'AI alimenté en entrée du filtre  $Q$  par les symboles codés entrelacés sans erreur  $d_n$  (dit AIS). Les courbes A1 et A2 de la Figure 4 représentent les performances de cet AIS. On remarque, que si les performances en sortie de l'AI sont celles du canal à bruit additif blanc gaussien (courbe A1), il n'en est pas de même en sortie du décodeur (courbe A2). En effet, les expressions des filtres  $P$  et  $Q$  calculées au §2 donnent  $r_n$  sortie de l'AIS :

$$r_n = \alpha d_n + \alpha h_{-n}^* * b_n$$

où  $h_n$  sont les coefficients normalisés du canal discret équivalent. Il apparaît que l'interférence entre symboles a été complètement supprimée et que le bruit final  $\alpha h_{-n}^* * b_n$  est de même puissance que  $b_n$  ( $\alpha \approx 1$  et  $h$  normé) mais qu'il est coloré. Il est donc normal de retrouver les performances du canal à bruit additif blanc gaussien à la sortie de l'AIS. En revanche, si l'on n'obtient pas le gain de codage en sortie du décodeur, c'est que le bruit des

symboles entrants dans le décodeur est coloré malgré l'entrelaceur. Nous voyons ainsi l'effet de l'AI sur le décodeur.

Afin de poursuivre l'étude, rappelons que  $\Lambda(c_k)$ , logarithme du rapport de vraisemblance de chaque bit codé est calculé dans le décodeur MAP à partir du treillis du code (cf. §2). Aussi, lorsqu'une erreur est commise par le décodeur, celui-ci choisit un 'mauvais' chemin dans le treillis et un paquet d'erreurs étalé sur au moins  $\frac{K}{k}$  bits est généré sur les bits utiles, ce qui entraîne au moins  $d_{free}$  erreurs étalées sur au moins  $K \cdot n$  bits codés (où  $K$  est la longueur de contrainte du code,  $k$  et  $n$  sont tels que le rendement du code est  $R = \frac{k}{n}$  et  $d_{free}$  est la distance libre du code). Maintenant, nous ajoutons un tel paquet d'erreurs, provoqué par le décodeur, aux 'vrais' bits codés, pour obtenir des bits codés erronés, que nous entrelaçons et codons en symboles M-aire. Les symboles obtenus alimentent l'AI, dont les performances sont alors les courbes B1 et B2 de la Figure 4. Ainsi, l'ajout d'un TEB égal à  $3 \cdot 10^{-5}$  à l'entrée de l'AI provoque une multiplication par 3 TEB en sortie de l'AI i.e.  $TEB(AIS \text{ avec ajout d'erreurs}) = 3 \cdot TEB(AIS)$ . L'AI est particulièrement sensible au type d'erreurs fournies par le décodeur (à l'itération précédente) car il provoque une amplification du nombre d'erreurs en sortie du décodeur suivant. Ainsi, les courbes de la Figure 4 ont pu mettre en évidence l'influence du décodeur sur l'AI.

De plus, la courbe A2 de la Figure 4 représente les meilleures performances du turbo-égaliseur observées en sortie du décodeur à condition d'utiliser l'AI (i.e. un égaliseur à structure imposée) et le décodeur MAP, qui ne tient pas compte de la coloration du bruit. Nous nous proposons d'étudier maintenant le comportement du turbo-égaliseur vis-à-vis de cette borne.

## 4 Le point de déclenchement

Comme dans le cas des turbo-codes, les simulations ont mis en évidence l'existence d'un *point de déclenchement* dans le phénomène turbo. En effet, nous avons remarqué que les itérations successives apportent une amélioration si le TEB est suffisamment faible après la première itération.

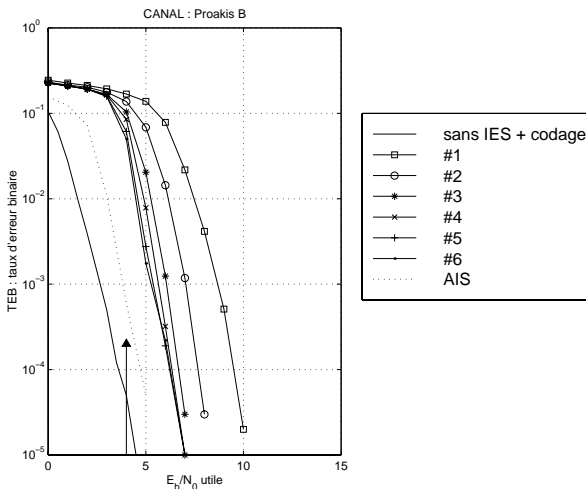


FIG. 5: Performances du turbo-égaliseur en sortie du décodeur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis B.

Sur les Figures 5 et 6, nous remarquons que, pour les deux canaux, les performances du turbo-égaliseur s'améliorent au fil des itérations lorsque le TEB après la première itération est inférieur à 0.2. C'est donc cette valeur de TEB qui permet le déclenchement du phénomène turbo.

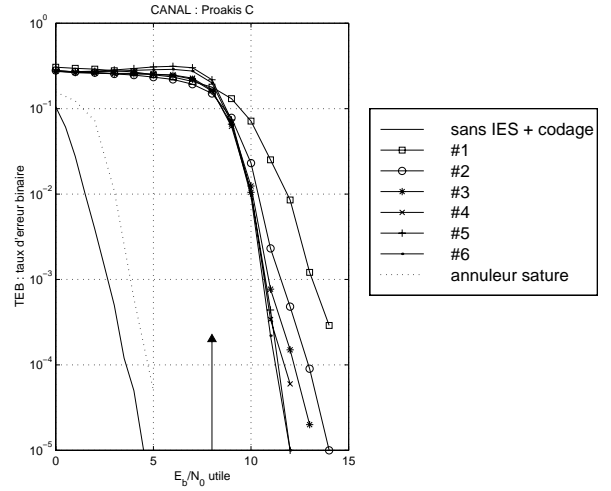


FIG. 6: Performances du turbo-égaliseur en sortie du décodeur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis C.

De plus, nous observons que le canal agit sur l'abscisse de ce point. En effet, le déclenchement s'opère à un rapport signal à bruit ( $\frac{E_b}{N_0}$ ) de 4 dB pour le canal Proakis B et de 8 dB pour le Proakis C. Ainsi, pour le canal Proakis C réputé plus difficile que le Proakis B, le phénomène turbo s'enclenche pour un rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  plus fort, ce qui montre l'effet du canal sur ce point de déclenchement.

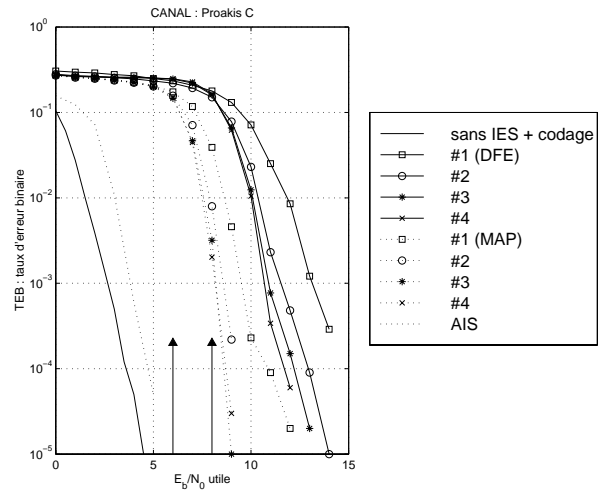


FIG. 7: Comparaison des performances du turbo-égaliseur en sortie du décodeur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis C: égaliseur de la 1<sup>ère</sup> itération DFE (cas classique) ou MAP.

En poursuivant les simulations, il est même apparu que le tout premier traitement (i.e. l'égaliseur de la première itération) est primordial et que les performances de cet égaliseur influent directement sur le déclenchement ou non du phénomène turbo. Ceci est illustré Figure 7 en plaçant un égaliseur MAP en début de chaîne au lieu d'un égaliseur DFE. Il est à noter que cette modification ne change pas le TEB du point, ce qui continue à corroborer la thèse

selon laquelle le point de déclenchement est lié au TEB. En revanche, l'utilisation d'un égaliseur MAP en première itération, permet pour le canal Proakis C de ramener le point de déclenchement à une abscisse de 6 dB au lieu de 8 et de 3 au lieu de 4 dB pour le Proakis B.

## 5 L'effet d'avalanche

Le point de déclenchement observé au-dessus, marque le début d'un *effet d'avalanche*. En effet, les courbes de performances présentent une pente de plus en plus forte après le déclenchement, ce qui permet d'assurer les bonnes performances asymptotiques du turbo-égaliseur. Nous allons maintenant étudier l'influence de l'entrelaceur sur cet effet.

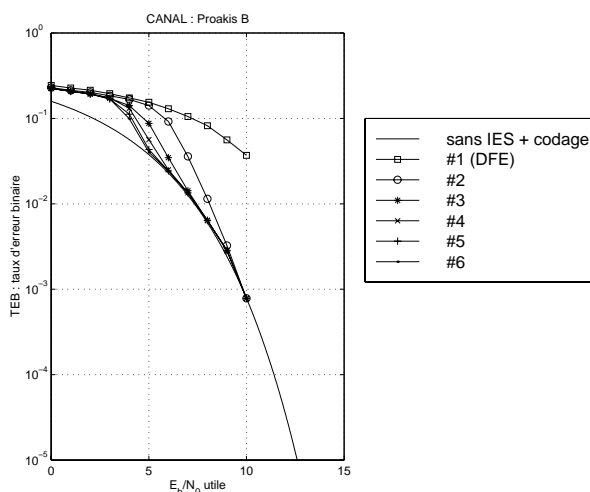


FIG. 8: Performances du turbo-égaliseur en sortie de l'égaliseur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis B: égaliseur de la 1<sup>ère</sup> itération DFE (cas classique).

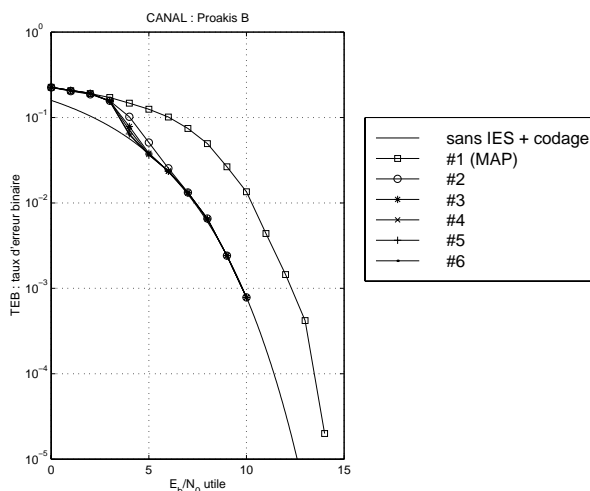


FIG. 9: Performances du turbo-égaliseur en sortie de l'égaliseur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis B: égaliseur de la 1<sup>ère</sup> itération MAP.

Les performances du turbo-égaliseur montrent que l'entrelaceur non-uniforme de taille  $64 \times 64$  (Figure 10) donne de meilleurs résultats en sortie du décodeur que l'entrelaceur uniforme de taille  $59 \times 59$  (Figure 5). En effet, avec

l'entrelaceur non-uniforme, le gain entre chaque itération du turbo est plus grand. Aussi, les performances asymptotiques sont celles de l'AIS.

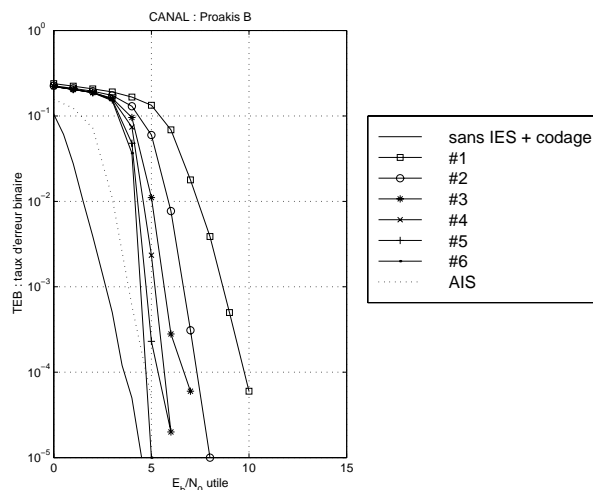


FIG. 10: Performances du turbo-égaliseur en sortie du décodeur (itérations 1 à 6) sur le canal Proakis B: égaliseur de la 1<sup>ère</sup> itération DFE (cas classique) et entrelaceur NON UNIFORME de taille  $(64 \times 64)$ .

L'effet d'avalanche s'observe également en sortie de l'égaliseur (cf. Figures 8 et 9), où l'on observe l'influence du 1<sup>er</sup> égaliseur. A 5 dB par exemple, les performances en sortie de l'AI sont celles du canal à bruit additif blanc gaussien dès la 3<sup>ème</sup> itération avec le MAP, alors qu'il faut attendre la 6<sup>ème</sup> itération avec le DFE, et ce bien que les performances après la 1<sup>ère</sup> itération soit quasiment égale dans les 2 cas. Ceci motive, quand c'est possible, l'utilisation de l'égaliseur MAP à la première itération, mais pas aux suivantes.

## Références

- [1] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, J. Raviv. *Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate*. IEEE Trans. Inf. Th. Vol. IT-20, No. 2 pp. 284-287, mars 1974.
- [2] C. Berrou, A. Glavieux. *Near optimum error correcting coding and decoding*. IEEE Trans. on Comm. Vol. 44, No. 10 pp. 1262-1271, octobre 1996.
- [3] C. Berrou. *Some clinical aspects of turbo-codes*. International Symposium on Turbo Codes, Brest, France, 1997.
- [4] P. Didier, A. Picart, C. Douillard, M. Jezequel. *Application des techniques de décodage itératif à la correction de l'interférence entre symboles*. GRETSI 1995, Juan-les-pins, 1995.
- [5] C. Laot. *Egalisation autodidacte et Turbo-égalisation, application aux canaux sélectifs en fréquence*. Thèse de l'Université de Rennes 1, Juillet 1997.
- [6] J.G. Proakis, *Digital Communications (3rd edition)*. McGraw-Hill, 1995.