Санкт-Петербургский Государственный Университет
математико-механический факультет
кафедра дифференциальных уравнений

Дипломная работа

студента 52-ой группы *Озерова А. С.*

“О сохранении инвариантных множеств, удовлетворяющих условию Красовского, при C^0 – возмущениях.”

Научный руководитель:
к. ф-м. н. *Ильин Ю. А.*
Рецензент:
доктор ф-м. н. *Чурин Ю. В.*

К защите допустить:
(зав. каф., чл.-кор. РАН, *Плисс В. А.*)

1999 г.

Оглавление.

0. Введение.

В данной работе рассматривается автономная система дифференциальных уравнений, обладающая свойством Красовского в окрестности компактного связанного инвариантного множества. При достаточно малых возмущениях, как было показано в [1], возмущенная система будет по прежнему обладать свойством Красовского, но при этом инвариантного множества может уже не быть. В дипломе получены достаточные условия того, что это инвариантное множество будет тем не менее сохраняться.

Одно из условий очень простое, оно зависит от вращения векторного поля исходной системы на границе окрестности инвариантного множества.

Другое, более сильное условие сформулировано в терминах так называемой функции Ляпунова-Красовского, которую, как доказывается в [1], теоретически можно всегда построить для систем, обладающих свойством Красовского. Для некоторых систем эту функцию можно построить и практически, так что это условие можно достаточно эффективно использовать. Этот результат является основным результатом работы.

Работа состоит четырех частей.

В первой части дается общее определение свойства Красовского, функции Ляпунова-Красовского, и на эту тему формулируются некоторые теоремы из [1].

Во второй части обсуждается тот же вопрос, но уже для автономных систем, к тому же, вводятся понятия гиперболического и параболического множеств, и дается эквивалентное определение свойства Красовского для автономных систем, которое в дальнейшем эффективно используется.

В третьей части вводится понятие вращения векторного поля, и формулируются некоторые вспомогательные результаты.

Четвертая часть состоит из постановки задачи, формулировки вышеупомянутых достаточных условий и доказательства основного результата.

1. Свойство Красовского и некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим систему:

(1.1) $\dot{x} = P(x,t) \qquad x \in R^n$

Введем обозначения:

Пусть $M \subset R^n, x \in R^n$, тогда $\rho(x,M) := \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ - расстояние от точки до множества.

$N_h(M) := \{x \in R^n : \rho(x,M) < h\}$ - h – окрестность M.

Пусть $G \subset R^{n+1}, t \in R$, тогда $G_t := G \cap (R^n \times \{t\})$ - сечение G.

$U_h(G) := \{(x,t) : x \in N_h(G_t)\}$ - h – окрестность G в расширенном фазовом пространстве.

$\varphi(t, x_0, t_0)$ - решение задачи Коши: $\begin{cases} (1.1) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

1.1. Определение ([1, с. 60]**).**

Система (1.1) в окрестности $U(G)$ *замкнутого множества* $G \subset R^{n+1}$ *обладает* ***свойством Красовского,*** *если по любому* $r > 0$ *можно найти такое* $T > 0$*, что из* $r < \rho((x,t), G_t)$ *следует, что* $\{(\varphi(t+\tau, x, t), t+\tau) : -T \le \tau \le T\} \not\subset U(G)$*, то есть, если в расширенном фазовом пространстве начальные данные решения лежат вне* $\overline{U_r(G)}$*, то оно покидает* $U(G)$ *за время, не превосходящее T по абсолютной величине. Наименьшее T, обладающее указанным свойством, обозначим через* $\overline{T_{(1.1)}}(r, U(G))$.

1.2. Определение.

Производной функции $V : \Omega \to R,\ \Omega \subset R^n, V \in C^r(\Omega), r \ge 1$ *в силу системы (1.1) называется функция* $DV\big|_{(1.1)}(x,t)$*, определяемая равенством:*

$$DV\big|_{(1.1)}(x,t) := D_1V(x,t)P(x,t) + D_2V(x,t),$$

где D_1 *и* D_2 *- производные V по первому и второму аргументу соответственно.*

1.3. Определение ([1, с. 60]**).**

Функция $V \in C^r(U(G)), r \ge 0$ *называется* ***функцией Ляпунова-Красовского*** *для системы (1.1) относительно множества G в окрестности* $U(G)$*, если ее производная в силу (1.1) положительно (или отрицательно) определена относительно множества G в* $U(G)$*, а сама функция V стремится равномерно к нулю, когда* (x,t) *стремится к G.*

То есть:

1) $DV\Big|_{(1.1)}\Big|_G = 0$.

2) *Для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < h$ *найдется* $\delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что если* $(x,t) \in U_h(G) \setminus U_\varepsilon(G)$, *то* $DV\Big|_{(1.1)}(x,t) > \delta(\varepsilon)$ *(или* $DV\Big|_{(1.1)}(x,t) < -\delta(\varepsilon)$*).*

3) $V(x,t) \underset{(x,t)\to G}{\Rightarrow} 0$.

Из этого определения так же следует, что:

4) $DV\Big|_{(1.1)}(U_h(G) \setminus G) \subset R_+$ *(или* $DV\Big|_{(1.1)}(U_h(G) \setminus G) \subset R_-$*).*

И н. у. о. можно считать, что:

5) $V\Big|_G = 0$.

1.4. Теорема (Красовского) ([1, с. 70]**).**

Пусть система (1.1), где P удовлетворяет условию Липшица по первому аргументу и равномерно непрерывна по второму, имеет замкнутое инвариантное множество G, в окрестности которого обладает свойством Красовского. Кроме того, P ограничено на G. Тогда в некоторой окрестности $U_h(G)$ *множества G можно построить функцию Ляпунова-Красовского* $V \in C^\infty$, *для которой* $\left|D^k V(x,t)\right| \le C_{|k|}$, $(x,t) \in U_h(G)$, $|k| = 0,1,2,...$ *(где* k *- мультииндекс), причем* $C_{|k|}$ *зависят только от* $|k|$.

Рассмотрим теперь другую систему:

(1.2) $\dot{x} = Q(x,t) \qquad x \in R^n$

$\psi(t, x_0, t_0)$ - решение задачи Коши: $\begin{cases}(1.2)\\ x(t_0) = x_0\end{cases}$

1.5. Теорема ([1, с. 61]**).**

Пусть система (1.1) в окрестности $U_h(G)$ *замкнутого множества* G *обладает свойством Красовского и выполнены следующие условия:*

1) $P \in C(U_h(G))$

2) $Q \in C(U_h(G))$

3) $P \in Lip_x(U_h(G))$ *с константой L, то есть*

$(x,t),(y,t) \in U_h(G) \Rightarrow \left|P(x,t) - P(y,t)\right| \le L\left|x - y\right|$

Тогда если r такое, что $0 < r < h - r$, *и выполнено:*

4) $\left|P(x,t) - Q(x,t)\right| < \delta, \forall (x,t) \in U_h(G)$, *где*

$\delta \le \delta(r) := r[\overline{T_{(1.1)}}(r, U_h(G)))^{-1} \exp(-L\overline{T_{(1.1)}}(r, U_h(G))]$,

то система (1.2) обладает свойством Красовского в окрестности $U_{h-r}(G)$ *замкнутого множества* $\overline{U_r(G)}$.

1.6. Теорема ([2]).

Пусть $\varphi(t,x_1,t_1)$, $\psi(t,x_2,t_2)$ *- решения соответствующих задач Коши систем (1.1) и (1.2) на множестве* $G\subset R^{n+1}_{x,t}$*, и выполнены следующие условия:*

1) $P,Q\in C(G)$.

2) *Оба решения* $\varphi(t,x_1,t_1)$ *и* $\psi(t,x_2,t_2)$ *существуют на конечном промежутке* $<a,b>$ *(не существенно, какие концы)* $a,b\in R$.

3) $P\in Lip_x(G)$ *с константой L.*

4) $\sup\limits_{x\in G}\|P(x)\|\le M$

5) $\sup\limits_{x\in G}\|P(x)-Q(x)\|\le m$

Тогда $\|\varphi(t,x_1,t_1)-\psi(t,x_2,t_2)\|\le(\|x_1-x_2\|+M|t_1-t_2|+m(b-a))\exp(L(b-a))$, $t\in<a,b>$.

2. Свойство Красовского автономных систем.

Рассмотрим теперь автономную систему:

(2.1) $\dot{x} = P(x) \qquad x \in R^n$

Обозначим: $\varphi(t, x_0)$ - решение задачи Коши: $\begin{cases} (2.1) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

2.1. Теорема [1 с. 84]**.**

Для того, чтобы автономная система (2.1) в окрестности $N(G)$ компактного множества $G \subset R^n$ обладала свойством Красовского, необходимо и достаточно, чтобы в этой окрестности не содержалось ни одной траектории, не принадлежащей G.

Благодаря этой теореме мы можем дать эквивалентное определение свойства Красовского для автономных систем.

2.2. Определение.

Система (2.1) в окрестности $N(G)$ компактного множества $G \subset R^n$ обладает ***свойством Красовского,*** *если в этой окрестности не содержится ни одной траектории, не принадлежащей G.*

2.3. Следствие (из теоремы 2.1)**.**

Если Система (2.1) в окрестности $N(G)$ компактного инвариантного множества G обладает свойством Красовского, то любое решение $\varphi(t, x)$, начинающееся на $N(G) \setminus G$:

1) либо покидает $N(G)$ при возрастании времени, а при убывании времени стремится к G.

2) либо покидает $N(G)$ при убывании времени, а при возрастании времени стремится к G.

3) либо покидает $N(G)$ как при возрастании, так и при убывании времени.

При этом решения, попадающие в первую и вторую категорию, называются ***параболическими****, а решения, попадающие в третью категорию,* ***гиперболическими****. Точки, которые являются начальными данными по x для таких решений, так же называются параболическими и гиперболическими соответственно.*

2.4. Замечание.

Множества параболических и гиперболических точек существенным образом зависит от области $N(G)$.

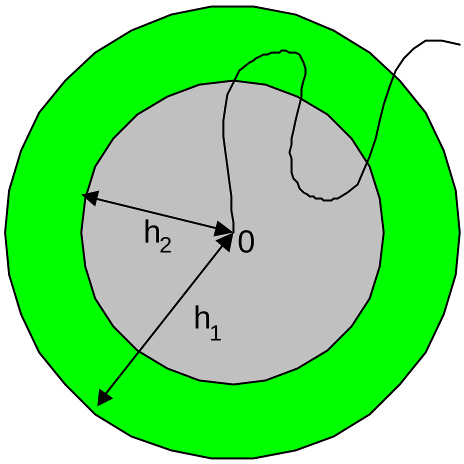

Рис 1.

На рисунке 1 инвариантное множество G – это просто точка, $G=\{0\}$, траектория, которая там изображена один раз пересекается с окрестностью $N_{h_1}(G)$, и является для нее параболической, с окрестностью же $N_{h_2}(G)$ она пересекается два раза, один из кусков пересечения – это параболическая траектория для $N_{h_2}(G)$, а другой – гиперболическая.

Обозначим, в зависимости от окрестности $N_h(G)$:

$\Gamma(h)$ - множество гиперболических точек.

$\Pi(h)$ - множество параболических точек.

$\Pi_+(h)$ - множество параболических точек из первой категории.

$\Pi_-(h)$ - множество параболических точек из второй категории.

Точки из $\Pi_+(h)$ ($\Pi_-(h)$) будем так же называть **положительно (отрицательно) параболическими**.

Таким образом $N_h(G)\setminus G=\Gamma(h)\cup\Pi_+(h)\cup\Pi_-(h)$.

Доказательство следствия:

Из теоремы 2.1 следует, что любое решение, проходящее через множество $N(G)\setminus G$, хотя бы одним своим концом покидает это множество, то есть либо при возрастании, либо при убывании времени. Значит, те решения, которые покидают $N(G)\setminus G$, как при возрастании, так и при убывании времени, - это гиперболические. Надо показать, что все остальные решения параболические.

Пусть н. у. о. $\varphi(t,x)$ покидает $N(G)\setminus G$ только при возрастании времени, значит, при убывании времени оно остается в $N(G)\setminus G$, так как G - инвариантно. Предположим, что при убывании времени $\varphi(t,x)$ не стремится к G, тогда найдется $r_1 > 0$, такое, что для любого $T > 0$ найдется $t(T) > T$, такое, что $\rho(\varphi(-t(T),x),G) > r_1$. Возьмем теперь $T := \overline{T_{(1.1)}}(r_1, N(G))$, обозначим $y := \varphi(-t(T),x)$. Так как $\varphi(t,x)$ при убывании времени остается в $N(G)\setminus G$, то $\{\varphi(\tau,x): -\infty < \tau \le 0\} \subset N(G)$ $\Leftrightarrow$ $\{\varphi(\tau,\varphi(t(T),y)): -\infty < \tau \le 0\} \subset N(G)$ $\Leftrightarrow$ $\{\varphi(\tau + t(T),y): -\infty < \tau \le 0\} \subset N(G)$ $\Leftrightarrow$ $\{\varphi(\tau,y): -\infty < \tau \le t(T)\} \subset N(G)$ $\Rightarrow$ $\{\varphi(\tau,y): -T < \tau \le T\} \subset N(G)$ (так как $t(T) > T$). А поскольку $T = \overline{T_{(1.1)}}(r_1, N(G))$ и $\rho(y,G) > r_1$, то по определению 1.1 свойства Красовского $\{\varphi(\tau,y): -T < \tau \le T\} \not\subset N(G)$ - противоречие.

Значит, $\varphi(t,x)$ стремится к G при убывании времени, следовательно, это решение - параболическое.

ч. т. д.

2.4. Теорема ([1, с. 85]**).**

Если система (2.1), где P *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, обладает свойством Красовского в окрестности* $N(G)$ *замкнутого инвариантного множества G, а P ограничена на G, то в* $N(G)$ *можно построить функцию Ляпунова-Красовского* $V: N(G) \to R$, *класса* C^∞.

3. Вращение векторного поля.

Введем понятие вращения векторного поля.

3.1. Определения ([3, с. 11]**).**

1) Говорят, что на $M \subset R^n$ *задано* ***n-мерное векторное поле*** *P, если каждой точке* $x \in M$ *сопоставлен вектор* $P(x)$ *из* R^n*, то есть определено отображение* $P: R^n \to R^n$.

2) Векторное поле P *называется* ***непрерывным*** *на* M*, если отображение* P *- непрерывно на* M.

3) Векторное поле P *называется* ***невырожденным*** *на* M*, если отображение* P *не обращается в ноль на* M.

3.2. Определение ([3, с. 14]**).**

Векторные поля P *и* Q *называются* ***гомотопными*** *на множестве* $M \subset R^n$*, если существует непрерывное невырожденное (то есть не обращающееся в ноль) отображение* $\Phi: [0,1] \times M \to R^n$*, такое, что* $\Phi(0,x) = P(x)$*,* $x \in M$ *и* $\Phi(1,x) = Q(x)$*,* $x \in M$*. При этом отображение* $\Phi: [0,1] \times M \to R^n$ *называется* ***невырожденной деформацией*** *поля* P *в поле* Q.

3.3. Определение ([3, с. 16]**).**

Пусть $\Omega \subset R^n$ *- ограниченная область,* $P: \partial\Omega \to R^n$ *- непрерывное векторное поле на ее границе* $\partial\Omega$*.* ***Вращением*** *векторного поля P на границе области* Ω *называется целочисленная характеристика, которая удовлетворяет следующим трем свойствам (обозначать мы ее будем через* $\gamma(P,\Omega)$*):*

1) Гомотопные на $\partial\Omega$ *поля имеют одинаковое вращение.*

2) Если P определено и не вырождено на множестве $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$*, причем области* Ω_j *попарно не пересекаются и лежат в ограниченной области* Ω*, то* $\gamma(P,\Omega) = \gamma(P,\Omega_1) + ... + \gamma(P,\Omega_n)$.

3) Если $P(x) = x - x_0$ *и* $x_0 \in \Omega$*, то* $\gamma(P,\Omega) = 1$.

Как показано в [3], эти три свойства однозначно определяют величину $\gamma(P,\Omega)$, и введенное таким образом вращение совпадает с другими ее определениями. Например очень часто $\gamma(P,\Omega)$ определяют как степень отображения $P(x)/\|P(x)\| : \partial\Omega \to S^{n-1}$, где S^{n-1} - единичная сфера в R^n.

3.4. Теорема ([3, с. 20]**).**

Если векторное поле P не вырождено и непрерывно на $\overline{\Omega}$ *(*Ω *- ограниченная область), то* $\gamma(P,\Omega) = 0$.

3.5. Следствие (из Теоремы 3.4).

Пусть P не вырождено на $\partial\Omega$ *ограниченной области* Ω *и непрерывно на* $\overline{\Omega}$*, пусть* $\gamma(\boldsymbol{P},\Omega)\neq\mathbf{0}$. *Тогда поле P имеет в области* Ω *по крайней мере одну особую точку.*

3.6. Теорема ([3, с. 14]**).**

Если векторные поля $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{Q}$ *непрерывны на* $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{R}^{n}$ *и* $<\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})>+\|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\|\cdot\|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\|>\mathbf{0}$, $\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{M}$, *то* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{Q}$ *гомотопны на* $\boldsymbol{M}$.

4. Основной результат.

Рассмотрим автономную систему (2.1) и систему:

(4.1) $\dot{x} = Q(x) \qquad x \in R^n$

Обозначим: $\psi(t, x_0)$ - решение задачи Коши: $\begin{cases} (4.1) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Предположим, что система (2.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_h(G)$ компактного инвариантного множества $G \subset R^n$. Пусть r такое, что $0 < r < h - r$. И предположим, что для данного r системы (2.1) и (4.1) удовлетворяются всем условиям теоремы 1.5, тогда (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ компактного множества $\overline{N_r(G)}$.

Определим множество

(4.2) $H := \{x \in N_{h-r}(G) : \psi(t, x) \in N_{h-r}(G), t \in J_x\}$,

где J_x - максимальный промежуток задания решения $\psi(t, x)$, то есть это множество траекторий (4.1), которые целиком лежат в $N_{h-r}(G)$.

Поскольку (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ компактного множества $\overline{N_r(G)}$, то по определению 2.2 $H \subset \overline{N_r(G)}$. Кроме того, из определения 2.2 и из определения множества H следует, что (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ множества H.

Покажем, что H компактно и инвариантно. Действительно, это множество ограничено и инвариантно по определению (4.2), осталось показать, что оно замкнуто. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $x_k \in H$, $x_k \to x^*$, покажем, что $x^* \in H$. Пусть это не так, то есть $x^* \notin H$, тогда $x^* \in N_{h-r}(G) \setminus H$, поскольку $H \subset \overline{N_r(G)}$. Так как $x^* \in N_{h-r}(G) \setminus H$, то по определению (4.2) решение $\psi(t, x^*)$ покидает $N_{h-r}(G)$, следовательно по теореме об интегральной непрерывности решения с близкими начальными данными так же покидают $N_{h-r}(G)$, значит, найдется $m > 0$, такое, что, если $k > m$, то $\psi(t, x_k)$ покидает $N_{h-r}(G)$. Следовательно, при больших k $x_k \notin H$ - противоречие.

Заметим, что множество H может оказаться пустым (см. пример на рис. 2), и хотя формально можно говорить о свойстве Красовского относительно пустого множества (это означает, что все траектории, начинающиеся в некоторой окрестности, покидают ее), но это не очень содержательно.

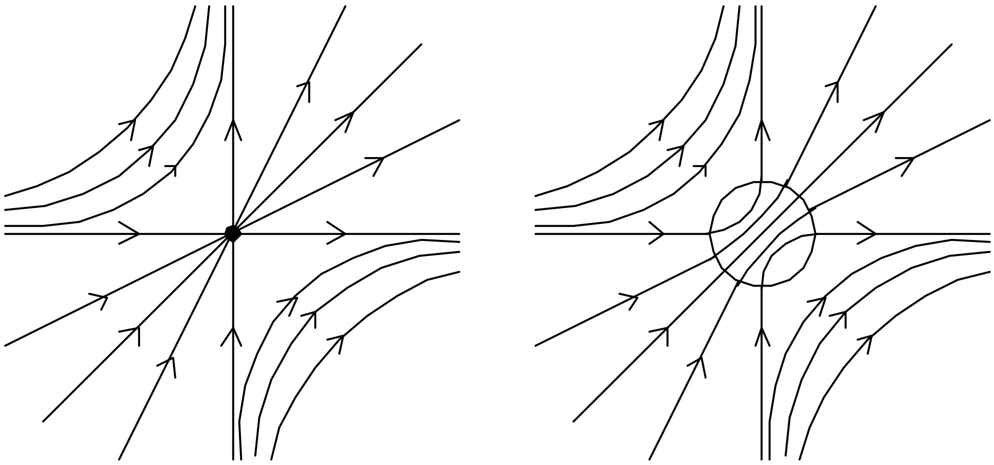

Рис. 2.

На рис. 2 слева изображен фазовый портрет системы (2.1), а справа фазовый портрет возмущенной системы (4.1). Инвариантное множество G – это просто точка покоя, но в малой окрестности точки покоя можно при C^0 - возмущении получить любой фазовый портрет, в частности такой, как на рисунке, вне этой окрестности мы не возмущаем систему. Таким образом, в данном примере инвариантное множество H - пусто.

Итак, цель данной работы - найти какие-нибудь условия, при которых $H \neq \varnothing$.

Прежде всего, приведем следующий простой результат.

4.1. Теорема.

Если системы (2.1) и (4.1) удовлетворяют условиям теоремы 1.5 для некоторого r, такого, что $0 < r < h - r$, и при этом выполнены следующие условия:

(4.3) $< P(x), Q(x) > + \|P(x)\| \cdot \|Q(x)\| > 0, \quad x \in \partial N_{h-r}(G)$

(4.4) $\gamma(P, N_{h-r}(G)) \neq 0$

тогда $H \neq \varnothing$, и при этом G и H содержат точки покоя.

Доказательство:

Из теоремы 3.6 и условия (4.3) следует, что P и H гомотопны на $\partial N_{h-r}(G)$, а значит по первому свойству из определения вращения $\gamma(P, N_{h-r}(G)) = \gamma(Q, N_{h-r}(G)) \overset{(4.4)}{\neq} 0$. Таким образом, по следствию 3.5 сразу получаем, что G и H содержат точки покоя, значит, $H \neq \varnothing$.

ч. т. д.

4.2. Замечание.

Условие (4.3) намного слабее четвертого условия из теоремы 1.5, так что, если то выполнено условие 4) теоремы 1.5, то почти наверняка выполнено и условие (4.3).

4.3. Замечание.

Ясно, что теорема 4.1 дает положительный ответ только для тех инвариантных множеств, на границе окрестности которых вращение отлично от нуля, так что, этот достаточный признак непустоты множества H далек от необходимого, поскольку упускается большой класс инвариантных множеств, не содержащих точек покоя, так как по теореме 3.2 для них вращение равно нулю.

Следующая теорема является основным результатом данной дипломной работы.

4.4. Теорема.

Пусть система (2.1) в окрестности $N_h(G)$ компактного связанного инвариантного множества G обладает свойством Красовского и выполнены следующие условия:

1) $P \in C(N_h(G))$

2) $Q \in C(N_h(G))$

3) $P \in Lip(N_h(G))$ *с константой L, то есть, если* $x, y \in N_h(G)$, *то* $|P(x,t) - P(y,t)| \le L|x - y|$

4) либо $\theta(V,h) \ne 2$, *где* $\theta(V,h)$ *- это число компонент связности* $V^{-1}(R \setminus \{0\}) \cap N_h(G)$, *расстояние от которых до G равно нулю, здесь* $V : N_h(G) \to R$ *- это некоторая функция Ляпунова-Красовского для системы (2.1), которая существует в силу теоремы 2.4.*

Тогда, существует $\Delta > 0$ *и* r: $0 < r < h - r$, *зависящие от функции V и от системы (2.1), такое что, если*

5) $\|P(x) - Q(x)\| < \Delta$, $x \in N_h(G)$;

то система (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ *компактного инвариантного множества* $H \ne \varnothing$, *где* $H \subset \overline{N_r(G)}$ *определяется равенством (4.2).*

Заметим, что основным в этой теореме является утверждение о том, что $H \ne \varnothing$, без этого утверждения теорема просто превращается в теорему 1.5.

К тому же, $\theta(V,h) < +\infty$, то есть эта величина не может быть бесконечной, это будет показано при доказательстве теоремы.

Доказательство:

Итак, по условию теоремы 4.4 система (2.1) обладают свойством Красовского в окрестности $N_h(G)$ множества G. По следствию 2.3 траектории системы (2.1), проходящие через $N_h(G)\setminus G$ могут быть либо гиперболическими, либо параболическими ($N_h(G)\setminus G = \Gamma(h)\cup\Pi_+(h)\cup\Pi_-(h)$).

Будем н. у. о. считать, что $DV\big|_{(2.1)}(N_h(G)\setminus G) > 0$, в противном случае умножим функцию V на -1.

Введем следующие обозначения:

$I_x(h) := (a_x(h), b_x(h))$ – максимальный промежуток задания решения $\varphi(t,x)$ в окрестности $N_h(G)$, где

$a_x(h) := \inf\{t < 0 : \varphi(\tau,x)\in N_h(G),\ \text{при всех}\ \ \tau\in(t,0]\}$

$b_x(h) := \sup\{t > 0 : \varphi(\tau,x)\in N_h(G),\ \text{при всех}\ \ \tau\in[0,t)\}$.

$L_x(h) := \{\varphi(t,x) : t\in I_x(h)\}$ - наибольший связанный кусок траектории системы (2.1), проходящей через точку *x*, который так же проходит через *x*, и целиком лежит в $N_h(G)$.

4.5. Лемма.

1) V(x) возрастает вдоль решений на множестве $N_h(G)\setminus G$.

2) если $x\in\Pi_+(h)$ *(*$x\in\Pi_-(h)$*), то* $V(L_x(h)) = (0, c_x^+(h))$, $c_x^+(h) > 0$ *(*$V(L_x(h)) = (c_x^-(h), 0)$, $c_x^-(h) < 0$*)*

3) если $x\in\Gamma(h)$*, то* $V(L_x(h)) = (c_x^-(h), c_x^+(h))$, $c_x^-(h) < c_x^+(h)$

4) множество $\Gamma(h)$ *открыто.*

Доказательство:

1) $\dfrac{d}{dt}V(\varphi(x.t)) = DV(\varphi(x,t))\dfrac{d}{dt}\varphi(x,t) = DV(\varphi(x,t))P(\varphi(x,t)) =$

$= DV\big|_{(2.1)}(\varphi(x,t)) > 0$, если $\varphi(x,t)\in N_h(G)\setminus G$.

2) Рассмотрим случай положительной параболической траектории $L_x(h)$, $x\in\Pi_+$. Из непрерывности, монотонности вдоль решения и ограниченности V следует, что образ $L_x(h)$ - это открытый ограниченный промежуток, а поскольку V возрастает вдоль решения $\varphi(t,x)$, и решение стремится к G при убывании времени, а V стремится к нулю при приближении к G, то легко понять, что левым концом этого интервала будет ноль. Аналогично рассматривается случай отрицательной параболической траектории.

3) Это прямое следствие непрерывности, монотонности вдоль решения и ограниченности V.

4) Так как гиперболическое решение покидает $N_h(G)$ как при возрастании, так и при убывании времени, то промежуток существования этого решения ограничен, а тогда по теореме об интегральной

непрерывности решения с близкими начальными данными будут вести себя так же, то есть будут тоже гиперболическими.

4.6. Лемма.

Существует $c>0, l>0$, такое, что если $x \in \overline{N_l(G)} \setminus G$ и $\varphi(t,x)$ покидает $N_h(G)$ при возрастании (убывании) времени, то $L_x(h) \cap V^{-1}(c) \neq \varnothing$ ($L_x(h) \cap V^{-1}(-c) \neq \varnothing$).

Доказательство:

Допустим, что это не так, по любым $c>0, l>0$ можно найти точку $x = x(c,l) \in \overline{N_l(G)} \setminus G$, такую, что $\varphi(t,x)$ покидает $N_h(G)$ при возрастании (убывании) времени, и $L_x(h) \cap V^{-1}(c) = \varnothing$ ($L_x(h) \cap V^{-1}(-c) = \varnothing$). Пусть $y = y(c,l) := \varphi(b_x(h), x)$ ($y := \varphi(a_x(h), x)$). Из определения промежутка $I_x(h) = (a_x(h), b_x(h))$ и того, что $\varphi(t,x)$ покидает $N_h(G)$, следует, что $y \in \partial N_h(G)$ и $\varphi(t,x) \in N_h(G), t \in [0, b_x(h))$ ($t \in (a_x(h), 0]$), а значит, y – первая точка выхода $\varphi(t,x)$ из $N_h(G)$.

Обозначим $B(l) := \sup\limits_{x \in \overline{N_l(G)} \setminus G} |V(x)|$, так как $V(x) \underset{x \to G}{\rightrightarrows} 0$, то $B(l) \underset{l \to 0}{\to} 0$. Поскольку V возрастает вдоль решения и $L_x(h) \cap V^{-1}(c) = \varnothing$ ($L_x(h) \cap V^{-1}(-c) = \varnothing$), то $c > V(y) > V(x) > -B(l)$ ($-c < V(y) < V(x) < B(l)$), следовательно $|V(x)|, |V(y)| < \max\{c, B(l)\}$.

Возьмем теперь две последовательности $c_k, l_k > 0, c_k, l_k \to 0$. Пусть $x_k := x(c_k, l_k)$, $y_k := y(c_k, l_k)$, тогда $|V(x_k)|, |V(y_k)| < \max\{c_k, B(l_k)\} \to 0$. Так как $y_k \in \partial N_h(G)$ - компакт, то из последовательности y_k можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, пусть н. у. о. $y_k \to y^* \in \partial N_h(G)$. Поскольку $V(y_k) \to 0$ и V - непрерывна, то $V(y^*) = 0$, а значит, по лемме 4.5 y^* - гиперболическая точка (на параболических траекториях V не принимает нулевых значений). Так как по той же лемме $\Gamma(h)$ - открыто, то найдется окрестность $N(y^*)$, такая, что $\overline{N(y^*)} \subset \Gamma(h)$. Рассмотрим множество $K := \bigcup\limits_{x \in \overline{N(y^*)}} L_x(h)$. Если $x \in \overline{N(y^*)} \subset \Gamma(h)$, то $\overline{L_x(h)} \cap G = \varnothing$, к тому же ясно, что K – компакт, G тоже компакт, а тогда $dist(K,G) > 0$ ($dist(K,G) := \inf\limits_{x \in K, y \in G} \|x - y\|$ - расстояние между множествами K и G).

Таким образом, $y_k \to y^*$, пусть н. у. о. $y_k \in N(y^*) \subset K$, а тогда, и $x_k \in K$, так как по определению точек x_k и y_k они лежат на одной траектории $L_{x_k}(h)$. Так же по определению последовательности x_k, $x_k \in \overline{N_{l_k}(G)} \setminus G, l_k \to 0$, следовательно $x_k \to G$. Итак, мы пришли к противоречию, так как $x_k \in K$, $dist(K,G) > 0$, $x_k \to G$.

ч. т. д.

Определим теперь некоторое множество:

(4.5) $A(c,l) := \{\varphi(t,x) : x \in \overline{N_l(h)}, |V(\varphi(t,x))| \le c\}$.

4.7. Лемма.

Множество $A(c,l)$ обладает следующими свойствами:

1) $A(c,l)$ - замкнуто

2) $\overline{N_l(G)} \subset A(c,l) \subset N_h(G)$

3) $A(c,l)$ - связно

4) $\partial A(c,l) = P \cup D$, где $P := \bigcup_{x\in\overline{N_l(G)}}[L_x(h) \cap V^{-1}(\{-c,c\})] = P_+ \cup P_-$, $P_+ := \bigcup_{x\in\overline{N_l(G)}}[L_x(h) \cap V^{-1}(c)]$, $P_- := \bigcup_{x\in\overline{N_l(G)}}[L_x(h) \cap V^{-1}(-c)]$, $D := \bigcup_{x\in\overline{N_l(G)}, L_x(h)\cap N_l(G)=\varnothing}[L_x(h) \cap V^{-1}([-c,c])]$

5) Отображения $\Phi_c(x) : A(c,l) \cap (\Gamma(h) \cup \Pi_+(h)) \to P_+$ и $\Phi_{-c}(x) : A(c,l) \cap (\Gamma(h) \cup \Pi_-(h)) \to P_-$ ($\Phi_c(x) := L_x(h) \cap V^{-1}(c)$, $\Phi_{-c}(x) := L_x(h) \cap V^{-1}(-c)$) однозначны и непрерывны.

6) Пусть P_1 - это компонента связности P, тогда $P_1 \cap \Pi(h) \ne \varnothing$.

7) Любая компонента связности P лежит в компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\}) \cap N_h(G)$, расстояние от которой до G равно нулю, и в любой компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\}) \cap N_h(G)$, расстояние от которой до G равно нулю, лежит компонента связности P.

8) $\theta(V,h) \le \#(P) < +\infty$, где, как уже определялось в формулировке теоремы 4.4, $\theta(V,h)$ - это число компонент связности $V^{-1}(R\setminus\{0\}) \cap N_h(G)$, расстояние от которых до G равно нулю, а $\#(A)$ - это число компонент связности множества A.

Доказательство:

1) Замкнутость следует из определения $A(c,l)$.

2) $\overline{N_l(G)} \subset A(c,l)$ по определению. Из леммы 4.6 следует, что все решения $\varphi(t,x), x \in \overline{N_l(G)}$, покидающие $N_h(G)$ каким либо концом, достигают этим концом линий уровня $V^{-1}(-c), V^{-1}(c)$, еще не выйдя за пределы $N_h(G)$, поэтому $A(c,l) \subset N_h(G)$.

3) Связность следует из связности множества $\overline{N_l(G)}$ и монотонности V вдоль решений, а $\overline{N_l(G)}$ - связно, как замкнутая окрестность связного множества G.

4) Пусть $x \in \partial A(c,l)$, так как $A(c,l)$ - замкнуто, то $x \in A(c,l) = \{\varphi(t,x) : x \in \overline{N_l(G)}, |V(\varphi(t,x))| \le c\}$, $x \notin IntA(c,l)$. Итак, $x \notin IntA(c,l)$, тогда либо $L_x(h) \cap N_l(G) = \varnothing$, но так как $x \in A(c,l)$, то найдется $y \in \overline{N_l(G)} : x \in L_y(h) \cap V^{-1}([-c,c])$, то есть $x \in D$, либо $|V(x)| \ge c$, но так как

$x \in A(c,l)$, то найдется $y \in \overline{N_l(G)} : x \in L_y(h), |V(x)| \le c$, таким образом $|V(x)| = c$, а значит $x \in P$.

5) Докажем это утверждение для $\Phi_c(x)$, для $\Phi_{-c}(x)$ доказывается аналогично. Пусть $x \in A(c,l) \cap (\Gamma(h) \cup \Pi_+(h))$, тогда по определению множества $A(c,l)$ (4.5) $L_x(h) \cap \overline{N_l(h)} \ne \varnothing$, а так как $L_x(h)$ гиперболическая или положительная параболическая траектория, то по лемме 4.6 $L_x(h) \cap V^{-1}(c) \ne \varnothing$, а поскольку функция V возрастает вдоль решения, то $L_x(h) \cap V^{-1}(c)$ состоит только из одной точки, к тому же, из определений множеств $A(c,l)$ и P_+ следует, что $\Phi_c(x) \in P_+$. Непрерывность $\Phi_c(x)$ следует из теоремы об интегральной непрерывности, непрерывности функции V и однозначности $\Phi_c(x)$.

6) Пусть P_1 - это какая-то компонента связности P. Предположим, что $P_1 \cap \Pi(h) = \varnothing$, а так как $P \subset N_h(G) = \Pi(h) \cup \Gamma(h)$, то $P_1 \subset \Gamma(h)$.

Из определения множества P, которое находится в пункте 4) леммы 4.7, следует, что P – замкнуто, значит, и P_1 - замкнуто. Определим множество $K := \bigcup\limits_{x \in P_1} [L_x(h) \cap V^{-1}([-c,c])]$. Так как P_1 - замкнуто и $P_1 \subset \Gamma(h)$, то K – замкнуто и $K \subset \Gamma(h)$, а поскольку K к тому же и ограниченно, K - компакт. Так как компакт K содержится в открытом множестве $\Gamma(h)$, найдется окрестность $W(K) \subset \Gamma(h)$.

Так как $K \subset \Gamma(h)$, то $K \cap G = \varnothing$, а поскольку $G \subset A(c,l)$, $K \ne A(c,l)$. С другой стороны, из определений множеств $A(c,l)$ (4.5), P (пункт 4) леммы 4.7) и K следует, что $K \subset A(c,l)$. По пункту 3) леммы 4.7 множество $A(c,l)$ - связно, значит, найдется непрерывный путь $\lambda : [0,1] \to A(c,l)$, такой, что $\lambda(0) \in A(c,l) \setminus K$, $\lambda(1) \in K$. Так как этот путь непрерывен, то можно н. у. о. считать, что $\lambda([0,1]) \subset A(c,l) \cap W(K)$, $\lambda(0) \in A(c,l) \setminus K$, $\lambda(1) \in K$. Поскольку $W(K) \subset \Gamma(h)$, то $\lambda([0,1]) \subset A(c,l) \cap \Gamma(h)$, следовательно, по пункту 5) леммы 4.7 на $\lambda([0,1])$ определено отображение $\Phi_c(x)$. Предположим теперь н. у. о., что $P_1 \subset P_+$. Так как λ и Φ_c непрерывны, то образ $\Phi_c(\lambda([0,1])) \subset P_+$ - это связанное множество, а так как $\Phi_c(\lambda(1)) \subset P_1$ (это вытекает из определения множества K, и из того, что $P_1 \subset P_+$ и $\lambda(1) \in K$) и P_1 - связно, то $\Phi_c(\lambda([0,1])) \subset P_1$, следовательно, $\Phi_c(\lambda(0)) \in P_1$. Итак, $\Phi_c(\lambda(0)) \in P_1$ и $\lambda(0) \in A(c,l)$, следовательно, по определению множеств K и $A(c,l)$ $\lambda(0) \in K$, и мы приходим к противоречию, поскольку $\lambda(0) \in A(c,l) \setminus K$.

Итак наше предположение о том, что $P_1 \cap \Pi(h) = \varnothing$ не верно, следовательно $P_1 \cap \Pi(h) \ne \varnothing$.

7) Пусть P_1 - это какая-то компонента связности P. Поскольку V на P_1 равна либо, $-c$ либо c, V сохраняет знак на P_1, значит, P_1 содержится в какой-то компоненте связности $V^{-1}(R \setminus \{0\}) \cap N_h(G)$, обозначим ее через Θ. Так как по пункту 6) леммы 4.7 $P_1 \cap \Pi(h) \ne \varnothing$ и $P_1 \subset \Theta$, то $\Theta \cap \Pi(h) \ne \varnothing$. То

есть, Θ содержит параболическую точку, а поскольку параболические траектории стремятся к G и лежат целиком в Θ, то $dist(\Theta,G)=0$.

Итак, наша произвольно взятая компонента связности P лежит в компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap N_h(G)$, расстояние от которой до G равно нулю.

Покажем теперь, что в любой компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap N_h(G)$, расстояние от которой до G равно нулю, содержится, компонента связности P.

Пусть Θ - это какая-то компонента связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap N_h(G)$, $dist(\Theta,G)=0$. Пусть н. у. о. $V\big|_{\Theta}>0$. Так как $dist(\Theta,G)=0$, то $\Theta\cap A(l,c)\neq\varnothing$, пусть $x\in\Theta\cap A(l,c)$. Поскольку $V(x)>0$, то по лемме 4.5 точка x не может быть отрицательно параболической, следовательно, $x\in A(l,c)\cap(\Gamma(h)\cup\Pi_+(h))$, а значит, по пункту 5) леммы 4.7 определено $y:=\Phi_c(x)=L_x(h)\cap P_+\in P_+$. Так как $y\in L_x(h)$, $V(x)>0$, $V(y)=c>0$ и функция V возрастает вдоль решений то y лежит в той же компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap N_h(G)$, что и x, то есть $y\in\Theta$. Итак, $y\in P$ и $y\in\Theta$, значит, $\Theta\cap P\neq 0$, а в самом начале доказательства пункта 5) было замечание о том, что если компонента связности P пересекается с компонентой связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap N_h(G)$, то она целиком в ней лежит, следовательно найдется P_1 - компонента связности P, $P_1\subset\Theta$.

8) Из пункта 7) леммы 4.7 следует, что $\theta(V,h)\leq\#(P)$. Осталось показать, что $\#(P)<+\infty$.

Покажем сперва, что $\#(P)\leq\bar{\theta}(V,l)$, где $\bar{\theta}(V,l)$ - это число компонент связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$, расстояние от которых до G равно нулю.

Пусть Θ_1 - это какая-то компонента связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$, $dist(\Theta_1,G)=0$. Так как $V\big|_{\Theta_1}>0$ ($V\big|_{\Theta_1}<0$), то $\Theta_1\subset\Gamma(h)\cap\Pi_+(h)$ ($\Theta_1\subset\Gamma(h)\cap\Pi_-(h)$), а поскольку $\Theta_1\subset\overline{N_l(h)}\subset A(c,l)$, то на Θ_1 определено отображение Φ_c (Φ_{-c}), значит, $\Phi_c(\Theta_1)\subset P_+$ ($\Phi_{-c}(\Theta_1)\subset P_-$), а так как Φ_c, Φ_{-c} - непрерывны и Θ_1 - связно, то $\Phi_c(\Theta_1)$ ($\Phi_{-c}(\Theta_1)$) может содержаться только в одной компоненте связности множества P.

Рассмотрим отображение, которое каждой компоненте связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$ Θ_1: $dist(\Theta_1,G)=0$ ставит в соответствие компоненту связности P, в которой лежит $\Phi_c(\Theta_1)$ ($\Phi_{-c}(\Theta_1)$). Это отображение сюрьективно, поскольку, как мы уже доказывали, любая компонента связности P содержит параболические точки, а значит, эти параболические траектории пересекаются с какой-то компонентой связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$, расстояние от которой до G равно нулю, следовательно, в любой компоненте связности P содержится образ компоненты связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$ при отображении Φ_c (Φ_{-c}). Из факта существования такого отображения и его сюрьективности следует, что $\#(P)\leq\bar{\theta}(V,l)$.

Докажем теперь, что $\bar{\theta}(V,l)<+\infty$. Пусть это не так, тогда можно выбрать бесконечную последовательность компонент связности $V^{-1}(R\setminus\{0\})\cap\overline{N_l(G)}$: Θ_k, $dist(\Theta_k,G)=0$. Рассмотрим множества $\theta_k:=\Theta_k\cap\partial N_l(G)$. Поскольку все точки из Θ_k либо гиперболические, либо параболические, значит, все траектории, начинающиеся в Θ_k покидают $\overline{N_l(G)}$ либо при возрастании, либо при убывании времени, а так как V монотонна вдоль решений, то эти траектории до момента выхода будут оставаться в Θ_k, следовательно, $\theta_k\neq\varnothing$.

Будем теперь рассматривать последовательность множеств θ_k на поверхности $\partial N_l(G)$. Покажем, что любое множество θ_k содержит параболические точки. Пусть это не так, тогда $\theta_k\subset\Gamma(h)\cap\partial N_l(G)$. Если $\overline{\theta_k}\not\subset\Gamma(h)\cap\partial N_l(G)$, то $\partial\theta_k\cap\Pi(h)\neq\varnothing$, где $\partial\theta_k$ - граница θ_k, как подмножества $\partial N_l(G)$, то есть на $\partial\theta_k$ лежат параболические точки, а этого не может быть, поскольку $V(\partial\theta_k)=\{0\}$, а по лемме 4.5 V не может обращаться в ноль в параболических точках. Итак, $\overline{\theta_k}\subset\Gamma(h)\cap\partial N_l(G)$. Рассмотрим множество $K:=\bigcup_{x\in\overline{\theta_k}}\overline{L_x(l)}$, так как $\overline{\theta_k}\subset\Gamma(h)$ и $\overline{\theta_k}$ - замкнуто, то по теореме об интегральной непрерывности K – компакт, к тому же $K\subset\Gamma(h)$, а так как $\Gamma(h)$ - открыто, то $dist(K,G)>0$. Из определения Θ_k, θ_k и K следует, что $\Theta_k\subset K$, а поскольку $dist(K,G)>0$, то $dist(\Theta_k,G)>0$ - противоречие, мы предполагали $dist(\Theta_k,G)=0$.

Итак, мы показали, что θ_k содержит параболические точки. Рассмотрим последовательность $x_k\in\theta_k\cap\Pi(h)$, так как $\theta_k\subset\partial N_l(G)$ и $\partial N_l(G)$ - компакт, то из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, пусть н. у. о. $x_k\to x^*$. Поскольку множество $\Gamma(h)\cap\partial N_l(G)$ - открыто как подмножество $\partial N_l(G)$, то множество $\Pi(h)\cap\partial N_l(G)$ - замкнуто как подмножество $\partial N_l(G)$, а так как x_k - последовательность параболических точек, то $x^*\in\Pi(h)$.

Обозначим, μ_k - мера Лебега множества θ_k на многообразии $\partial N_l(G)$. Так как $\partial N_l(G)$ - ограничено, то мера этого множества конечна, а поскольку множества θ_k попарно дизъюнктны и их бесконечно много, то из последовательности μ_k можно выбрать сходящуюся к нулю подпоследовательность, пусть н. у. о. $\mu_k\to 0$, следовательно, x_k стремится к границе θ_k как подмножества $\partial N_l(G)$, то есть $x_k\to\partial\theta_k$. Но мы знаем, что $V(\partial\theta_k)=\{0\}$ и $x_k\to x^*$, поэтому $V(x^*)=0$ по непрерывности V, следовательно, по лемме 4.5 точка x^* не может быть параболической, а значит, $x^*\in\Gamma(h)$. Это противоречит тому, что $x^*\in\Pi(h)$, значит, наше предположение о том, что $\bar{\theta}(V,l)=+\infty$, не верно, то есть $\bar{\theta}(V,l)<+\infty$.

Итак, окончательно мы получаем: $\theta(V,h)\leq\#(P)\leq\bar{\theta}(V,h)<+\infty$.

ч. т. д.

По лемме 4.7 $A(c,l)$ - компактно и $A(c,l) \subset N_h(G)$, следовательно, $dist(A(c,l),\partial N_h(G)) > 0$, обозначим $r_1 := dist(A(c,l),\partial N_h(G))/3 > 0$, тогда $A(c,l) \subset N_{h-r_1}(G)$, $\overline{N_{h-r_1}(G)} \subset N_h(G)$. Обозначим $r_2 := \min\{r_1, l/2\}$, тогда $A(c,l) \subset N_{h-r_2}(G)$ и $\overline{N_{r_2}(G)} \subset IntA(c,l)$, поскольку по лемме 4.7 $\overline{N_l(G)} \subset A(c,l)$.

4.8. Лемма.

Существует $\Delta_1 > 0$, *такое, что, если* $\|P(x) - Q(x)\| < \Delta_1$, $x \in N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$, *то на множестве* $N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$ *траектории (4.1) пересекают поверхности уровня функции V трансверсально, то есть* $DV\big|_{(4.1)}(x) > 0$, $x \in N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$.

Доказательство:

Так как $DV\big|_{(2.1)}(x) = (gradV(x), P(x)) > 0$, $x \in N_h(G) \setminus G$, то траектории системы (2.1) пересекают линии уровня функции Л-К V трансверсально на множестве $N_h(G) \setminus G$ (скалярное произведение вектора нормали к поверхности уровня и $P(x)$ положительно, значит угол между этими векторами острый, следовательно траектория пересекает линию уровня трансверсально). Поскольку $\overline{N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)}$ - компакт и $DV\big|_{(2.1)}(x) > 0$ на этом множестве, то $\chi := \min\limits_{x \in \overline{N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)}} DV\big|_{(2.1)}(x)$, $\eta := \min\limits_{x \in \overline{N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)}} \|gradV(x)\| > 0$. Обозначим $\Delta_1 := \chi/(2\eta)$, и покажем, что это Δ_1 - искомое. Предположим, что $\|P(x) - Q(x)\| < \Delta_1$, $x \in N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$, тогда

$$DV\big|_{(4.1)}(x) = DV(x)P(x) + DV(x)(Q(x) - P(x)) \geq$$

$$DV\big|_{(2.1)}(x) - \|gradV(x)\|\|P(x) - Q(x)\| \geq \chi - \eta(\chi/(2\eta)) = \eta/2 > 0$$

Итак, на множестве $N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$ траектории (4.1) пересекают поверхности уровня функции V трансверсально.

ч. т. д.

4.9. Лемма.

Пусть точка $x \in P$, $u(x)$ *- некоторая ее окрестность на поверхности* $V^{-1}(\{-c, c\})$, $\overline{u(x)} \subset N_{h-r_2}(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$. *Тогда найдется некоторая окрестность* $U(x)$ *в* R^n *и число* $\Delta_2 > 0$, *зависящие от* x *и* $u(x)$, *такие, что, если* $\|P(y) - Q(y)\| < \min\{\Delta_1, \Delta_2(x)\}$, $y \in N_h(G)$, *то, если* $z \in U(x)$, *то найдется* $\tau(z) \in R$, *такое, что* $\psi(\tau(z), z) \in u(x)$ *и* $\psi(t, z) \in N_{h-r_2}(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$, $t \in [0, \tau(z)]$, $\tau(z) \geq 0$, ($t \in [\tau(z), 0]$, $\tau(z) \leq 0$).

Доказательство:

Так как $\overline{u(x)} \subset V^{-1}(\{-c,c\}) \cap N_{h-r_2}(G)$, а это трансверсаль для системы (2.1), то по теореме о существовании цилиндра траекторий [4] найдется $\delta > 0$, такое, что отображение $f:[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)} \to Z_1 = f([-\delta,\delta]\times\overline{u(x)})$ ($f := \varphi\Big|_{[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}}$) является диффеоморфизмом, следовательно Z_1 - замкнутая окрестность точки x. К тому же, н. у. о. можно считать, что $Z_1 \subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, если это не так, то, поскольку $\overline{u(x)} \subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, можно просто уменьшить δ. Так как $N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$ - открыто, Z_1 - компакт, и $Z_1 \subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, то $\varepsilon_1 := dist(Z_1, \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)})) > 0$.

Поскольку Z_1 - окрестность точки x, то найдется $\varepsilon_2 > 0$, такое, что открытый шар $B_{\varepsilon_2}(x) := \{y \in R^n : \|x-y\| < \varepsilon_2\} \subset Z_1$. Обозначим теперь $U(x) := B_{\varepsilon_2/2}(x)$, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2/2\}$, $\Delta_2(x) := \varepsilon\delta^{-1}\exp(-L\delta)$, и покажем, что эта окрестность $U(x)$ и оценка $\Delta_2(x)$ - искомые.

Пусть $\|P(y)-Q(y)\| < \min\{\Delta_1, \Delta_2(x)\}$, $y \in N_h(G)$. По лемме 4.8 на множестве $N_h(G)\setminus N_{r_2}(G)$ траектории (4.1) пересекают поверхности уровня функции V трансверсально, а так как $\overline{u(x)} \subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, то $\overline{u(x)}$ - это замкнутая окрестность на трансверсали. Пусть $z \in \overline{u(x)}$ и δ_1 : $0 < \delta_1 \le \delta$ - максимально возможное число, такое, что решение $\psi(t,z)$ продолжимо на промежуток $[-\delta_1, \delta_1]$ и $\psi([-\delta_1,\delta_1], z) \subset \overline{N_{h-r_2}(G)}\setminus N_{r_2}(G)$. Так как, по определению отображения f ($z \in \overline{u(x)}$), решение $\varphi(t,z)$ продолжимо на $[-\delta,\delta]$ и $\delta_1 \le \delta$, то $\varphi(t,z)$ продолжимо на $[-\delta_1,\delta_1]$.

Поскольку $\psi([-\delta_1,\delta_1],z) \subset \overline{N_{h-r_2}(G)}$ и $\varphi([-\delta_1,\delta_1],z) = f([-\delta_1,\delta_1],z) \subset Z_1 \subset N_{h-r_2}(G)$, то по теореме 1.6 (условия 1), 2), 3) теоремы 4.4 – это условия 1), 3) теоремы 1.6, начальные данные по *x* и по *t* у этих решений совпадают) $\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\| \le \sup\limits_{y\in N_{h-r_2}(G)} \|P(y)-Q(y)\|\delta_1\exp(L\delta_1) < \Delta_2(x)\delta\exp(L\delta) = \varepsilon$, $t \in [-\delta_1,\delta_1]$.

Допустим, что $\delta_1 < \delta$, тогда из определения δ_1 следует, что либо $\psi(\delta_1,z) \in \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus N_{r_2}(G))$, либо $\psi(-\delta_1,z) \in \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus N_{r_2}(G))$, пусть н. у. о. $\psi(\delta_1,z) \in \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus N_{r_2}(G))$, а так как $\varphi(\delta_1,z) \in Z_1$, то $\|\varphi(\delta_1,z)-\psi(\delta_1,z)\| \ge dist(Z_1, \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)})) = \varepsilon_1 \ge \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2/2\} = \varepsilon$, но $\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\| < \varepsilon$, $t \in [-\delta_1,\delta_1]$ - противоречие. Итак, $\delta_1 = \delta$, следовательно, $\psi(t,z)$ продолжимо на $[-\delta,\delta]$ и $\psi([-\delta,\delta],z) \subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, последнее включение опять же следует из того, что $\psi([-\delta,\delta],z) \cap \partial(N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}) = \varnothing$, поскольку $\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\| < \varepsilon$, $t \in [-\delta_1,\delta_1]$.

Таким образом, для любого $z\in\overline{u(x)}$ решение $\psi(t,z)$ продолжимо на $[-\delta,\delta]$ и $\psi([-\delta,\delta],z)\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, следовательно определено отображение $g:[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}\to Z_2=g([-\delta,\delta]\times\overline{u(x)})\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$ ($g:=\psi\big|_{[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}}$). Покажем, что это диффеоморфизм. Как было уже упомянуто $\overline{u(x)}$ - это замкнутая окрестность на трансверсали системы (4.1), следовательно g является локальным диффеоморфизмом [4], осталось показать, что g - взаимнооднозначно. Пусть это не так, тогда найдется $(t_1,z_1),(t_2,z_2)\in[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}$, $(t_1,z_1)\neq(t_2,z_2)$, такие, что $g(t_1,z_1)=g(t_2,z_2)$, то есть $\psi(t_1,z_1)=\psi(t_2,z_2)$, следовательно, $\psi(-t_1,\psi(t_1,z_1))=\psi(-t_1,\psi(t_2,z_2))$, то есть $z_1=\psi(t_2-t_1,z_2)$. Пусть н. у. о. $t_2-t_1\geq 0$. Так как $t_1,t_2\in[-\delta,\delta]$, то $\{\psi(t,z_2):t\in[0,t_2-t_1]\}\subset\psi([-\delta,\delta],z_1)\cup\psi([-\delta,\delta],z_2)$. Так как $z_1,z_2\in\overline{u(x)}$, то $\psi([-\delta,\delta],z_1)\cup\psi([-\delta,\delta],z_2)\subset Z_2\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, следовательно, $\{\psi(t,z_2):t\in[0,t_2-t_1]\}\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, но по лемме 4.8 $DV\big|_{(4.1)}(y)>0$, $y\in N_h(G)\setminus N_{r_2}(G)$, то есть функция V монотонна вдоль решений на этом множестве. Поскольку $\overline{u(x)}\subset V^{-1}(\{-c,c\})$ и $\overline{u(x)}$ - связно, то либо $\overline{u(x)}\subset V^{-1}(c)$, либо $\overline{u(x)}\subset V^{-1}(-c)$, а так как $z_1,z_2\in\overline{u(x)}$, то $V(z_1)=V(z_2)$. Итак, $V(z_1)=V(z_2)$, $z_1=\psi(t_2-t_1,z_2)$, и V монотонна вдоль решения $\psi(t,z_2)$, при $t\in[0,t_2-t_1]$, следовательно, $t_1=t_2$ и $z_1=\psi(0,z_2)=z_2$, а это противоречит тому, что $(t_1,z_1)\neq(t_2,z_2)$. Таким образом, мы доказали, что $g:[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}\to Z_2$ - взаимнооднозначно, а значит это диффеоморфизм.

Итак, имеется два диффеоморфизма: $f:[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}\to Z_1$ и $g:[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}\to Z_2$, определим отображение $q:Z_2\to Z_1$, $q:=f\circ g^{-1}$, это тоже диффеоморфизм, как композиция двух диффеоморфизмов.

Пусть $y\in Z_2$, тогда $\|q(y)-y\|=\|f(g^{-1}(y))-g(g^{-1}(y))\|<\varepsilon$, последнее неравенство следует из того, что $g^{-1}(y)\in[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}$ и у нас была получена оценка $\|f(t,z)-g(t,z)\|=\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\|<\varepsilon$, $(t,z)\in[-\delta,\delta]\times\overline{u(x)}$. Таким образом $\|q(y)-y\|<\varepsilon$, $y\in Z_2$.

Покажем теперь, что $U(x)=B_{\varepsilon_2/2}(x)\subset Z_2$. Допустим, что это не так, тогда найдется точка x_1, такая, что $x_1\notin Z_2$, $\|x_1-x\|<\varepsilon_2/2$. Так как $\overline{u(x)}\subset Z_2$, то $x\in Z_2$, а так как $x_1\notin Z_2$, то $[x,x_1]\cap\partial Z_2\neq\varnothing$ ($[x,x_1]:=\{x+t(x_1-x):t\in[0,1]\}$ - отрезок, соединяющий точки x и x_1), то есть найдется $x_2\in[x,x_1]\cap\partial Z_2$. Поскольку $x_2\in[x,x_1]$, то $\|x_2-x\|\leq\|x_1-x\|<\varepsilon_2/2$. Так как $x_2\in\partial Z_2$ и $q:Z_2\to Z_1$ - диффеоморфизм, то $q(x_2)\in\partial Z_1$, а поскольку по построению $B_{\varepsilon_2}(x)\subset Z_1$, то $\|q(x_2)-x\|\geq\varepsilon_2$. С другой стороны, $\|q(x_2)-x_2\|\leq\|q(x_2)-x\|+\|x_2-x\|<\varepsilon+\varepsilon_2/2=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2/2\}+\varepsilon_2/2\leq\varepsilon_2$, таким образом, $\|q(x_2)-x_2\|<\varepsilon_2$, а это противоречит тому, что $\|q(x_2)-x\|\geq\varepsilon_2$. Итак,

$U(x)\subset IntZ_2$ (так как $U(x)$ - открыто, а Z_2 - замкнуто), следовательно, если $z\in U(x)$, то $z\in IntZ_2$.

Пусть $z\in U(x)$, тогда $z\in IntZ_2$, а значит $g^{-1}(z)\in Int([-\delta,\delta]\times\overline{u(x)})=(-\delta,\delta)\times u(x)$, обозначим $(-\tau(z),z_1):=g^{-1}(z)\in(-\delta,\delta)\times u(x)$, тогда $\psi(\tau(z),z)=\psi(\tau(z),g(g^{-1}(z)))=\psi(\tau(z),\psi(-\tau(z),z_1))=z_1\in u(x)$, а так как $\psi([-\delta,\delta],z_1)\subset Z_2\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, то (пусть н. у. о. $\tau(z)\ge 0$) $\psi([0,\tau(z)],z)=\psi([-\tau(z),0],z_1)\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$. Итак мы показали, что найдется $\tau(z)\in R$, такое, что $\psi(\tau(z),z)\in u(x)$ и $\psi(t,z)\in N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, $t\in[0,\tau(z)]$, $\tau(z)\ge 0$, ($t\in[\tau(z),0]$, $\tau(z)\le 0$).

ч. т. д.

Так как $A(c,l)\subset N_{h-r_2}(G)$ и $\overline{N_{r_2}(G)}\subset IntA(c,l)$, то $\partial A(c,l)\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, а поскольку $P\subset\partial A(c,l)$, то $P\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$. Множество P - компактно, а $N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$ - открыто, к тому же $P\subset V^{-1}(\{-c,c\})$, следовательно, для каждой компоненты связности P_k множества P ($P=\bigcup_{k=1}^{\#(P)}P_k$) найдется S_k - окрестность P_k на многообразии $V^{-1}(\{-c,c\})$, такая, что $\overline{S_k}\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$. Так как по пункту 8) леммы 4.7 $\#(P)<+\infty$, то можно выбрать эти окрестности так, что $S_k\cap S_l=\varnothing$, $k\ne l$, так и сделаем. Обозначим теперь $S:=\bigcup_{k=1}^{\#(P)}S_k$ - окрестность P на многообразии $V^{-1}(\{-c,c\})$, $\overline{S}\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$.

Для каждой точки $x\in P$ выберем окрестность $u(x)$ на многообразии $V^{-1}(\{-c,c\})$, такую, что $u(x)\subset S$, так можно сделать, поскольку P - компактно, а S - окрестность P на многообразии $V^{-1}(\{-c,c\})$. Заметим, что, если $x\in P_k$, то $u(x)\subset S_k$, поскольку $S_k\cap S_l=\varnothing$, $k\ne l$. Так как $\overline{S}\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, то $\overline{u(x)}\subset N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, тогда по лемме 4.9 найдется окрестность $U(x)$ в R^n и $\Delta_2(x)>0$, обладающие указанными в лемме свойствами.

Рассмотрим $\{U(x)\}_{x\in P_k}$ - это открытое покрытие компактного множества P_k, из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{U(x_{l,k})\}_{l=1}^{m(k)}$, тогда $U(P_k):=\bigcup_{l=1}^{m(k)}U(x_{l,k})$ - окрестность P_k. Так как P_k - компакт, то $r_3(k):=dist(P_k,\partial U(P_k))>0$, а так как $\#(P)<+\infty$, то $r_3:=\min_{k=1,\dots,\#(P)}r_3(k)>0$. Далее будем рассматривать r_3 - окрестность множества P: $N_{r_3}(P):=\{x\in R^n:\rho(x,P)<r_3\}$.

4.10. Лемма.

Если $\|P(y)-Q(y)\|<\min\{\Delta_1,\Delta_2\}$, $y\in N_h(G)$, *где* $\Delta_2 := \min\limits_{k=1,\dots,\#(P),l=1,\dots,m(k)} \Delta_2(x_{l,k})$, *то*

1) если $z\in N_{r_3}(P)$, *то найдется* $\tau(z)\in R$, *такое, что* $\psi(\tau(z),z)\in S$ *и* $\psi(t,z)\in N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, $t\in[0,\tau(z)]$, $\tau(z)\geq 0$, ($t\in[\tau(z),0]$, $\tau(z)\leq 0$).

2) если P_k *- компонента связности* P, *и* $z\in N_{r_3}(P_k)$, *то* $\psi(\tau(z),z)\in S_k$, *где* S_k *- это окрестность* P_k.

Доказательство:

2) Пусть $\|P(y)-Q(y)\|<\min\{\Delta_1,\Delta_2\}$, $y\in N_h(G)$, и пусть $z\in N_{r_3}(P_k)\subset N_{r_3(k)}(P_k)$, тогда $z\in U(P_k)$ ($r_3(k)=dist(P_k,\partial U(P_k))$), а значит по определению $U(P_k)$ найдется l ($1\leq l\leq m(l)$), такое, что $z\in U(x_{l,k})$. Из определения Δ_2 и из нашего предположения следует, что $\|P(y)-Q(y)\|<\min\{\Delta_1,\Delta_2(x_{l,k})\}$, $y\in N_h(G)$, а значит по лемме 4.9 найдется $\tau(z)\in R$, такое, что $\psi(\tau(z),z)\in u(x_{l,k})$, но $u(x_{l,k})\subset S_k$, следовательно $\psi(\tau(z),z)\in S_k$, к тому же, $\psi(t,z)\in N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, $t\in[0,\tau(z)]$, $\tau(z)\geq 0$, ($t\in[\tau(z),0]$, $\tau(z)\leq 0$).

1) Это частный случай пункта 2).

ч. т. д.

Обозначим, $r:=\min\{r_2,r_3\}=\min\{l/2,r_1,r_3\}$, $\Delta_3 := r(2\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G)))^{-1}\exp(-2L\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G)))$, $\Delta:=\min\{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\}$, и покажем, что эти r и Δ - искомые, то есть те величины, существование которых утверждается в формулировке теоремы 4.4.

Введем для системы (4.1) обозначения, аналогичные обозначениям для системы (2.1):

$\widetilde{I}_x(h):=(\widetilde{a}_x(h),\widetilde{b}_x(h))$ – максимальный промежуток задания решения $\psi(t,x)$ в окрестности $N_h(G)$, где

$\widetilde{a}_x(h):=\inf\{t<0:\psi(\tau,x)\in N_h(G),\ \text{при всех}\ \tau\in(t,0]\}$

$\widetilde{b}_x(h):=\sup\{t>0:\psi(\tau,x)\in N_h(G),\ \text{при всех}\ \tau\in[0,t)\}$.

$S_+ := S\cap V^{-1}(c)$

$S_- := S\cap V^{-1}(-c)$

Так как $S\subset V^{-1}(\{-c,c\})$, то $S=S_+\cup S_-$.

4.11. Лемма.

Если $\|P(x)-Q(x)\|<\Delta$, $x\in N_h(G)$, *то*

1) система (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ *замкнутого инвариантного множества* $H\subset\overline{N_r(G)}$, *которое определяется равенством (4.2).*

2) если $x\in\overline{N_r(G)}$, *и решение* $\psi(t,x)$ *покидает* $N_{h-r}(G)$ *при возрастании (убывании) времени, то найдется* $t_+(x)(t_-(x))\in R$, *такое, что*

а) $0<t_+(x)<\tilde b_x(h-r)$, $\psi(t_+(x),x)\in S_+$,

($\tilde a_x(h-r)<t_-(x)<0$, $\psi(t_-(x),x)\in S_-$)

б) $|V(\psi([0,t_+(x)),x)|\subset[0,c)$, $V(\psi((t_+(x),\tilde b_x(h-r)),x)\subset(c,+\infty)$.

($|V(\psi((t_-(x),0],x)|\subset[0,c)$, $V(\psi((\tilde a_x(h-r),t_-(x)),x)\subset(-\infty,-c)$)

(из свойства б) следует, что $t_+(x)$ $(t_-(x))$ *определенное свойством а), - единственно)*

3) если S_k *- компонента связности* S, $S_k\subset S_+$ ($S_k\subset S_-$)*,то найдется* $x\in\overline{N_r(G)}$, *такое, что* $\psi(t_+(x),x)\in S_k$ ($\psi(t_-(x),x)\in S_k$)*.*

Доказательство:

1) Так как $\|P(x)-Q(x)\|<\Delta\le\Delta_3$, $x\in N_h(G)$, то по теореме 1.5 (условия 1) – 3) входят в условия теоремы 4.4, а условие 4) следует из определения Δ_3 ($\Delta_3<r(\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G)))^{-1}\exp(-L\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G)))$)) система (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ замкнутого множества $\overline{N_r(G)}$, следовательно, как было показано в начале этой главы, (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ замкнутого инвариантного множества $H\subset\overline{N_r(G)}$.

2) Пусть $x\in\overline{N_r(G)}$, будем для определенности доказывать существование $t_+(x)$, для $t_-(x)$ доказательство аналогичное.

Пусть $\psi(t,x)$ покидает $N_{h-r}(G)$ при возрастании времени, в этом случае $\tilde b_x(h-r)<+\infty$. Поскольку $x\in\overline{N_r(G)}\subset IntA(c,l)$ ($\overline{N_l(G)}\subset A(c,l)$, а $r=\min\{l/2,r_1,r_3\}$) и $A(c,l)\subset N_{h-r}(G)$, то $\psi(t,x)$ пересечет $\partial A(c,l)$ при возрастании времени, то есть существует момент времени $t^*>0$, $0<t^*<\tilde b_x(h-r)$, такой, что $z:=\psi(t^*,x)\in\partial A(c,l)$, $\psi([0,t^*),x)\subset IntA(c,l)$. По пункту 4) леммы 4.7 $\partial A(c,l)=P\cup D$, следовательно либо $z\in P$, либо $z\in D$.

Если $z\in P$, то в качестве $t_+(x)$ берем t^*, тогда $\psi(t_+(x),x)=z\in P\subset S$, то есть $\psi(t_+(x),x)\subset S$, и $0<t_+(x)<\tilde b_x(h-r)$. Остальные свойства, перечисленные в пункте 2), докажем ниже.

Если $z\in D$ и $z\notin P$, то, по определению множества D, найдется момент времени t_1, такой, что $0\le t_1<b_x(h)$, $\varphi(t_1,z)\in P$, $\{\varphi(t,z),t\in[0,t_1]\}\subset D$. Так как

$z \notin P$, то $t_1 \neq 0$, то есть $t_1 > 0$. Рассмотрим множество $K := \{(y,t) : y \in R^n, \|y - \varphi(t,z)\| \le r, t \in [0,t_1]\}$.

Так как $\{\varphi(t,z), t \in [0,t_1]\} \subset D$ и $D \subset A(c,l)$, то $\{\varphi(t,z), t \in [0,t_1]\} \subset A(c,l)$. Вспомним, что $r_1 = dist(A(c,l), \partial N_h(G))/3 > 0$, поэтому $2r_1 = 2dist(A(c,l), \partial N_h(G))/3 < dist(A(c,l), \partial N_h(G))$, следовательно, $A(c,l) \subset N_{h-2r_1}(G)$, а так как $r = \min\{l/2, r_1, r_3\}$, то $A(c,l) \subset N_{h-2r}(G)$. Итак, $\{\varphi(t,z), t \in [0,t_1]\} \subset N_{h-2r}(G)$, следовательно, $K \subset N_{h-r}(G) \times [0,t_1]$.

Так как K - компакт в расширенном фазовом пространстве, то решение $(\psi(t,z),t)$ входит в него при возрастании времени, поэтому оно должно покинуть его. Пусть $t^{**} \in (0,t_1]$ - первый момент выхода $(\psi(t,z),t)$ из K, то есть $(\psi(t^{**},z),t^{**}) \in \partial K$, $(\psi(\tau,z),\tau) \in IntK$, при $\tau \in (0,t^{**})$.
Предположим, что $t^{**} \in (0,t_1)$, тогда, так как $(\psi(t^{**},z),t^{**}) \in \partial K$, то $\|\varphi(t^{**},z) - \psi(t^{**},z)\| = r$. Итак, $(\varphi(\tau,z),\tau),(\psi(\tau,z),\tau) \in K$, $\tau \in [0,t^{**}]$, а поскольку $K \subset N_{h-r}(G) \times [0,t_1]$, то $\varphi(\tau,z), \psi(\tau,z) \in N_{h-r}(G)$, $\tau \in [0,t^{**}]$. Итак $\varphi(\tau,z), \psi(\tau,z) \in N_{h-r}(G)$, $\tau \in [0,t^{**}]$, и по условию $\|P(x) - Q(x)\| < \Delta \le \Delta_3$, $x \in N_h(G)$, тогда по теореме 1.6 (условия 1), 2), 3) теоремы 4.4 – это условия 1), 3) теоремы 1.6, начальные данные по x и по t у этих решений совпадают) $\|\varphi(t,z) - \psi(t,z)\| \le \Delta_3 t^{**} \exp(Lt^{**})$, $t \in [0,t^{**}]$. Так как $z \in D$, то точка z – гиперболическая для системы (2.1), поэтому решение $\varphi(t,x)$ покидает $N_h(G)$ обеими концами. Обозначим, $y_1 := \varphi(\tau_1,z) \in \partial N_h(G)$, где $\tau_1 := b_z(h) > 0$, - первый момент выхода $\varphi(t,z)$ из $N_h(G)$ при возрастании времени, $y_2 := \varphi(\tau_2,z) \in \partial N_h(G)$, где $\tau_2 := a_z(h) < 0$, - первый момент выхода $\varphi(t,z)$ из $N_h(G)$ при убывании времени. Положим $T_1 := \tau_1 - \tau_2 > 0$. Пусть $y_3 := \varphi(T_1/2, y_2)$, тогда $\varphi(T_1/2, y_3) = y_1$, $\varphi(-T_1/2, y_3) = y_2$. Так как $z \in D$, то, по определению множества D, $L_z(h) \cap N_l(G) = \varnothing$, а поскольку $y_3 \in L_z(h)$, то $y_3 \notin N_l(G)$, следовательно, $y_3 \in N_h(G) \setminus N_l(G)$, а значит, по определению 1.1 свойства Красовского, $\left\{\varphi(\tau, y_3) : -\overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G)) \le \tau \le \overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G))\right\} \not\subset N_h(G)$. Так как y_1 и y_2 - первые моменты выхода, то либо $T_1/2 \le \overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G))$, либо $-T_1/2 \ge -\overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G))$, следовательно, $T_1 \le 2\overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G))$. Мы выбирали $r = \min\{l/2, r_1, r_3\}$, так что $r < l$, значит, $\overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G)) \le \overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G))$, а так как $T_1 \le 2\overline{T_{(2.1)}}(l, N_h(G))$, то $T_1 \le 2\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G))$. Так как $t^{**} \in (0,t_1)$ и $t_1 < b_z(h) = \tau_1$, то $0 < t^* < \tau_1$, а поскольку $\tau_2 < 0$, то $0 < t^{**} < \tau_1 - \tau_2 = T_1$, таким образом $t^{**} < T_1 \le 2\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G))$. В начале этого абзаца мы установили, что $\|\varphi(t,z) - \psi(t,z)\| \le \Delta_3 t^{**} \exp(Lt^{**})$, $t \in [0,t^{**}]$, воспользуемся в этом неравенстве оценкой для t^{**} и выражением для Δ_3, тогда $\|\varphi(t,z) - \psi(t,z)\| < r(2\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G)))^{-1} \exp(-2L\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G)))$
$2\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G)) \exp(L2\overline{T_{(2.1)}}(r, N_h(G))) = r$, $t \in [0,t^{**}]$. Таким образом,

$\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\|<r$, $t\in[0,t^{**}]$, в частности, $\|\varphi(t^{**},z)-\psi(t^{**},z)\|<r$, но $\|\varphi(t^{**},z)-\psi(t^{**},z)\|=r$ - противоречие. Итак, наше предположение о том, что $t^{**}\in(0,t_1)$ не верно, а так как $t^{**}\in(0,t_1]$, то $t^{**}=t_1$.

Итак, $t^{**}=t_1$, а поскольку $\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\|<r$, $t\in[0,t^{**}]$, то $\|\varphi(t,z)-\psi(t,z)\|<r$, $t\in[0,t_1]$, следовательно, $\|\varphi(t_1,z)-\psi(t_1,z)\|<r$. Обозначим $z_1:=\varphi(t_1,z)\in P$ (мы выбирали t_1 так, что $\varphi(t_1,z)\in P$), $z_2:=\psi(t_1,z)$, тогда $\|z_1-z_2\|<r$, а так как $z_1\in P$, то $z_2\in N_r(P)\subset N_{r_3}(P)$. Так как $z_2\in N_{r_3}(P)$ и $\|P(x)-Q(x)\|<\Delta\le\min\{\Delta_1,\Delta_2\}$, $x\in N_h(G)$ (по условию), то по пункту 1) леммы 4.10 найдется $\tau(z_2)\in R$, такое, что $\psi(\tau(z_2),z_2)\in S$ и $\psi(t,z_2)\in N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, $t\in[0,\tau(z_2)]$, $\tau(z_2)\ge 0$, ($t\in[\tau(z_2),0]$, $\tau(z_2)\le 0$).

Обозначим, $t_+(x):=t^*+t_1+\tau(z_2)$, тогда $\psi(t_+(x),x)=\psi(\tau(z_2),\psi(t_1,\psi(t^*,x)))=\psi(\tau(z_2),\psi(t_1,z))=\psi(\tau(z_2),z_2)\in S$, то есть $\psi(t_+(x),x)\in S$.

Покажем сперва, что $t_+(x)>0$. Действительно, если $t_+(x)\le 0$, то $\tau(z_2)\le -(t^*+t_1)$, но $t^*>0$ и $t_1>0$, то есть $-(t^*+t_1)<0$, следовательно, $-(t^*+t_1)\in[\tau(z_2),0]$. Нетрудно показать, что $\psi(-(t^*+t_1),z_2)=x$, но $x\in\overline{N_r(G)}\subset\overline{N_{r_2}(G)}$ ($r=\min\{r_1,r_2\}$), то есть, $x\notin N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$. Таким образом, $-(t^*+t_1)\in[\tau(z_2),0]$ и $\psi(-(t^*+t_1),z_2)\notin N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, а это противоречит тому, что $\psi(t,z_2)\in N_{h-r_2}(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$, $t\in[\tau(z_2),0]$. Итак, $t_+(x)>0$.

Теперь покажем, что $t_+(x)<\tilde{b}_x(h-r)$. Действительно, $\{\psi(t,x):t\in[0,t^*]\}\subset A(c,l)\subset N_{h-r}(G)$, $\{\psi(t,z):t\in[0,t_1]\}\subset K\subset N_{h-r}(G)$ $\{\psi(t,z_2):t\in[0,\tau(z_2)]([\tau(z_2),0])\}\subset N_{h-r_2}(G)\subset N_{h-r}(G)$, следовательно, $\{\psi(t,x):t\in[0,t_+(x)]\}\subset N_{h-r}(G)$, значит, $t_+(x)<\tilde{b}_x(h-r)$.

Итак в обеих случаях ($z\in P$, $z\in D$) мы нашли $t_+(x)$, такое, что $0<t_+(x)<\tilde{b}_x(h-r)$ и $\psi(t_+(x),x)\in S$.

Докажем теперь остальные свойства $t_+(x)$, приведенные в лемме, то есть, что $\psi(t_+(x),x)\in S_+$, $|V(\psi([0,t_+(x)),x)|\subset[0,c)$ и $V(\psi((t_+(x),\tilde{b}_x(h-r)),x))\subset(c,+\infty)$. Так как $\overline{N_{r_2}(G)}\subset IntA(c,l)$ ($\overline{N_l(G)}\subset A(c,l)$, а $r_2=\min\{l/2,r_1\}$) и $|V(IntA(c,l))|\subset[0,c)$ (это следует непосредственно из определения $A(c,l)$), то $|V(\overline{N_{r_2}(G)})|\subset[0,c)$, а поскольку $x\in\overline{N_r(G)}\subset\overline{N_{r_2}(G)}$, то $|V(x)|<c$. Так как существует $t_+(x)$, такое, что $0<t_+(x)<\tilde{b}_x(h-r)$ и $\psi(t_+(x),x)\in S\subset V^{-1}(\{-c,c\})$, а $|V(x)|<c$, то найдется t', такое, что $0<t'\le t_+(x)$, $|V(\psi(t',x))|=c$ и $|V(\psi([0,t'),x))|\subset[0,c)$.

Покажем сперва, что $V(\psi(t',x))=c$. Поскольку $|V(\overline{N_{r_2}(G)})|\subset[0,c)$ и $|V(\psi(t',x))|=c$, то $\psi(t',x)\notin\overline{N_{r_2}(G)}$. Так как $0<t'\le t_+(x)<\tilde{b}_x(h-r)$, то $\psi(t',x)\notin N_{h-r}(G)\subset N_h(G)$. Итак, $\psi(t',x)\in N_h(G)\setminus\overline{N_{r_2}(G)}$ - открытое множество, следовательно, существует t'', такое, что $0 < t'' < t'$ и $\{\psi(t,x) : t \in [t'',t']\} \subset N_h(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$, но по лемме 4.8 ($\|P(x) - Q(x)\| < \Delta \le \Delta_1$, $x \in N_h(G)$, по условию) функция V возрастает вдоль решений системы (4.1) на множестве $N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$, следовательно, $V(\psi(t'',x)) < V(\psi(t',x))$. Так как $|V(\psi([0,t_+(x)),x)| \subset [0,c)$ и $0 < t'' < t'$, то $|V(\psi(t'',x))| < c$, а поскольку $|V(\psi(t',x))| = c$ и $V(\psi(t'',x)) < V(\psi(t',x))$, то $V(\psi(t',x)) = c$.

Докажем теперь, что $V(\psi((t',\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset (c,+\infty)$. Так как $t' > 0$ и $x \in \overline{N_r(G)} \subset N_{h-r}(G)$, то $\psi((t',\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset N_{h-r}(G) \subset N_h(G)$. Покажем, что $\psi((t',\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset N_h(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$. Действительно, если это не так, то, поскольку $\psi(t',x) \in N_h(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$, найдется t''', такое, что $t' < t''' < \tilde{b}_x(h-r)$, $\{\psi(t,x) : t \in [t',t''')\} \subset N_h(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$, $\psi(t''',x) \in \partial N_{r_2}(G)$. Так как $\psi(t''',x) \in \partial N_{r_2}(G) \subset \overline{N_{r_2}(G)}$ и $|V(\overline{N_{r_2}(G)})| \subset [0,c)$, то $|V(\psi(t''',x))| < c$. С другой стороны, $\{\psi(t,x) : t \in [t',t''']\} \subset N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$, а по лемме 4.8 V возрастает вдоль решений системы (4.1) на множестве $N_h(G) \setminus N_{r_2}(G)$, следовательно, поскольку $t' < t'''$, $V(\psi(t',x)) < V(\psi(t''',x))$, а это противоречит тому, что $V(\psi(t',x)) = c$ и $|V(\psi(t''',x))| < c$. Итак, мы доказали от противного, что $\psi((t',\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset N_h(G) \setminus \overline{N_{r_2}(G)}$, а так как опять же по лемме 4.8 на этом множестве V возрастает вдоль решений и $V(\psi(t',x)) = c$, то $V(\psi((t',\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset (c,+\infty)$.

Из последнего включения и из того, что $\psi(t_+(x),x) \in S \subset V^{-1}(\{-c,c\})$, следует, что $t_+(x) \notin (t',\tilde{b}_x(h-r))$, а так как $t' \le t_+(x) < \tilde{b}_x(h-r)$, то $t_+(x) = t'$. Но для t' мы доказали все нужные свойства, следовательно, $\psi(t_+(x),x) \in S_+$, $|V(\psi([0,t_+(x)),x)| \subset [0,c)$, $V(\psi((t_+(x),\tilde{b}_x(h-r)),x)) \subset (c,+\infty)$ и $V(\psi(t_+(x),x)) = c$, а поскольку $\psi(t_+(x),x) \in S$, то $\psi(t_+(x),x) \in S \cap V^{-1}(c) \subset S_+$.

3) Пусть S_k - компонента связности S и н. у. о. $S_k \subset S_+$, тогда по определению S_k, S_k - это окрестность P_k, то есть $P_k \subset S_k$. Так как $S_k \subset S_+$ и $P_k \subset S_k$, то $P_k \subset P_+$. По пункту 6) леммы 4.7 $P_1 \cap \Pi(h) \ne \varnothing$, а поскольку $P_k \subset P_+ \subset V^{-1}(c)$, $V(\Pi_-(h)) \subset (-\infty,0)$ (по пункту 2) леммы 4.5) и $\Pi(h) = \Pi_+(h) \cup \Pi_-(h)$, то $P_1 \cap \Pi_+(h) \ne \varnothing$. Пусть $y \in P_1 \cap \Pi_+(h)$, тогда решение $\varphi(t,y)$ при возрастании времени покидает $N_h(G)$, а при убывании стремится к G, не покидая при этом $N_h(G)$. Так как $\overline{N_r(G)} \subset IntA(c,l)$, $y \in P_k \subset \partial A(c,l)$, то $y \notin \overline{N_r(G)}$, а поскольку $\varphi(t,y)$ при убывании времени стремится к G, то найдется $t_1 > 0$, такое, что $x := \varphi(-t_1,y) \in \partial N_r(G)$. Так как по пункту 1) леммы 4.5 V убывает вдоль решений (2.1) при убывании времени и $V(y) = c$ ($y \in P_k \subset P_+ \subset V^{-1}(c)$), то $V(\varphi([-t_1,0],y)) \subset (-\infty,c]$, а поскольку $y \in \Pi_+(h)$ и по пункту 2) леммы 4.5 $V(\Pi_+(h)) \subset (0,+\infty)$, то $V(\varphi([-t_1,0],y)) \subset (0,c]$. Так как $V(\varphi([-t_1,0],y)) \subset (0,c]$ и $y \in P_k \subset A(c,l)$, то по определению множества $A(c,l)$,

$\varphi([-t_1,0],y)\subset A(c,l)$, а поскольку $A(c,l)\subset N_{h-2r}(G)$ (это доказывалось в начале доказательства пункта 2) леммы 4.11), то $\varphi([-t_1,0],y)\subset N_{h-2r}(G)$.

Итак, $x\in\partial N_r(G)$, $y=\varphi(t_1,x)\in P_k$ и $\varphi([0,t_1],x)\subset N_{h-2r}(G)$.

Так как $x\in L_y(h)$ и $y\in\Pi_+(h)$, то $x\in\Pi_+(h)$, следовательно, $\varphi(t,x)$ при убывании времени стремится к G, не покидая при этом $N_h(G)$, а значит, $\varphi((-\infty,0],x)\subset N_h(G)$. При возрастании же времени $\varphi(t,x)$ покидает $N_h(G)$, пусть $\tau_1:=b_x(h)>0$ - первый момент выхода $\varphi(t,x)$ из $N_h(G)$. Так как $x\in\partial N_r(G)\subset N_h(G)\setminus N_r(G)$, то по определению 1.1 свойства Красовского, $\left\{\varphi(\tau,x):-\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G))\le\tau\le\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G))\right\}\not\subset N_h(G)$, а поскольку $\varphi((-\infty,0],x)\subset N_h(G)$ и τ_1 - первый момент выхода $\varphi(t,x)$ из $N_h(G)$, то $\tau_1\le\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G))$. Поскольку $\varphi([0,t_1],x)\subset N_{h-2r}(G)\subset N_h(G)$, то $t_1<b_x(h)=\tau_1$, следовательно, $t_1<\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G))$.

Далее полностью аналогично куску доказательства пункта 2) можно, пользуясь тем, что $y=\varphi(t_1,x)\in P_k$, $\varphi([0,t_1],x)\subset N_{h-2r}(G)$ и $t_1<\overline{T_{(2.1)}}(r,N_h(G))$, доказать, что $z:=\psi(t_1,x)\in N_{r_3}(P_k)$ (только в том доказательстве вместо обозначений x,y,z использовались имеющие тот же смысл z,z_1,z_2). Так как $z\in N_{r_3}(P_k)$, то по пункту 2) леммы 4.10, найдется $\tau(z)\in R$, обладающее указанными в лемме свойствами, такое, что $\psi(\tau(z),z)\in S_k$.

Обозначим теперь $\overline{t_+(x)}:=t_1+\tau(z)$, и снова аналогично куску доказательства пункта 2) можно показать, что $\psi(\overline{t_+(x)},x)\in S_k\subset S$ и $0<\overline{t_+(x)}<\widetilde{b}_x(h-r)$, но из пункта 2) следует, что $t_+(x)$, определяемое свойством а), - единственно, следовательно, $\overline{t_+(x)}=t_+(x)$.

Итак, мы нашли $x\in\overline{N_r(G)}$, такое, что $\psi(t_+(x),x)\in S_k$.

ч. т. д.

Перейдем теперь к заключительному этапу доказательства теоремы 4.4. Итак, мы нашли такие $\Delta>0$ и r: $0<r<h-r$, что, если $\|P(x)-Q(x)\|<\Delta$, $x\in N_h(G)$, то система (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ замкнутого инвариантного множества $H\subset\overline{N_r(G)}$, это следует из пункта 1) леммы 4.11. Осталось показать, что $H\neq\varnothing$.

Предположим от противного, что $H=\varnothing$.

Так как система (4.1) обладает свойством Красовского в окрестности $N_{h-r}(G)$ замкнутого инвариантного множества H, то по следствию 2.3, решения (4.1), начинающиеся на множестве $N_{h-r}(G)\setminus H$, либо одним концом покидают $N_{h-r}(G)$, а другим стремятся к H, либо покидают $N_{h-r}(G)$ обеими концами, а поскольку $H=\varnothing$, то все решения, начинающиеся на $N_{h-r}(G)$, обеими концами покидают $N_{h-r}(G)$, то есть все решения гиперболические. В частности все решения, начинающиеся на $\overline{N_r(G)}$, покидают $N_{h-r}(G)$ как при возрастании, так и при убывании времени, поскольку $\overline{N_r(G)} \subset N_{h-r}(G)$.

Тогда, по пункту 2) леммы 4.11 можно корректно определить однозначные отображения: $\Psi_c(x) : \overline{N_r(G)} \to S_+$ и $\Psi_{-c}(x) : \overline{N_r(G)} \to S_-$, $\Psi_c(x) := \psi(t_+(x), x)$, $\Psi_{-c}(x) := \psi(t_-(x), x)$.

Отображения $\Psi_c(x)$ и $\Psi_{-c}(x)$ - непрерывны, это следует из теоремы об интегральной непрерывности, непрерывности функции V и однозначности отображений.

Если $S_k \subset S_+$ ($S_k \subset S_-$) - компонента связности S_+ (S_-), то $\Psi_c(\overline{N_r(G)}) \cap S_k \neq \varnothing$ ($\Psi_{-c}(\overline{N_r(G)}) \cap S_k \neq \varnothing$), это следует из пункта 3) леммы 4.11.

Так как определены отображения $\Psi_c(x) : \overline{N_r(G)} \to S_+$ и $\Psi_{-c}(x) : \overline{N_r(G)} \to S_-$, а $\overline{N_r(G)} \neq \varnothing$, то $S_+ \neq \varnothing$ и $S_- \neq \varnothing$.

Покажем теперь, что S_+ и S_- - связанные множества. Предположим, что это не так, пусть н. у. о. S_+ - несвязно, то есть $\#(S_+) > 1$. Так как, для любой компоненты связности $S_k \subset S_+$, $\Psi_c(\overline{N_r(G)}) \cap S_k \neq \varnothing$, и $\Psi_c(\overline{N_r(G)}) \subset S_+$, то $\#(\Psi_c(\overline{N_r(G)})) > \#(S_+) > 1$, следовательно, $\Psi_c(\overline{N_r(G)})$ - несвязанное множество. С другой стороны, отображение $\Psi_c(x)$ - непрерывно и $\overline{N_r(G)}$ - связно (как замкнутая окрестность связанного множества G), следовательно $\Psi_c(\overline{N_r(G)})$ - связно. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно S_+ и S_- - связны.

Так как $S_+ \neq \varnothing$, $S_- \neq \varnothing$ и S_+ и S_- - связны, то $\#(S_+) = \#(S_-) = 1$.

Вспомним, что компоненты связности S_+ и S_- - это дизъюнктные окрестности компонент связности P_+ и P_- на многообразии $V^{-1}(\{-c, c\})$, соответственно, следовательно, $\#(P_+) = \#(S_+) = 1$ и $\#(P_-) = \#(S_-) = 1$. Так как $P = P_+ \cup P_-$, $P_+ \cap P_- = \varnothing$, и все эти множества компактны, то $\#(P) = \#(P_+) + \#(P_-) = 2$. Таким образом P состоит всего из двух компонент связности: P_+ и P_-.

Из пункта 7) леммы 4.7 следует, что P_+ и P_- лежат в компонентах связности $V^{-1}(R \setminus \{0\}) \cap N_h(G)$, расстояние от которой до G равно нулю, но так как $V(P_+) = c > 0$, $V(P_-) = -c < 0$, то они не могут лежать в одной и той же компоненте связности, следовательно, $\theta(V, h) \geq 2$. А по пункту 8) леммы 4.7, $\theta(V, h) \leq \#(P) = 2$. Таким образом, $\theta(V, h) \geq 2$ и $\theta(V, h) \leq 2$, следовательно, $\theta(V, h) = 2$, но по условию 4) теоремы 4.4, $\theta(V, h) \neq 2$, - противоречие.

Итак, наше предположение о том, что $H = \varnothing$, не верно, следовательно $H \neq \varnothing$, и на этом доказательство теоремы 4.4 завершается.

5. Список используемой литературы.

1. *Рейзинь Л. Э.* “Функции Ляпунова и проблемы различения”. Рига, Зинатие, 1986.

2. Конспект лекций по дифференциальным уравнениям.
СПбГУ, 1995 – 1996, лектор: *Ильин Ю. А.*

3. *Красносельский М. А.* “Геометрические методы нелинейного анализа”.
М., Наука, 1975.

4. Спец. курс “Качественная теория динамических систем и теория устойчивости”.
весенний семестр 1997 г., лектор: *Чурин Ю. В.*