TD2 L3 Econométrie

Exercice I

1°) On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 \end{array}$$

La dérivée s'écrit $f'(a) = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - ax_i)$, donc

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i - ax_i) \\ & \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} -2x_iy_i + 2ax_i^2 \\ & \Leftrightarrow \quad 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = a \end{aligned}$$

D'où l'estimateur de α, $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Remarque :

- la moyenne $(\bar{x}, \bar{y})$ n'est pas a priori sur la droite de régression.
- on retrouve le même α que pour une régression usuelle, si $\bar{x} = \bar{y} = 0$

2°) Il faut montrer que l'espérance de l'estimateur est bien α.

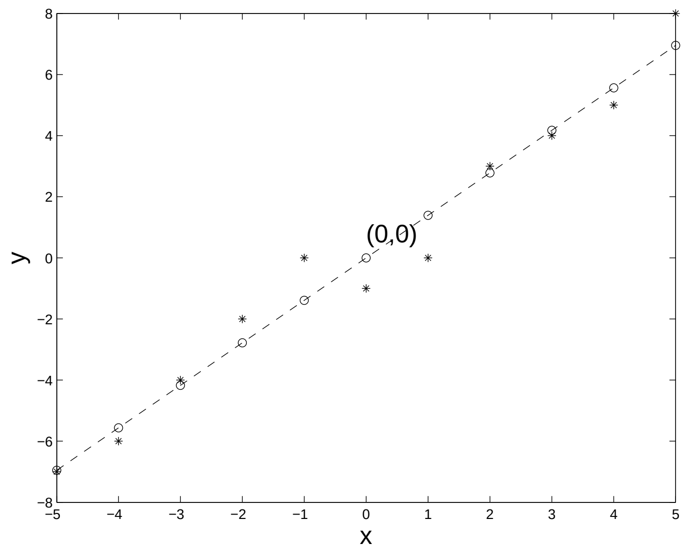
Par hypothèse, pour tout $i \leq n$, $E(u_i) = 0$.

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha}) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \\ &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \\ &= \alpha\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + E(u_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

3°) Par définition

$$R^2 = \frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(ax_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}.$$

4°) On trouve $a = 1.3909$ et $R^2 = 0.9673$. Ici $\bar{x} = \bar{y} = 0$, donc $\bar{y} = a\bar{x}$.



Exercice II
1°) On utilise SCE + SCR = SCT et $R^2 = \frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} = \frac{\text{SCE}}{\text{SCE+SCR}}$.
Finalement on obtient $R^2 = 0.3870, R^2 = 0.9157, R^2 = 0.3674$.
2°) On construit le test de Fisher sur R^2 :

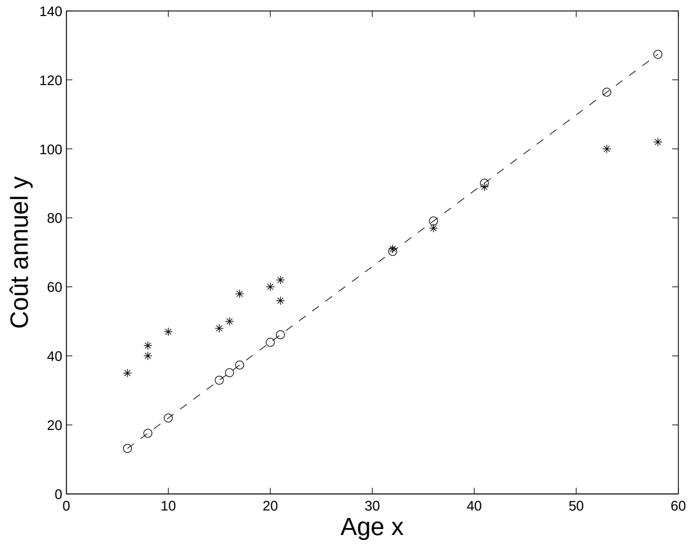
$$\frac{R^2}{(1-R^2)/(n-2)} \sim \text{F}(1, n-2)$$

Les trois régressions donnent $F_{\text{obs}} = 6.9435, 32.5788, 27.2927$

On lit dans la tables la valeur critique du test unilatéral pour $p = 0.05$, $t_p = 4.84, 10.13, 4.08$

Les trois régressions dépassent la valeur critique. L'écart est plus net pour la troisième.

Exercice III



1˚) On trouve $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 2.1967$. Pour les tests, il faut calculer la variance de $\hat{\alpha}$. On commence par l'estimateur de la variance du bruit $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = 358.0512$.

On utilise ensuite la définition de $\hat{\alpha}$, et homoscédasticité :

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
\hat{\alpha} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
\hat{\alpha} &= \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
V(\hat{\alpha}) &= V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) \\
V(\hat{\alpha}) &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 V(u_i) \\
V(\hat{\alpha}) &= \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}
\end{aligned}$$

Finalement $V(\hat{\alpha}) = 0.0287$. On construit les tests à partir de la variable T.

$$T = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \sim \text{St}(n-2)$$

On lit dans la table $t_{\frac{p}{2}} = 2.160$

$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \end{cases}$, $t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}_\alpha} = 12.9743 \notin [-t_{\frac{p}{2}}, t_{\frac{p}{2}}]$

Donc α est significativement non nul.

On peut vérifier que contrairement à une régression usuelle $\frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} \neq \frac{\text{cov}(X,Y)^2}{V(X)V(Y)}$.

2˚) La prévision est $y = 1772a = 3892.6$ euros, avec un intervalle de confiance $[3245, 4541]$.