

Exercice I

Dans de nombreux problèmes pratiques, lorsqu'on étudie la relation qui peut exister entre deux variables y et x , nous savons que si $x = 0$ alors $y = 0$.

Le modèle de régression linéaire n'est pas adapté pour modéliser ce type de lien. En effet, nous devons alors ajuster une droite dont l'ordonnée à l'origine est nulle.

On dispose de n couples d'observations (x_i, y_i) , et nous proposons alors le modèle :

$$y_i = \alpha x_i + u_i,$$

Où α est un paramètre inconnu et u_i une variable aléatoire, encore appelée résidu, telle que $E(u_i) = 0$, $E(u_i \cdot u_j) = 0$ lorsque $i \neq j$ et $V(u_i) = \sigma_u^2 \forall i = 1, 2, \dots, n$.

1°) Déterminer un estimateur de α par la méthode des moindres carrés ;

2°) Montrer que cet estimateur est sans biais ;

3°) Déterminer le coefficient de corrélation R^2 dans ce cas.

4°) Application numérique

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-7	-6	-4	-2	0	-1	0	3	4	5	8

Exercice II

On dispose de trois exemples de calculs de régression simple, du type $y = \alpha x + \beta + u$, effectuée sur des échantillons de tailles différentes :

Exemple 1°) $n = 13$, S.C.R. = 794,90, S.C.E. = 501,76 ;

Exemple 2°) $n = 5$, S.C.R. = 3,148, S.C.E. = 34,186 ;

Exemple 3°) $n = 49$, S.C.R. = 309,56, S.C.E. = 179,76 ;

1°) Déterminer la valeur du R^2 pour chacune des régressions ;

2°) Déterminer quelles sont, selon vous, les meilleures régressions.

Exercice III

Une entreprise souhaite étudier comment varie le cout annuel de maintenance d'un véhicule utilitaire d'un type donné en fonction de son âge. Nous disposons des données suivantes :

	Cout annuel (en centaines d'euros)	Age (en mois)
1	48	15
2	43	8
3	77	36
4	89	41
5	50	16
6	40	8
7	56	21
8	62	21
9	100	53
10	47	10
11	71	32
12	58	17
13	102	58
14	35	6
15	60	20

Notons y le cout annuel de maintenance et x l'âge. Nous avons calculé les quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 362, \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 12490, \sum_{i=1}^{15} y_i = 938, \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 64926 \text{ et } \sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 27437.$$

On modélise la relation existant entre le cout annuel de maintenance et l'âge par un modèle de régression linéaire simple : $y_i = \alpha x_i + u_i$,

Où α est un paramètre inconnu et u_i une variable aléatoire, encore appelée résidu, telle que $E(u_i) = 0$, $E(u_i u_j) = 0$ lorsque $i \neq j$ et $V(u_i) = \sigma_u^2 \forall i = 1, 2, \dots, n$.

1°) Donner la droite de régression et tester les coefficients, ainsi que la régression dans son ensemble ;

2°) Déterminer une prévision du cout de maintenance pour un véhicule utilitaire de 4 ans.