Stabilité des systèmes non-linéaires

Philippe Chartier (INRIA)

Cours Magistère ENS 2020, Rennes

1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobman-Hartman
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobman-Hartman
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Etude qualitative

On considère une équation différentielle *autonome*

$$\dot{y} = f(y)$$

où

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad f \text{ de classe } C^1,$$

et on s'intéresse à son étude qualitative, i.e. à l'étude de l'ensemble

$$\{y(t; y_0),\ y_0 \in \mathbb{R}^d,\ t \in J_{y_0}\}$$

d'un point de vue **géométrique**. J_{y_0} est l'intervalle de définition de la solution maximale associée à y_0.

Definition 1 (Portrait de phase)

Le portrait de phase de l'équation $\dot{y} = f(y)$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ est la représentation graphique des trajectoires $\{y(t; y_0); y_0 \in \mathbb{R}^d, t \in J_{y_0}\}$.

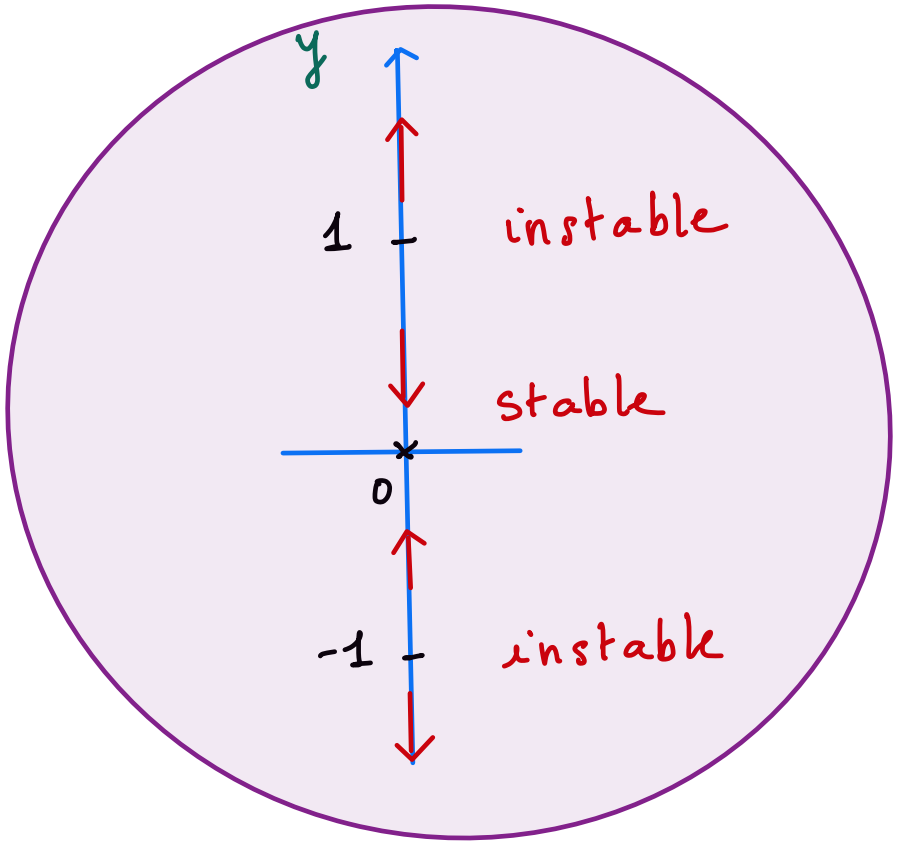
1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobman-Hartman
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Exemples

Exemple 1 (Dimension 1)

Pour $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = y(y^2 - 1)$. On a trois points d'équilibre, $y = 0$ et $y = \pm 1$. Le premier est stable, alors que les deux autres sont instables.



Exemples

Exemple 2 (Dimension 2)

Soit le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & 2y_1 \\ \dot{y}_2 & = & -y_2 \end{array} \right.$$

La solution correspondant à la valeur initiale (y_0^1, y_0^2) *s'écrit*

$$y_1(t) = e^{2t} y_0^1, \quad y_2(t) = e^{-t} y_0^2$$

de sorte que les trajectoires sont les courbes paramètrées telles que

$$(y_2(t))^2 y_1(t) = const$$

Exemples

Exemple 3 (Pendule sans frottement)

L'équation différentielle d'ordre 2

$$\ddot{\theta} + a\sin(\theta) = 0, \quad a > 0$$

se réécrit à l'ordre 1 en posant $y_1 = \theta$ *et* $y_2 = \dot{\theta}$*:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & y_2 \\ \dot{y}_2 & = & -a\sin(y_1) \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que l'énergie du système

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 - a\cos(y_1)$$

est conservée le long de toute solution.

Exemples

En effet

$$\frac{d}{dt}H(y_1, y_2) = y_2\dot{y}_2 - a(-\sin(y_1))\dot{y}_1 = 0.$$

Les trajectoires s'inscrivent donc sur les courbes $H(y_1, y_2) = \text{const}$.

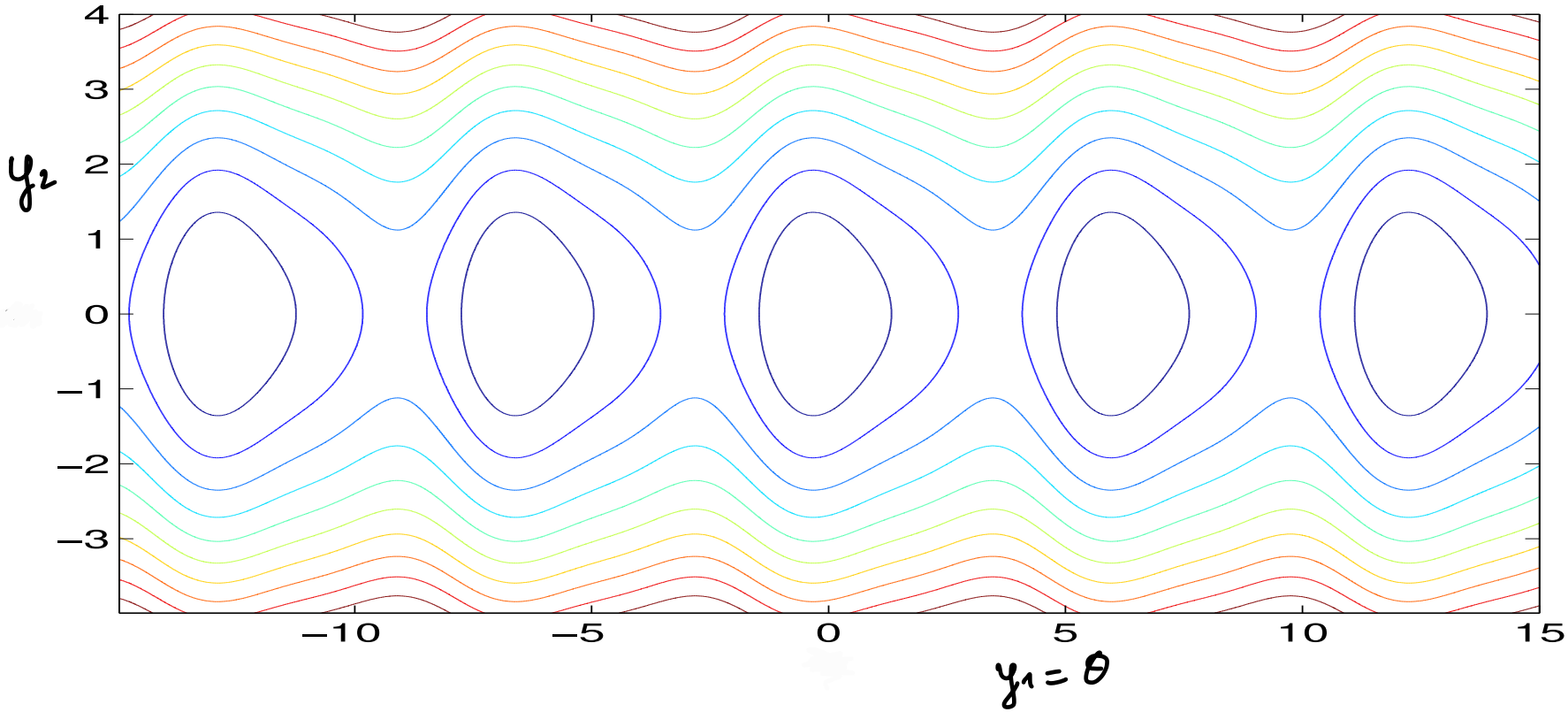


Figure: Trajectoires du pendule

Exemples

Definition 2 (Systèmes Hamiltoniens)

Un système hamiltonien est un système d'équations différentielles du type

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla_y H(y)$$

où $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe C^2 et où J est la matrice canonique

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

On a conservation de l'hamiltonien (énergie):

$$\frac{d}{dt} H(y) = (\nabla_y H(y))^T \dot{y} = (\nabla_y H(y))^T J^{-1} \nabla_y H(y) = 0$$

où l'on a utilisé l'anti-symétrie de la matrice J.

1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobman -Hartman
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

1. Introduction
   - Etude qualitative
   - Exemples

2. Différentes notions de stabilité
   - Théorème de Grobman -Hartman
   - Notions de stabilité
   - Produit scalaire adapté à un endomorphisme
   - Preuve du théorème de stabilité en première approximation
   - Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Linéarisé

Définition 3 (Linéarisé)

Soit l'équation différentielle

$$\dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Le système linéarisé en y_0 est le système d'équations différentielles suivant

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\,(y - y_0) + f(y_0).$$

C'est le système obtenu en remplaçant $f(y)$ par son développement de Taylor à l'ordre 1 en y_0.

Théorème de Grobman-Hartman

Théorème 4 (Grobman-Hartman, 1967)

Soit

$$(E): \quad \dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

un système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^d$. *On suppose que*

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\right) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

Il existe des voisinages U, V *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$, *et une bijection bi-continue*

$$h : U \to V$$

qui envoie les trajectoires de (E) *sur les trajectoires de* $\dot{y} = Ay$: *si* $y_0 \in \mathbb{R}^d$ *est une et* $y(t; y_0) \in U$, *alors* $e^{tA}h(y_0) \in V$ *et on a*

$$y(t; y_0) = (h^{-1} \circ e^{tA} \circ h)(y_0).$$

Commentaires et remarque

Au voisinage d'un point $y_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(y_0) = 0$, les solutions du système $\dot{y} = f(y)$ se comportent comme celles de

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0)$$

si le spectre de $\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$ n'intersecte pas l'axe des imaginaires.

Remarque 5

Si $y_0 \neq 0$ avec $f(y_0) = 0$, alors en posant

$$\tilde{y} = y - y_0, \qquad \tilde{f}(\tilde{y}) = f(\tilde{y} + y_0),$$

on a

$$\frac{d}{dt}\tilde{y} = \dot{y} = f(y) = f(\tilde{y} + y_0) = \tilde{f}(\tilde{y})$$

avec $\tilde{f}(0) = f(y_0) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$.

1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobmann-Hartmann
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Notions de stabilité

Définition 4 (Equilibre)

Soit le système d'équations différentielles

$$\dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

On dit que y_0 est un équilibre si la fonction constante

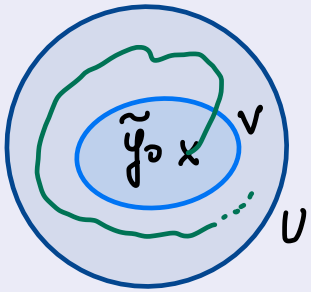
$$t \mapsto y_0$$

est solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à dire que $f(y_0) = 0$.

Definition 5 (Stabilité)

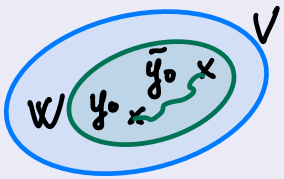
Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. On dit que:

1. y_0 est un **équilibre stable** si, pour tout voisinage U de y_0, il existe un voisinage V de y_0 tel que:



$$\forall \tilde{y}_0 \in V, \quad (i)\ y(t, \tilde{y}_0) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+,$$
$$(ii)\ y(t, \tilde{y}_0) \in U \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

2. y_0 est un **équilibre asymptotiquement stable** si c'est un équilibre stable, et s'il existe un voisinage W de y_0 tel que:



$$\forall \tilde{y}_0 \in W, \quad (i)\ y(t, \tilde{y}_0) \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+,$$
$$(ii)\ \lim_{t \to \infty} y(t, \tilde{y}_0) = y_0$$

Exemple 6

Soit le système linéaire $\dot{y} = Ay$. *L'origine* 0 *est équilibre. Il est asymptotiquement stable si et seulement si:*

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \Re(\lambda) < 0.$$

Il est stable si et seulement si

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \quad \Re(\lambda) \leq 0 \text{ et } \Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ non défective}$$

Theorem 6 (Stabilité en première approximation)

Soit l'équation différentielle

$$(E): \qquad \dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ un équilibre. Si y_0 est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)(y - y_0),$$

alors c'est un équilibre asymptotiquement stable du système (E).

Theorem 7 (Non-stabilité en première approximation)

Soit le système d'équations différentielles

$$(E): \qquad \dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

et soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$ *un équilibre. On suppose que*

$$\exists \lambda \in \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\right), \Re(\lambda) > 0.$$

Alors y_0 *n'est pas un équilibre stable de* (E).

Remarque 7

On ne peut rien dire dans le cas où

$$\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0)\right) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$$

comme le montre l'exemple suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y}_1 &=& y_2 \pm (y_1^2 + y_2^2) y_1 \\ \dot{y}_2 &=& -y_1 \pm (y_1^2 + y_2^2) y_2 \end{array}\right.$$

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donne

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} \pm 3y_1^2 \pm y_2^2 & 1 \pm 2y_2 y_1 \\ -1 \pm 2y_1 y_2 & \pm 3y_2^2 \pm y_1^2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = J^{-1}$$

dont les valeurs propres sont $\pm i$.

Remarque 8 (Suite)

Maintenant, en passant en coordonnées polaires

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & r(\theta)\cos(\theta) \\ y_2 & = & r(\theta)\sin(\theta) \end{array} \right. ,$$

il vient:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta) = r\sin(\theta) \pm r^3\cos(\theta) \\ \dot{y}_2 & = & \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta) = -r\cos(\theta) \pm r^3\sin(\theta) \end{array} \right. ,$$

d'où $\dot{\theta} = \mp 1$ et $\dot{r} = \pm r^3$. L'équilibre est alors stable ou instable suivant le signe choisi $\mp$.

1. Introduction
   - Etude qualitative
   - Exemples

2. Différentes notions de stabilité
   - Théorème de Grobmann-Hartmann
   - Notions de stabilité
   - Produit scalaire adapté à un endomorphisme
   - Preuve du théorème de stabilité en première approximation
   - Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Theorem 8 (Produit scalaire adapté à un endomorphisme)

Soit $E = \mathbb{R}^d$, g un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et P son polynôme caractéristique. P se factorise en $P = P_+ \cdot P_-$ où :

- *P_- a toutes ses racines de parties réelles strictement négatives;*
- *P_+ a toutes ses racines de parties réelles positives ou nulles.*

Alors on a la décomposition (lemme des noyaux)

- $E = E_- \oplus E_+$;
- $E_- = \ker(P_-(A))$;
- $E_+ = \ker(P_+(A))$.

et il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$ tels que

1. $\ker(P_-(A)) \perp \ker(P_+(A))$;
2. $\forall x \in E_-, \quad \langle g(x), x \rangle \leq -2\alpha \langle x, x \rangle$;
3. $\forall x \in E_+, \quad \langle g(x), x \rangle \geq -\alpha \langle x, x \rangle$.

1 Introduction
- Etude qualitative
- Exemples

2 Différentes notions de stabilité
- Théorème de Grobmann-Hartmann
- Notions de stabilité
- Produit scalaire adapté à un endomorphisme
- Preuve du théorème de stabilité en première approximation
- Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Lemma 9 (Fonction de Lyapunov et stabilité)

Soit le système d'équations différentielles

$$\dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

On suppose que 0 *est un équilibre possédant une fonction de Lyapunov stricte, c'est-à-dire qu'il existe*

- *une boule ouverte* B *centrée en* 0;
- *une fonction* $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$;
- *un réel* $\alpha > 0$

$V(y) = V(0) + dV(0)\cdot y + o(y)$

avec $\lim_{y\to 0} \frac{o(y)}{\|y\|} = 0$

tels que

- 0 *est un minimum strict de* V *sur* B
- $\forall y \in B, \quad dV(y)(f(y)) \leq -\alpha(V(y) - V(0))$

Alors 0 *est une équilibre asymptotiquement stable.*

Preuve.

On se concentre pour simplifier sur la cas où

$$V(y) = \langle y, y \rangle,$$

$V(y+h) - V(y)$
$= \langle y+h, y+h \rangle - \langle y, y \rangle$
$= 2\langle y, h \rangle = dV(y) \cdot h$

qui est le cadre dans lequel on utilisera ce lemme. On a alors

$$\boxed{dV(y)(f(y)) = 2\langle y, f(y) \rangle}$$

Quitte à la réduire, on suppose que B est une boule pour la norme

$$\| \cdot \|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Soit donc $\tilde{y}_0 \in B$ et $J_{\tilde{y}_0} =]T^-, T^+[$ l'intervalle de définition de la solution maximale $y(t; \tilde{y}_0)$ associée. On va montrer que

1. $T^+ = +\infty$;
2. $\forall t \geq 0,\ \|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq \|\tilde{y}_0\|$

Preuve (suite).

On note

$$X := \{\tau \in]0, T^+[; \forall t \in [0, \tau[, y(t; \tilde{y}_0) \in B\}.$$

L'ensemble X est non-vide, car $y(t; \tilde{y}_0)$ est continue. Soit

$$\varphi(t) = \langle y(t; \tilde{y}_0), y(t; \tilde{y}_0) \rangle. \quad = V(y(t; \tilde{y}_0))$$

Il vient pour $\tau \in X$ et $t \in [0, \tau[$:

par hypothèse

$$\dot{\varphi}(t) = 2\langle y(t; \tilde{y}_0), \dot{y}(t; \tilde{y}_0) \rangle = 2\langle y(t; \tilde{y}_0), f(y(t; \tilde{y}_0)) \rangle \leq -\alpha\varphi(t)$$

$(= dV(y) f(y))$

donc

$$\varphi(t) \leq e^{-\alpha t}\varphi(0) \Longrightarrow \|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t}\|\tilde{y}_0\|.$$

□

Preuve (fin).

Si $X \neq]0, T^+[$ alors $\sup X < T^+$ et

$$\forall 0 \leq t < \sup X, \quad \|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2} \sup X} \|\tilde{y}_0\| < \|\tilde{y}_0\|.$$

Alors, par continuité de $y(t; \tilde{y}_0)$

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall\, t < \sup X + \varepsilon, \quad \|y(t; \tilde{y}_0)\| < \|\tilde{y}_0\|,$$

ce qui contredit la définition de $\sup X$. Donc $\sup X = T^+$ et $y(t; \tilde{y}_0)$ est bornée sur $]0, T^+[$. Le théorème de sortie de tout compact implique alors que $T^+ = \infty$. L'inégalité

$$\boxed{\forall t \geq 0, \ \|y(t; \tilde{y}_0)\| \leq e^{-\frac{\alpha}{2} t} \|\tilde{y}_0\|}$$

permet de conclure que 0 est un équilibre asymptotiquement stable. □

Preuve du théorème de stabilité en première approximation.

Quitte à considérer la fonction

$$\tilde{f}(y) = f(y + y_0) - f(y_0),$$

on suppose que $y_0 = 0$ et on pose $g = df(0)$. D'après le théorème du produit scalaire adapté, on peut construire un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \langle g(y), y \rangle \leq -2\alpha \langle y, y \rangle$$

pour un certain $\alpha > 0$ (ici $P_- = P$ et $\ker P_-(g) = \mathbb{R}^d$). La fonction

$$V(y) = \frac{1}{2}\langle y, y \rangle = \frac{1}{2}\|y\|^2$$

est une fonction C^1 qui admet un minimum strict en 0. □

Preuve (suite).

De plus, on a au voisinage de 0

$$f(y) = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{df(0)y}_{g(y)} + o(y) = g(y) + o(y)$$

de sorte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\exists \varepsilon,\ \|y\| \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{\|o(y)\|}{\|y\|} \leq \alpha$$

$$\forall \|y\| \leq \varepsilon, \quad \|f(y) - g(y)\| \leq \alpha \|y\|.$$

Donc pour y dans la boule de centre 0 et de rayon ε, on a

$$\begin{aligned} dV(y)(f(y)) &= \langle y, f(y) \rangle \\ &= \langle y, g(y) \rangle + \langle y, f(y) - g(y) \rangle \\ &\leq -2\alpha \langle y, y \rangle + \|y\| \cdot \|f(y) - g(y)\| \text{ (par C-S)} \\ &\leq -2\alpha \|y\|^2 + \alpha \|y\|^2 = -2\alpha V(y). \end{aligned}$$

V est ainsi une fonction de Lyapunov et on peut conclure. □

1. Introduction
   - Etude qualitative
   - Exemples

2. Différentes notions de stabilité
   - Théorème de Grobmann-Hartmann
   - Notions de stabilité
   - Produit scalaire adapté à un endomorphisme
   - Preuve du théorème de stabilité en première approximation
   - Preuve du théorème de non-stabilité en première approximation

Théorème de non-stabilité de Cetaev, 1934

Théorème 9 (Cetaev)

Soit le système d'équations différentielles

$$\dot{y} = f(y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

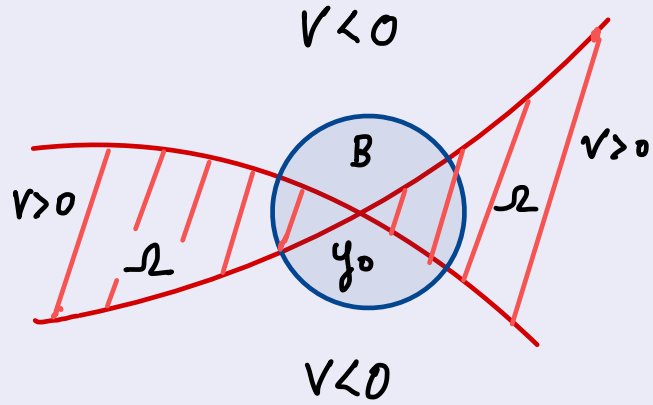
On suppose que $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est un équilibre et qu'il existe

- *une boule ouverte B centrée sur y_0,*
- *une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$,*
- *Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$,*

tels que:

- $y_0 \in \partial\Omega$
- $V > 0$ *sur* Ω *et* $V = 0$ *sur* $\partial\Omega$
- $\forall y \in \Omega \cap B, dV(y)(f(y)) > 0.$

Alors y_0 n'est pas un équilibre stable.

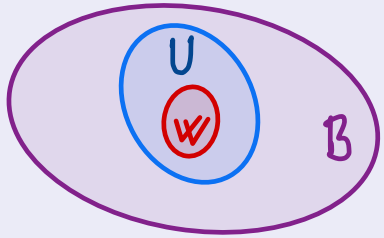


Preuve.

Supposons que y_0 soit un équilibre stable: alors il existe

1. un voisinage ouvert U tel que $\bar{U} \subset B$ et $\bar{U} \neq B$,
2. un voisinage ouvert W,

tels que pour tout



$y_0 \in W \subset U \subset \bar{U} \subset B$

$$\forall \tilde{y}_0 \in W, \quad \forall t \geq 0, \quad y(t;\tilde{y}_0) \in U.$$

Comme $y_0 \in \partial\Omega = \bar{\Omega}\backslash\Omega$, on a $\Omega \cap W \neq \emptyset$ et par continuité

$$\forall \tilde{y}_0 \in \Omega \cap W, \quad X := \{\tau \geq 0; \forall t \in [0,\tau],\ y(t;\tilde{y}_0) \in \Omega\} \neq \emptyset.$$

Par continuité encore, il est ouvert dans $[0,+\infty[$. Montrons qu'il est aussi fermé.

□

Preuve (suite).

Soit $(\tau_n) \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\tau_\infty \in [0, +\infty[$. On a:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y(\tau_n; \tilde{y}_0) \in \Omega \Longrightarrow y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \bar{\Omega}$;
- $$\forall 0 \leq t \leq \tau \in X, \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt} V(y(t; \tilde{y}_0)) > 0$$

  donc $\varphi(t) > \varphi(0) = V(\tilde{y}_0) > 0$. Par conséquent

$$\text{et} \qquad \boxed{\varphi(\tau_\infty) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\tau_n) \geq V(\tilde{y}_0) > 0.}$$

Ainsi

$$V(y(\tau_\infty; \tilde{y}_0)) > 0 \Longrightarrow y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \notin \partial\Omega.$$

Comme $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \bar{\Omega}$, $y(\tau_\infty; \tilde{y}_0) \in \Omega$ et $\tau_\infty \in X$, qui est donc fermé. X est à la fois ouvert et fermé dans $[0, +\infty[$ qui est connexe, donc $X = [0, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad y(t; \tilde{y}_0) \in \Omega.}$$

Preuve (suite).

Considérons maintenant

$$K = \{y \in \bar{U} \cap \bar{\Omega}; V(y) \geq V(\tilde{y}_0)\}$$

K est compact car

- $\bar{U}$ est compact;
- $\bar{\Omega} \cap \{y \in \mathbb{R}^d; V(y) \geq V(\tilde{y}_0)\}$ est fermé.

De plus

- $K \subset \bar{U} \subset B$;
- $(\forall y \in \Omega, V(y) \neq 0) \Longrightarrow K \subset \Omega \cap B$;

donc

$$\forall y \in K, \quad dV(y)(f(y)) > 0$$

et par compacité

$$\boxed{\alpha := \inf_{y \in K} dV(y)(f(y)) > 0}$$

Preuve (fin).

et comme $y(t;\tilde{y}_0) \in K$ pour tout $t \geq 0$, on a $\dot{\varphi}(t) \geq \alpha$ pour tout $t \geq 0$, soit $\varphi(t) \geq \alpha t + \varphi(0)$ qui tend vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$. On obtient une contradiction avec le fait que

$$\varphi(t) = V(y(t;\tilde{y}_0)) \leq \sup_{y \in K} V(y) < +\infty.$$

□

Théorème de non-stabilité en première approximation

Preuve.

On suppose $y_0 = 0$, et on pose $g = df(0)$. D'après le théorème du produit scalaire adapté à $-g$ ($\exists \lambda \in \sigma(-g), \Re(\lambda) < 0$), il existe:

- un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}^d$,
- deux sous-espaces vectoriels $E \oplus F = \mathbb{R}^d$,
- un réel $\alpha > 0$,

tels que

$$\forall y \in E,\ \langle g(y), y \rangle \geq 2\alpha \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \forall y \in F,\ \langle g(y), y \rangle \leq \alpha \|y\|^2.$$

On considère maintenant la fonction V définie par

$$\forall (y_1, y_2) \in E \times F,\ V(y_1 + y_2) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2.$$

Preuve (suite).

Soit $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^d, V(y) > 0\}$, ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Comme f est de classe C^1, on a

$$f(y) = g(y) + o(y)$$

donc

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall y \in B_\varepsilon(0), \quad \|f(y) - g(y)\| \leq \frac{\alpha}{4}\|y\|.$$

Il reste à établir que

$$\forall y \in \Omega \cap B_\varepsilon(0), \quad dV(y)(f(y)) > 0.$$

Soit donc $h = h_1 + h_2 \in E \oplus F$ et $y = y_1 + y_2 \in E \oplus F$. On a

$$\begin{aligned} V(y+h) - V(y) &= \langle y_1 + h_1, y_1 + h_1 \rangle - \langle y_2 + h_2, y_2 + h_2 \rangle \\ &\quad - \langle y_1, y_1 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle \\ &= 2\langle y_1, h_1 \rangle - 2\langle y_2, h_2 \rangle + \langle h_1, h_1 \rangle - \langle h_2, h_2 \rangle \end{aligned}$$

Preuve (suite).

Ainsi

$$dV(y)(h) = 2\langle y_1, h_1\rangle - 2\langle y_2, h_2\rangle$$

et

$$\begin{aligned} |dV(y)(h)| &\leq 2|\langle y_1, h_1\rangle| + 2|\langle y_2, h_2\rangle| \\ &\leq 2\|y_1\|\|h_1\| + 2\|y_2\|\|h_2\| \\ &\leq 4\|y\|\|h\| \end{aligned}$$

car E et F étant orthogonaux pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on a

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 \\ \|h\|^2 &= \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 \end{aligned}$$

□

Preuve (suite).

En particulier, pour $y \in B_\varepsilon(0)$:

$$\begin{aligned} |dV(y)(f(y)-g(y))| &\leq 4\|y\|\|f(y)-g(y)\| \\ &\leq 4\|y\|\frac{\alpha}{4}\|y\| \\ &\leq \alpha\|y\|^2 \end{aligned}$$

D'autre part, E et F étant stables par g, on a pour tout $y \in \Omega$:

$$\begin{aligned} dV(y)(g(y)) &= 2\langle y_1, g(y_1)\rangle - 2\langle y_2, g(y_2)\rangle \\ &\geq 2(2\alpha\|y_1\|^2 - \alpha\|y_2\|^2) \\ &\geq 2\alpha\|y_1\|^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que pour $y \in \Omega$, $V(y) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2 > 0$. □

Preuve (fin).

Pour $y \in \Omega \cap B_\varepsilon(0)$, il vient finalement

$$\begin{aligned} dV(y)(f(y)) &= dV(y)(g(y)) + dV(y)(f(y) - g(y)) \\ &\geq 2\alpha\|y_1\|^2 - \alpha\|y\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

car une fois encore, pour $y \in \Omega$, on a $\|y\|^2 < 2\|y_1\|^2$. On conclut par le théorème de Cetaev. $\square$

$\Rightarrow V(y) = \|y_1\|^2 - \|y_2\|^2 > 0 \Rightarrow 2\|y_1\|^2 > \|y\|^2$