

# Construction d'une base de type POD à partir d'une séquence d'images

V. Souchaud, C. Herzet, E. Mémin

## 1 Contexte et Contributions

L'estimation de mouvement à partir de séquences d'images d'un phénomène fluide constitue un problème inverse difficile dans le sens où il faut extraire les mesures à partir des seules variations spatiales et temporelles de la fonction luminance. Malgré l'extrême complexité de ces écoulements, les principes gouvernant la construction de modèles réduits peuvent être appliqués pour en représenter les principales caractéristiques comme la somme de  $K$ -fonctions spatiales de bases orthonormales pondérées par des coefficients temporels aussi appelées modes (voir par exemple Holmes *et al.* [2] pour plus de détails). Une des approches repose sur la décomposition de Karhunen-Loeve (cf. "proper orthogonal decomposition" – POD). Dans cet article, nous nous concentrons sur la manière de construire cette base directement à partir d'une séquence d'images.

Nous décrivons brièvement le principe de construction d'une base de type POD. Soit un champ de vitesse  $w(\underline{x}, t) \in \Omega$ , où  $\Omega$  est le domaine physique, est décomposé en un ensemble fini de fonctions de bases spatiales  $n$ -orthonormales  $\{\Phi_i(\underline{x}) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n\}$ , avec les coefficients temporels  $\{a_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}\}$  tels que :

$$(1) \quad w(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(\underline{x}).$$

Les modes spatiaux  $\Phi(\underline{x})$ , globaux et mutuellement orthogonaux, sont extraits d'un problème aux valeurs propres provenant des observations  $\{w(\underline{x}, t_i)\}_{i=1}^T$  obtenue ici au moyen d'un estimateur de mouvements (corrélation, flot optique etc...).

Nous introduisons maintenant la méthode que nous détaillons dans cet article et qui repose sur une estimation directe des modes spatiaux et temporels à partir d'une séquence d'images. Pour déterminer le mouvement qui existe entre deux images, on s'appuie sur l'hypothèse de conservation de la luminance  $I$ , fonction de deux variables  $\underline{x}$  (espace) et  $t$  (temps). C'est-à-dire, la luminosité apparente d'un point reste constante le long de son déplacement, ce qui conduit à :

$$(2) \quad \forall \underline{x}, I(\underline{x} + w(\underline{x}, t), t + 1) - I(\underline{x}, t) = 0$$

En linéarisant cette équation autour de  $(\underline{x}, t)$ , on obtient *l'équation de contrainte du flot optique* :

$$(3) \quad \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{x}, t) + \nabla I^T(\underline{x}, t)w(\underline{x}, t) = 0$$

On suppose de plus que localement, deux points  $\underline{x}_1$  et  $\underline{x}_2$  auront dans un même voisinage un déplacement peu différent. Ceci peut-être encodé par une fonction de fenêtrage (une gaussienne par exemple) sur un support où la vitesse est supposée constante.

## 2 Vue d'ensemble de la procédure

Nous spécifions ci-après les expressions principales de la procédure proposée pour l'estimation de la décomposition POD sans estimateurs externes. Cette estimation est formulée comme un problème d'estimation de mouvements. Les hypothèses citées ci-avant conduisent à une minimisation de la fonctionnelle  $J$  définie au sens des moindres carrés :

$$(4) \quad J(w(\underline{x}, t)) = \sum_{k=1}^T \sum_{\Omega} g(\underline{y}) * \left| \left( \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{y}, t) + \nabla I^T(\underline{y}, t) \cdot w(\underline{x}, t) \right) \right|^2 d\underline{y}d\underline{x}$$

où  $\nu(\underline{x})$  est un voisinage de  $\underline{x}$ , et  $\underline{y} \in \nu(\underline{x})$  et  $T$  le nombre d'images de la séquence étudiée. On peut écrire  $w(\underline{x}, t)$  en fonction des dimensions temporelle et spatiale :

$$(5) \quad w(\underline{x}, t) = \bar{w}(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^N a_i(t) \cdot \Phi_i(\underline{x})$$

avec  $N$  le nombre de modes,  $a_i(t) \in \mathbb{R}$ , les coefficients temporels,  $\bar{w}(\underline{x}, t)$ , le champ moyen sur toute la séquence,  $\Phi_i(\underline{x}) = \begin{cases} \Phi_i(u) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ \Phi_i(v) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \end{cases}$  avec  $\underline{x} = (u, v)$ . Les  $\Phi_i$  sont des vecteurs formant une base orthonormée. On minimise la fonctionnelle  $J$  et on dérive alternativement par rapport à  $a_i$  et  $\Phi_i$ , on obtient l'expression des deux termes couplés pour chaque  $i = 1, \dots, N$  :

$$(6) \quad \begin{cases} a_i(t) = - \frac{\sum_{\Omega} \sum_{\nu(\underline{x})} g(\underline{y}) \left( \nabla I^T(\underline{y}, t) \Phi_i(\underline{x}) \left( \frac{\partial I}{\partial t}(\underline{y}, t) + \nabla I^T(\underline{y}, t) \cdot \left( \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t) \Phi_k(\underline{x}) \right) \right) \right) d\underline{y}d\underline{x}}{\sum_{\Omega} \sum_{\nu(\underline{x})} g(\underline{y}) \left( \left( \nabla I^T(\underline{y}, t) \Phi_i(\underline{x}) \right)^2 \right) d\underline{y}d\underline{x}} \\ \Phi_i(\underline{x}) = - \frac{\sum_t \sum_{\nu(\underline{x})} g(\underline{y}) \left( \nabla I^T(\underline{y}, t) \cdot \left( \sum_{k=0}^{i-1} a_k(t) \Phi_k(\underline{x}) \right) \right) d\underline{y}d\underline{x}}{\sum_t \sum_{\nu(\underline{x})} g(\underline{y}) \left( a_i^2(t) \nabla I \nabla I^T(\underline{y}, t) \right) d\underline{y}d\underline{x}} \end{cases}$$

Une orthonormalisation de Gram-Schmidt du mode courant par rapport aux modes précédents calculés et une mise à jour de l'amplitude des modes courants permet de compléter la base par un nouveau mode. L'algorithme peut-être schématisé par les étapes suivantes :

1. Calcul de  $\widetilde{\Phi}_i$  :  $\widetilde{\Phi}_i$  est le vecteur normalisé calculé avec (6).
2. Calcul de  $a_i$  :  $a_i$  est l'amplitude optimale relative au vecteur  $\widetilde{\Phi}_i$  calculée avec (6).
3. Mise à jour des  $a_k$  avec  $k = 1, \dots, i - 1$  : Projection de  $a_i \widetilde{\Phi}_i$  sur les différents  $\Phi_k$ .
4. Orthonormalisation de  $\widetilde{\Phi}_i$  avec la méthode de Gram-Schmidt
5. Adaptation de l'amplitude  $a_i$  au nouveau vecteur  $\Phi_i$ .
6. Fonctionnelle  $J$  calculée avec (5) pour contrôler une diminution de celle-ci.
7. Erreur calculée à partir du champ réel : module moyen de la différence entre les vecteurs déplacements reconstruits et les vecteurs déplacements réels.

Cette procédure incrémentale fourni une base initiale, raffinée ensuite au moyen d'une estimation globale de la base  $\Phi$  conduite en résolvant le système suivant avec une méthode de Gauss-Seidel par blocs.

$$(7) \quad \begin{pmatrix} A_{00} & \dots & A_{0N} \\ A_{10} & \dots & A_{1N} \\ & \dots & \\ A_{N0} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(\underline{x}) \\ \Phi_1(\underline{x}) \\ \dots \\ \Phi_N(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

où  $A_{ij} = \sum_t a_i a_j \sum_y \nabla I \nabla I^T$ , matrice 2x2 supposée inversible,  $\Phi_i$ , vecteur 2D,  $\Phi_1^{(k+1)}, \dots, \Phi_{i-1}^{(k+1)}$  supposés connus à la  $(k+1)$ ième itération, et  $b_i = \sum_t a_i \sum_y \nabla I \partial_t I$ , vecteur 2D.

### 3 Résultats de simulation

Pour évaluer la performance de la décomposition POD proposée, une séquence d'images synthétiques a été générée en se basant sur des turbulences forcées en deux dimensions obtenues directement à partir d'une simulation numérique (DNS) des équations de Navier-Stokes pour un nombre de Reynolds de 3000 (voir Carlier et al. [1]). Notre expérimentation porte sur une séquence de 10 images avec une reconstruction à partir de 4 modes. Les figures suivantes montrent une comparaison entre la vorticité réelle (fig 1A), la reconstruction de la vorticité avec la méthode décrite ci-avant (fig 1B) et la reconstruction de la vorticité avec la POD (fig 1C). On retrouve bien les structures principales de l'écoulement.

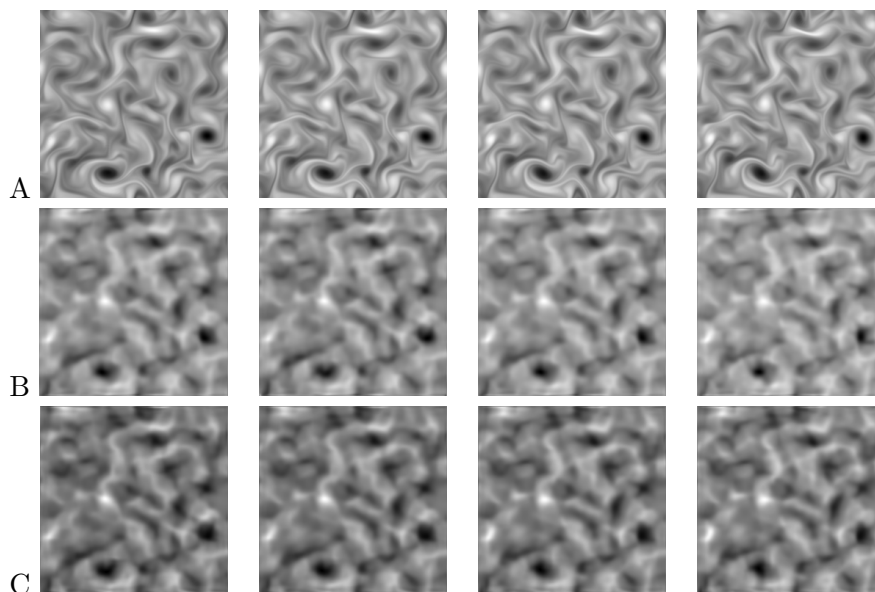


FIGURE 1 – séquence d'images aux temps 0, 3, 6 et 8.

L'énergie récupérée ( $\sum_i a_i(t)^2 = 6947,36$ ) avec la méthode décrite ici est deux fois supérieure à l'énergie récupérée ( $\sum_i a_i(t)^2 = 3533,54$ ) avec une méthode de type POD.

### Références

- [1] J. Carlier and B. Wieneke. Report 1 on production and diffusion of fluid mechanics images and data. *Fluid Project*, available at <http://www.fluid.irisa.fr> :682, 2005.
- [2] P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz. Turbulence, coherence structures, dynamical systems and symetry. *Cambridge University Press*, page 682, 1996.