

# Apport des modèles de lois de puissance pour l'estimation du mouvement turbulent en PIV

D. Heitz<sup>a,b</sup>, P. Héas<sup>c</sup>, E. Mémin<sup>c</sup>

a. Cemagref, UR TERE, 17 avenue de Cucillé, 35044 Rennes Cedex

b. Université européenne de Bretagne, Rennes, France

c. INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

## Résumé :

*De manière générale les approches de type PIV nécessitent d'introduire un a priori sur la solution à estimer. Les méthodes locales imposent une uniformité du champ de vitesse dans un petit voisinage. Les approches globales introduisent un terme de régularisation qui peut être basé sur la dynamique des fluides. Nous montrons dans cette étude que l'introduction d'un a priori de type loi de puissance permet d'améliorer de façon significative les estimations du champ de vitesse vers les petites échelles.*

## Abstract :

*PIV techniques need to introduce prior knowledge to estimate motion fields. Local approaches require window with constant velocity. Global approaches relies on a spatial regularization term which can be derived from the physics of fluids. In the present study we show that using regularizations based on turbulence power laws clearly provides accurate estimates down to the smallest scales.*

**Mots clefs :** PIV ; Flot optique ; Turbulence

## 1 Introduction

Depuis une dizaine d'années la vélocimétrie par images de particules (PIV) s'est imposée pour la mesure des écoulements turbulents. Des algorithmes de corrélations d'images très performants ont été proposés. Cependant, ces techniques de mesure de la vitesse à partir d'images restent limitées à une gamme réduite d'échelles. L'estimation d'une large étendue spectrale de tourbillons est d'un grand intérêt mais représente encore un défi. Pourtant, les images de particules peuvent contenir suffisamment d'information pour décrire les plus grands jusqu'aux plus petits tourbillons. De meilleures estimations sont possibles si l'on s'appuie sur la modélisation statistique de la turbulence.

La mesure du mouvement entre deux images utilise un modèle d'observation ou modèle d'attache aux données reliant le vecteur champ de vitesse recherché aux variations spatiotemporelles de l'intensité du niveau de gris des images. Des modèles d'observations ont été dérivés à partir des équations du transport de particules ou du scalaire [8]. Cette étape est importante car la mesure est d'autant plus précise que le modèle décrit l'ensemble des phénomènes physiques liés au contexte d'observation expérimentale. Cependant le modèle d'observation n'est pas suffisant pour estimer le champ de vitesse car il ne fournit qu'une équation scalaire sur la luminance pour deux composantes de la vitesse à estimer dans le plan de l'image. Le système est donc incomplet, il s'agit du *problème d'ouverture*. Seules les composantes de la vitesse perpendiculaires aux gradients de la luminance peuvent être estimées (cf. Figure 1). Ce problème peut être résolu par des approches *locales* ou par des approches *globales*.

Les méthodes *locales* considèrent un voisinage d'un point de l'espace considéré. Elles consistent à comparer le contenu d'une fenêtre d'observation dans la première image avec les contenus de fenêtres similaires dans la seconde image, ceci pour un critère donné. Les techniques de corrélation et d'images

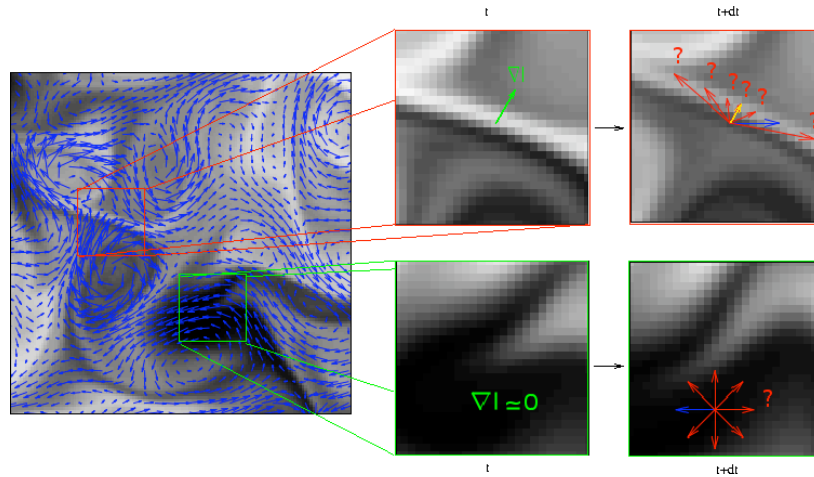


FIGURE 1 – Illustration du problème de l’ouverture pour la mesure de la vitesse à partir de l’observation d’un scalaire dispersé dans un écoulement turbulent. Dans les cadres rouges : une région de l’écoulement avec variation de la luminosité. Dans les cadres verts : une région de l’écoulement sans grande variation de la luminosité. Le vecteur vert représente le gradient de la luminosité. Le vecteur jaune représente la vitesse obtenue avec uniquement le modèle d’observation. Les vecteurs rouges représentent une partie de l’infinité de solutions possibles. Le vecteur bleu est la solution obtenue avec une régularisation globale qui dans ce cas se confond avec *la vérité du terrain*.

compensées en mouvement sont les critères les plus populaires. Les premières sont classiquement utilisées en PIV, tandis que les secondes proposées par [9] sont couramment utilisées dans la communauté vision par ordinateur pour estimer le flot optique. Les méthodes de corrélation sont robustes et ont été largement optimisées mais procèdent à un filtrage passe-bas de la solution limitant la dynamique résolue aux grandes échelles de l’écoulement. De plus, comme cela a été démontré dans le cas bidimensionnel, la corrélation est un modèle qui simplifie la physique du contexte d’observation et nécessite une homogénéité des informations dans la fenêtre d’observation [6]. Les méthodes de type Lucas & Kanade s’appuient sur un modèle d’observation plus précis, autorisant des fenêtres d’observation ne contenant qu’une particule, et fournissant alors des mesures plus denses. Une adaptation de cette dernière approche a été proposée pour la mesure haute cadence du mouvement en PIV [1].

La majorité des méthodes *globales* résout un problème d’optimisation sur l’ensemble de l’image, reliant chaque vecteur estimé à ces voisins selon un modèle de régularisation plus ou moins pondéré. À l’origine de ce type d’approche Horn & Schunck [7] ont proposé une régularisation au premier ordre pour estimer les mouvements quasi-rigides. Récemment, des régularisations d’ordre plus élevé, plus adapté au mouvement fluide, ont été développées [2, 3]. Toutefois, ces contraintes spatiales ne sont pas basées sur une modélisation de la physique des fluides et ne permettent pas d’estimer de manière précise la structuration des écoulements aux petites échelles. Enfin, comme ces régularisations ne sont pas physiquement consistantes, elles sont pondérées par un paramètre ajusté de manière subjective.

Dans cette étude nous étudions une nouvelle régularisation multiéchelle proposée par Héas *et al.* [5] et basée sur la décroissance de l’énergie cinétique turbulente. Contrairement aux autres approches, *a priori* est physiquement consistant et à l’avantage de résoudre le problème de l’ouverture en estimant les poids affectés aux différentes échelles de régularisation. La méthode consiste à contraindre le champ de vitesse –*via* la fonction de structure d’ordre deux– à suivre les modèles statistiques prédits par Kolmogorov [4]. Cette nouvelle technique estime également les paramètres de la loi à partir des images. Nous évaluons ici une alternative fixant préalablement les paramètres de la loi de puissance à partir d’une mesure au fil chaud.

L’article est organisé comme suit. Dans une première partie, le modèle de régularisation basé sur les lois de décroissance de l’énergie est présenté. Puis la nouvelle technique de PIV multiéchelle est décrite. Enfin, dans une dernière partie de discussions et conclusions, la méthode est évaluée à partir d’une

expérience réelle de turbulence de grille. Les résultats sont comparés avec des techniques classiques de PIV.

## 2 Modélisation de la cascade d'énergie turbulente

A partir d'arguments simples, Kolmogorov a modélisé le spectre d'énergie cinétique d'un écoulement turbulent [4]. Considérons la fonction de structure longitudinale  $S_p(\ell) \equiv \langle \delta v(\ell)^p \rangle$ , correspondant aux moments d'ordre  $p$  des incréments de la vitesse longitudinale  $\delta v(\mathbf{x}, \ell \mathbf{n}, t) \equiv (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \ell \mathbf{n}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire dirigé suivant la séparation  $\ell$  entre deux points. Pour un écoulement homogène, stationnaire, isotrope et pour des séparations  $\ell$  dans le domaine inertiel de la cascade, Kolmogorov modélise la fonction de structure de la vitesse sous la forme d'une loi de puissance du type  $S_p(\ell) \sim \beta \ell^{\zeta_p}$ , où il suggère  $\zeta_p$  égal à  $p/3$  indiquant un comportement universel pour les fluctuations à petites échelles. La théorie de Kolmogorov s'appuie sur deux hypothèses d'auto-similarité. Pour  $\eta < \ell < L$  les fonctions de structures d'ordre 2 et 3 s'écrivent  $S_2(\ell) \sim C_2(\epsilon \ell)^{2/3}$  et  $S_3(\ell) \sim C_3 \epsilon \ell$ , où  $C_2, C_3$  sont des constantes,  $\epsilon$  est la dissipation moyenne d'énergie et  $\eta$  est l'échelle élémentaire de la cascade d'énergie. Cependant, en raison du phénomène d'intermittence croissant avec les petites échelles, l'exposant  $\zeta_p$  a en réalité une dépendance non-linéaire avec l'ordre  $p$  et les écoulements turbulents ne sont pas strictement auto-similaires [4]. Notons que l'exposant de la fonction de structure d'ordre 3 n'est pas affecté par cet écart à la réalité. De plus, les écoulements turbulents sont toujours réguliers dans la zone dissipative, c-à-d pour  $0 < \ell < \eta$ , et la fonction de structure d'ordre 2 s'écrit  $S_2(\ell) \sim \beta \ell^2$ .

Dans la suite nous exploitons cette dernière caractéristique universelle de la modélisation de la cascade d'énergie. Pour un certain nombre d'expériences de PIV nous pouvons utiliser un modèle de régularisation basé sur  $S_2(\ell) \sim \beta \ell^2$  pour  $0 < \ell < \eta$ . En effet, avec un facteur d'agrandissement  $M$  classique compris entre 10 et 15 pixels/mm, et pour un régime de nombre de Reynolds allant jusqu'à environ  $10^4$ , l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  peut être de l'ordre de 0,1 à 1 mm correspondant alors à quelques pixels dans l'espace image. Dans ce cas, la zone dissipative peut être observée dans l'image et ses caractéristiques exploitées pour la mesure du champ de vitesse. Par ailleurs, nous observons que pour estimer un champ de vecteur avec précision, il est suffisant de régulariser la solution sur une gamme d'échelle très réduite, c-à-d pour  $1 \leq \ell \leq 2$  pixels. Tout ceci présente l'avantage important de ne quasiment pas imposer d'auto-similarité à la solution, et d'avoir pour seul paramètre  $\beta$  le taux de transfert d'énergie.

## 3 Méthode

La technique PIV proposée est une méthode *globale* qui consiste à minimiser une fonctionnelle d'énergie composée de deux termes  $f(I, \mathbf{v}) = f_d(I, \mathbf{v}) + \alpha f_r(\mathbf{v})$ , où  $f_d(I, \mathbf{v})$  est le modèle d'observation et  $f_r(\mathbf{v})$  est le terme de régularisation nécessaire pour résoudre le problème de *l'ouverture*. Cette régularisation impose une cohérence spatiale globale suivant un modèle de loi de puissance. Comme dans notre cas la régularisation est basée sur un modèle physique du type  $f_r(\mathbf{v}) = 0$ , c-à-d d'une contrainte dure, alors le paramètre  $\alpha$  n'a plus besoin d'être spécifié car il devient une solution du problème d'optimisation.

**Modèle d'observation** Le modèle d'observation considéré dans cette étude est celui proposé par Liu & Shen [8]. Pour une expérience de visualisation par nappe laser de particules dispersées dans un écoulement le modèle d'observation s'écrit

$$f_d(I, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{I} - I + \nabla I \cdot \mathbf{v} + I \operatorname{div} \mathbf{v})^2 ds \quad (1)$$

où  $\tilde{I}$  correspond à l'image  $I(t + \Delta t)$  et  $\Omega$  représente la surface de toute l'image.

**Régularisation basée sur la cascade d'énergie** La nouvelle régularisation multi-échelle définie à l'échelle  $\ell$  s'écrit

$$f_{r_\ell}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (S_2(\ell) - \beta \ell^{\zeta_2}) = 0. \quad (2)$$

Dans la présente étude  $\beta$  est directement estimé à partir d'une mesure au fil-chaud et  $\zeta_2$  est choisi égal 2 (cf. §4). Notons qu'une approche générique proposée par Héas *et al* [5] permet d'estimer ces paramètres en même temps que le champ de vecteur en mettant en œuvre l'inférence bayésienne.

**Problème d'optimisation** Le problème de minimisation s'écrit,

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}} f_d(I, \mathbf{v}), & \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}, \\ \text{sous les contraintes :} \\ f_{r_\ell}(\mathbf{v}) = 0, & \forall \ell \in \mathbf{I}, \end{cases} \quad (3)$$

où  $\mathbf{I}$  est l'intervalle d'application de la loi de puissance. Rappelons qu'un intervalle aussi réduit que  $\mathbf{I} = [1\text{px}, 2\text{px}]$  est suffisant pour estimer une solution précise.

## 4 Configuration expérimentale, résultats et discussions

Une grille plane à maillage carré a été utilisée pour produire une turbulence homogène et isotrope. La grille était constituée de mailles de taille  $M = 7$  mm et de segments pleins de diamètres  $d$  égaux à 2 mm. Le taux de solidité de la grille  $\sigma \equiv d/M(2 - d/M)$  était égal à 0,49. La vitesse moyenne de l'air était de 6,1 m/s conduisant à une valeur du nombre de Reynolds  $Re = UM/\nu$  égale à 3000.

Des mesures de PIV 2D2C ont été effectuées à l'aide d'un système LaVision. Le facteur d'agrandissement était de 12 pixels/mm. Les images ont été acquises au milieu de la zone d'essai et à  $15M$  derrière la grille. Ces données ont été complétées par une mesure fil chaud prise au milieu de l'image. L'hypothèse de Taylor a été appliquée pour comparer les mesures fil chaud avec les estimations PIV.

De façon à limiter les pertes de particules dans la direction normale au plan laser nous avons choisi un très petit pas de temps entre images. La valeur retenue est  $40\mu\text{s}$  correspondant à un déplacement moyen de 3 pixels et à un écart type de la fluctuation de la turbulence de grille de 0,06 pixels, largement inférieur à l'épaisseur de la nappe laser de l'ordre de 10 pixels. Ces conditions expérimentales sont particulièrement bien adaptées au modèle d'observation (1), valide pour de faibles pertes d'information au travers du plan laser ainsi que pour de très petits déplacements. En effet, le terme d'attache aux données est écrit dans un formalisme variationnel consistant avec des déplacements plus petits que la plus petite longueur d'onde dans l'image (après débruitage), c-à-d celle associée au diamètre des particules observées.

La régularisation a été appliquée uniquement sur les deux premières échelles de l'image, c-à-d pour des séparations de 1 à 2 pixels. Cette gamme d'échelle se situe dans la zone dissipative  $0 < \ell < \eta$ , car l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  estimée à l'aide d'une mesure fil-chaud est de 0,25 mm ou 3 pixels. Dans ces conditions nous avons utilisé pour la régularisation le modèle de loi de puissance de la fonction de structure d'ordre deux  $S_2(\ell) = \beta\ell^2$ . Le paramètre  $\beta$  a été mesuré par anémométrie à fil chaud, ce qui permet de contraindre la solution avec le taux réel de transfert d'énergie inter-échelles.

La figure 2 montre une comparaison d'estimations de la fonction de structure d'ordre 2 obtenues par la méthode proposée et l'anémométrie à fil chaud considérée comme référence. La bonne concordance entre les deux mesures jusqu'à des séparations de l'ordre de 80 pixels indique que les statistiques des plus petites échelles sont estimées avec précision. La déviation observée à plus grande échelle s'explique par le manque de convergence statistique de  $S_2(\ell)$  et par la limite de validité de l'hypothèse de Taylor. La technique proposée estime le même taux de turbulence que celui mesuré avec l'anémométrie à fil chaud, c-à-d 3% correspondant à un écart type sur la fluctuation de vitesse aussi faible que 0,06 pixels. Les résultats obtenus avec une approche globale classique [7] et une technique de corrélation sont également tracés sur la figure 2. Les comparaisons montrent clairement le bénéfice apporté par la régularisation basée sur les lois de puissance qui permettent d'estimer pour cet écoulement l'ensemble de la dynamique, c-à-d de l'échelle intégrale de l'ordre de 100 pixels à l'échelle de Kolmogorov de l'ordre de 3 pixels. Sur la figure 2 le zoom dans le champ de vecteurs superposé à l'image de particules montre que les plus petits tourbillons mesurés sont bien dûs aux mouvements de particules. Notons que dans cet écoulement peu énergétique et pour lequel l'énergie est cantonnée aux petites échelles

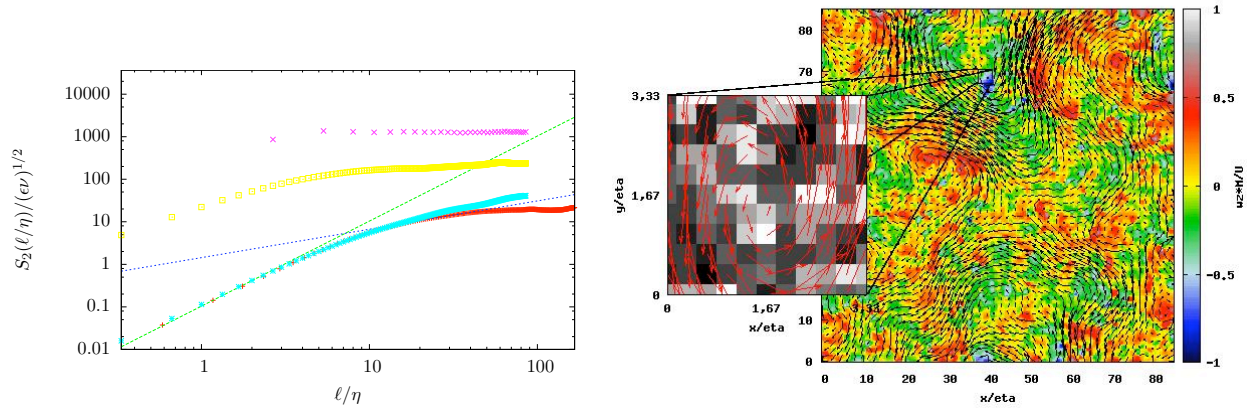


FIGURE 2 – Turbulence de grille. À gauche, Comparaisons de fonctions de structure d’ordre 2. Rouge, mesures fil-chaud ; Turquoise, méthode proposée ; Jaune, approche de [7] ; Fuchsia ; corrélation ; Tiret vert,  $\sim \ell^2$  ; Tiret bleu,  $\sim \ell^{2/3}$ . À droite, champs de vecteurs avec vorticité et images de particules estimés avec la méthode proposée.

les techniques classiques de PIV sont largement mises en défaut. Enfin, la méthode proposée est par définition moins adaptée quand l’image contient une forte hétérogénéité de la turbulence. Dans ce cas la régularisation devrait tenir compte du fait que le taux de transfert d’énergie inter-échelles varie fortement dans l’espace. L’utilisation des ondelettes permet d’envisager de telles techniques [3].

## 5 Conclusions

Une nouvelle technique PIV multiéchelles est proposée. L’algorithme met en œuvre une régularisation contraignant le champ de vitesse estimé à respecter les lois de puissances des statistiques de la turbulence. La méthode permet de mesurer l’ensemble du spectre tourbillonnaire d’une turbulence de grille. Ses limites sont discutées et des perspectives proposées.

## Références

- [1] F. Champagnat, A. Plyer, G. Le Besnerais, B. Leclaire, S. Davoust, and Y. Le Sant. Fast and accurate PIV computation using highly parallel iterative correlation maximization. *Exp. Fluids*, 50 :1169–1182, 2011.
- [2] T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Mémin, and A. Santa Cruz. Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp. Fluids*, 40(1) :80–97, 2006.
- [3] P. Dérian, P. Héas, C. Herzet, and E. Mémin. Wavelets to reconstruct turbulence multifractals from experimental image sequences. In *7th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-7*, Ottawa, Canada, July 2011.
- [4] U. Frisch. *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, and P. Mininni. Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. In *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Kyoto, Japan, 2009.
- [6] D. Heitz, E. Mémin, and C. Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Exp. Fluids*, 48(3) :369–393, 2010.
- [7] B.K.P. Horn and B.G. Schunck. Determining optical flow. *Artif. Intell.*, 17 :185–203, 1981.
- [8] T. Liu and L. Shen. Fluid flow and optical flow. *J. Fluid Mech.*, 614 :253–291, 2008.
- [9] B. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo-vision. In *Int. Joint Conf. on Artificial Intel. (IJCAI)*, pages 674–679, 1981.