RÉPÉTITIONS DANS DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES

ANNE SIEGEL

Le terme “fractal” désigne communément des ensembles qui contiennent une copie d'eux même à toute échelle. Cette notion de répétition apparaît aussi dans certaines fonctions simples telles que des translations par morceaux. Dans une première partie, nous expliquons sur l'exemple considéré comme le plus simple qui soit, c'est-à-dire la rotation par le nombre d'or, pourquoi on peut dire que cette application est entièrement décrite par la seule donnée d'une règle de remplacement sur deux lettres, en la circonstance $a \mapsto ab$ et $b \mapsto a$. En sens inverse, à partir de la simple donnée d'une règle de remplacement, nous construisons une application sur un ensemble bien particulier qui est décrite par la règle de remplacement. Nous détaillons les propriétés géométriques très riches de l'ensemble ainsi construit.

De l'analyse vers la combinatoire

1. Rotation par le nombre d'or

Le nombre d'or est le nombre $\theta = (1+\sqrt{5})/2$ qui vérifie $\theta^2 = \theta + 1$, célèbre pour son utilisation autant en architecture qu'en biologie. Par extension, et pour simplifier les calculs qui vont suivre, on appelle aussi nombre d'or la partie décimale de θ, c'est-à-dire $\alpha = \theta - 1$. Ce nombre vérifie :

$$\alpha^2 = -\alpha + 1.$$

Considérons l'application qui a tout réel x de $[0,1]$ associe la partie décimale de $x+\theta$, autrement dit

$$\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) = x + \alpha \bmod 1.$$

Cette application est représentée figure 1.

La fonction f est appelée *rotation par le nombre d'or* dans la mesure où, si on identifie $[0,1[$ avec le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$, f devient une rotation sur $\mathbb{U}$:

$$\exp(2i\pi f(x)) = \exp(2i\pi\theta)\exp(2i\pi x).$$

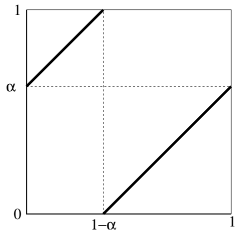

FIGURE 1. Rotation par le nombre d'or.

D'un autre point de vue, on note qu'appliquer f sur l'intervalle $[0,1[$ consiste à translater les deux morceaux $[0,1-\alpha[$ et $[1-\alpha,1[$ dans deux directions différentes. On dit qu'il s'agit d'une *translation par morceaux* :

$$\begin{cases} f(x) &= x+\alpha \quad \text{si } \in [0,1-\alpha[,\\ f(x) &= x-(1-\alpha) \quad \text{si } \in [1-\alpha,1[. \end{cases}$$

Visuellement, l'intervalle de gauche $[0,1-\alpha[$ est translaté sur l'intervalle de droite $[\alpha,1[$, tandis que l'intervalle de droite $[1-\alpha,1[$ est ramené sur l'intervalle de gauche $[0,\alpha[$ (voir figure 2). On dit qu'on a procédé à un *échange d'intervalles.*

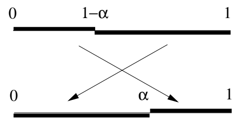

FIGURE 2. Représentation de la rotation par le nombre d'or par un échange d'intervalle.

2. Phénomène de repétition dans la rotation

On s'intéresse à la restriction de la rotation par le nombre d'or f au grand intervalle de continuité $[1-\alpha,1[$ (il s'agit du plus grand intervalle de continuité puisque $\alpha > 1/2$). Cet intervalle n'est pas stable par f, dans la mesure où

$$f([1-\alpha,1[) = [0,\alpha[\not\subset [1-\alpha,1[.$$

On appelle *induit de la rotation sur* $[1-\alpha,1[$, noté g, l'application de premier retour de f sur l'intervalle $[1-\alpha,1[$:

$$\forall x \in [1-\alpha,1[,\ g(x) = f^n(x)$$
$$\text{où } n = \min\{k>0; f^k(x) \in [1-\alpha,1[\}.$$

On obtient :

$$\begin{cases} g(x) = x + (2\alpha - 1) & \text{si } x \in [1-\alpha, 2-2\alpha[, \\ g(x) = x - (1-\alpha) & \text{si } x \in [2-2\alpha, 1[. \end{cases}$$

La fonction g est représentée figure 3.

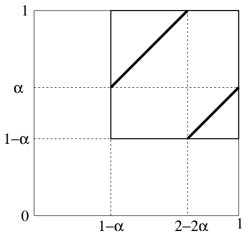

FIGURE 3. Induit de la rotation par le nombre d'or sur son grand intervalle de continuité.

Visuellement, si on effectue sur la figure 3 une rotation d'angle π suivie d'une homothetie de rapport $1/\alpha$, on obtient exactement la représentation de f illustrée figure 1. Autrement dit :

$$\forall x \in [0,1[, \quad g(1-\alpha x) = 1 - \alpha f(x).$$

La fonction $h(x) = 1 - \alpha x$ étant un homéomorphisme, on a $g = h^{-1} f h$. On dit que la rotation par le nombre d'or est *topologiquement conjuguée* à son induit sur son plus grand intervalle de continuité. Une telle transformation, qui pour ainsi dire "se contient elle-même" est appelée *auto-induite.*

3. DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

Un moyen usuel de comprendre la dynamique d'une application est de coder la trajectoire des points dans une partition bien choisie. Ceci est particulièrement appropriée au cas des applications auto-induites.

Pour l'exemple de la rotation par le nombre d'or, une partition naturelle de $[0,1[$ est la partition par les ensembles de continuité :

$$[0,1[= [0, 1-\alpha[\cup [1-\alpha, 1[.$$

On note I_A le grand intervalle $[1-\alpha, 1[$ et I_B le petit intervalle $[0, 1-\alpha[$.

Pour tout $x \in [0,1[$, on appelle *codage de l'obite de x sous l'action de f* la suite $(u_n(x))_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n(x) = \begin{cases} A & \text{si } f^n(x) \in I_A = [1-\alpha, 1[, \\ B & \text{si } f^n(x) \in I_B = [0, 1-\alpha[. \end{cases}$$

Autrement dit, partant d'un point x de $[0,1[$, on retient la lettre A ou B suivant l'intervalle auquel appartient x. On code ensuite l'emplacement des itérés $f(x)$, $f^2(x)$, etc... Une illustration est donnée figure 4.

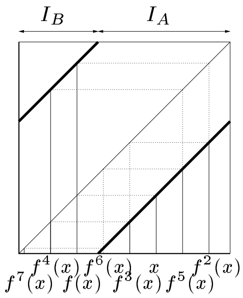

FIGURE 4. Exemple de codage : $u_0(x) \dots u_7(x) = ABAABAAB$.

Les suites $(v_n(x))_{n\geq 0}$, pour $x \in [1-\alpha, 1[$, décrivent quant à elles les orbites de l'application induite g dans la partition donnée par les intervalles de continuité de g :

$$[1-\alpha, 1[= [1-\alpha, 2-2\alpha[\cup [2-2\alpha, 1[.$$

Si I_a désigne le grand intervalle de continuité de g tandis que I_b désigne son petit intervalle de continuité, on a pout tout $x \in [1-\alpha, 1[$:

$$v_n(x) = \begin{cases} a & \text{si } g^n(x) \in I_a = [1-\alpha, 2-2\alpha[, \\ b & \text{si } g^n(x) \in I_b = [2-2\alpha, 1[. \end{cases}$$

Du fait de la définition de g comme induit de f, les suites $v_n(x)$ et $u_n(x)$ sont reliées comme suit pour tout $x \in [1-\alpha, 1[$:

- si $v_0(x) = a$, soit $x \in [1-\alpha, 2-2\alpha[$, on a :
  - $u_0(x) = A$,
  - $f(x) \in [0, 1-\alpha[$, soit $u_1(x) = B$,
  - $f^2(x) \in [1-\alpha, 1[$, d'où $g(x) = f^2(x)$;
- si $v_0(x) = b$, soit $x \in [2-2\alpha, 1[$, on a :
  - $u_0(x) = A$,
  - $f(x) \in [1-\alpha, 1[$, d'où $g(x) = f(x)$.

Apparaît ici une règle de transformation dite *substitution de Fibonacci* et notée σ :

$$\sigma : \begin{cases} a & \mapsto & AB \\ b & \mapsto & A. \end{cases}$$

Selon les règles énoncées plus haut, pour tout $x \in [1-\alpha, 1[$, les deux suites $(u_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$

sont liées par la relation :

$$u_0(x)u_1(x)\dots u_n(x)\dots = \sigma(v_0(x))\sigma(v_1(x))\dots\sigma(v_n(x))\dots$$

Pour l'exemple donné figure 4, on remarque graphiquement que $x \in I_a$, $g(x) = f^2(x) \in I_b$, $g^2(x) = f^3(x) \in I_a$, $g^3(x) = f^5(x) \in I_b$, $g^4(x) = f^6(x) \in I_a$, $g^5(x) = f^8(x)$. Ceci implique que $v_0(x)\dots v_4(x) = ababa$ et on a bien

$$ABAABAA = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b).$$

Ainsi, la trajectoire de x sous l'action de la rotation par le nombre d'or est entièrement déterminée par la trajectoire de x sous l'action de son induit.

4. Utilisation de l'auto-induction

Dans la partie précédente, nous avons simplement utilisé le fait que g est l'induit de f sur un intervalle bien choisi. Or il a été établi que g est conjuguée a f. Ceci se traduit sur les codages u et v par la relation suivante, où les lettres capitales et minuscules sont identifiées :

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall n \geq 0,\ v_n(1-\alpha x) = u_n(x).$$

Un cas particulier se produit lorsque $x = 1 - \alpha x$, c'est-à-dire $x = \alpha$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_0(\alpha)u_1(\alpha)\dots u_n(\alpha)\dots & \\ &= \sigma(v_0(\alpha))\sigma(v_1(\alpha))\dots\sigma(v_n(\alpha))\dots \\ &= \sigma(u_0(\alpha))\sigma(u_1(\alpha))\dots\sigma(u_n(\alpha))\dots \end{aligned}$$

Autrement dit, le codage $(u_n(\alpha))_{n\geq 0}$ est fixé par la substitution de Fibonacci. On dit que cette suite de symboles est un *point fixe de la substitution*. Notons que $(u_n(\alpha))_{n\geq 0}$ est uniquement déterminée :

- $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ commencent par A, ce qui implique que $u_0(\alpha) = A$.
- $u_0(\alpha)u_1(\alpha)u_2(\alpha)u_3(\alpha)\dots$ commence par $\sigma(u_0(\alpha)) = AB$. Ainsi, $u_1(\alpha) = B$.
- De ce fait $u_2(\alpha)u_3(\alpha)\dots$ commence par $\sigma(u_1(\alpha)) = A$ d'où $u_2(\alpha) = A$.
- De ce fait $u_3(\alpha)u_4(\alpha)\dots$ commence par $\sigma(u_2(\alpha)) = AB$. Ainsi $u_3(\alpha) = A$ et $u_4(\alpha) = B$.

On détermine les $u_n(\alpha)$ de proche en proche :

$$u_0(\alpha)u_1(\alpha)\dots u_n(\alpha)\dots = ABAABABAABAABABAABABAA\dots$$

On obtient aussi le codage des points $k\alpha$ mod 1 pour $k > 0$:

$$\forall k > 0,\ \forall n \geq 0,\ u_n(k\alpha \bmod 1) = u_{n+k-1}(\alpha).$$

Selon le théorème de Kronecker, les points $k\alpha$ mod 1 sont denses dans $[0,1[$. De plus, le codage est continu sur $[0,1[\setminus\{1-\alpha\}$. On en déduit que pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout entier n_0, il existe k tels que

$$\forall n \leq n_0,\ u_n(x) = u_{n+k}(\alpha \bmod 1).$$

La réciproque n'est pas tout à fait exacte dans la mesure où il existe des suites (u_n) qui vérifient la formule précédente et ne sont pas des codages de la forme $(u_n(x))$. Par exemple, on se convaincra que la suite définie par $u_0 = A$ et $u_n = u_{n-1}(\alpha)$ pour tout $n > 0$, ne peut coder la trajectoire d'un point sous l'action de la rotation par le nombre d'or dans la partition choisie. En fait, la suite (u_n) code l'action de 0 dans la partition ouverte à gauche $]0, 1-\alpha]\cup]1-\alpha, 1]$. On montre que ce type de situation est le seul obstacle à la réciproque recherchée :

Théorème 1. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{A, B\}$ est le codage de la trajectoire d'un élément de $[0,1[$ sous l'action de la rotation par le nombre d'or, dans la partition $[1, 1-\alpha[\cup[1-\alpha, 1[$ si et seulement*

- *pour tout n, $u_0u_1\dots u_n$ apparaît dans le point fixe de la substitution de Fibonacci $A \mapsto AB$, $B \mapsto A$.*
- *il n'existe aucun entier k tel que $u_k = A$ et $(u_{n+k+1})_{n\geq 0}$ est le point fixe de la substitution de Fibonacci.*

Il existe alors un unique point $x \in [0,1[$ dont la trajectoire est codée par $(u_n)_{n\geq 0}$.

La rotation par le nombre d'or est ainsi entièrement décrite par la substitution de Fibonacci, au sens où elle est isomorphe en mesure au système symbolique engendré par son point fixe. L'intérêt d'une telle représentation par des suites symboliques est de permettre une meilleure approche des propriétés de la transformation de départ telle que sa transitivité, ses orbites périodiques ou ses mesures invariantes.

Inversement, la rotation par le nombre d'or apparaît ici comme une *représentation géométrique* de la substitution de Fibonacci.

De la combinatoire vers l'analyse.

Naturellement se pose la question inverse du phénomène mis en évidence ci-dessus : quelles sont les règles de transformation ou substitutions qui admettent une représentation géométrique ? Etant donnée une substitution, est-il possible de trouver une transformation et une partition sur un ensemble telles que les trajectoires des points soient décrites par la substitution initialement choisie ? Nous allons détailler comment on apporte une réponse positive à cette question pour une substitution sur trois lettres qui généralise la substitution de Fibonacci. Il s'agit de la *substitution de Tribonacci*, définie par

$$a \mapsto AB,\, b \mapsto AC, c \mapsto A.$$

5. Enoncé de la problématique

Par analogie avec la substitution de Fibonacci, nous recherchons un ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$, et non plus un échange d'intervalle mais un *échange de morceaux* ou *translation par morceaux* f défini sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une partition de $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B \cup \mathcal{R}_C,$$

et trois vecteurs $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ tels que

$$x \in \mathcal{R}_i \implies f(x) = x + \delta_i.$$

Pour pouvoir généraliser les raisonnements de la section 3, il faut que, sous l'action de f, la trajectoire des points d'un sous-ensemble bien choisi $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$ avant de revenir dans le sous-ensemble $\mathcal{R}'$ soit décrite par la substitution de Tribonacci. Autrement dit, il doit exister trois morceaux $\mathcal{R}_a$, $\mathcal{R}_b$ et $\mathcal{R}_c$ tels que :

- Puisque $a \mapsto AB$, on doit avoir :
  - $\mathcal{R}_a \subset \mathcal{R}_A$,
  - $f(\mathcal{R}_a) = \mathcal{R}_a + \delta_A \subset \mathcal{R}_B$,
  - $f^2(\mathcal{R}_a) = \mathcal{R}_a + \delta_A + \delta_B \subset \mathcal{R}_A$,
- Puisque $b \mapsto AC$, on doit avoir :
  - $\mathcal{R}_b \subset \mathcal{R}_A$,
  - $f(\mathcal{R}_b) = \mathcal{R}_b + \delta_A \subset \mathcal{R}_C$,
  - $f^2(\mathcal{R}_b) = \mathcal{R}_b + \delta_A + \delta_C \subset \mathcal{R}_A$,
- Puisque $c \mapsto A$, on doit avoir :
  - $\mathcal{R}_c \subset \mathcal{R}_A$,
  - $f(\mathcal{R}_c) = \mathcal{R}_c + \delta_A \subset \mathcal{R}_A$.

En particulier, on doit avoir :

(1) $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b \cup \mathcal{R}_c = \mathcal{R}'$,
(2) $\mathcal{R}_B = \mathcal{R}_a + \delta_A$,
(3) $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_b + \delta_A$,
(4) $(\mathcal{R}_A + \delta_A) \cap \mathcal{R}_A = (\mathcal{R}_c + \delta_A)$.
(5) $(\mathcal{R}_a + \delta_A + \delta_B \subset \mathcal{R}_A$.
(6) $(\mathcal{R}_b + \delta_A + \delta_C \subset \mathcal{R}_A$.

Nous utiliserons ces quatre dernières relations pour déterminer $\mathcal{R}$ et les vecteurs δ_i, les ensembles $\mathcal{R}_a$, $\mathcal{R}_b$ et $\mathcal{R}_c$ étant connus.

Pour pouvoir généraliser les raisonnements de la section 4, il faut que f soit auto-induite, c'est-à-dire que l'application de premier retour de f sur $\mathcal{R}_A$ doit être conjuguée à f.

L'idée développée par Gérard Rauzy au début des années 1980 fut de construire $\mathcal{R}$ par approximations successives. On choisit une transformation "simple" f_0 sur un ensemble "simple" $\mathcal{R}^0$, et on recherche une transformation f_1 sur un ensemble $\mathcal{R}^1$ contenant $\mathcal{R}^0$ telle que, d'une part, f_0 est l'application induite par f_1 sur $\mathcal{R}^0$; d'autre part, les trajectoires sous f_1 des points de $\mathcal{R}^0$ avant de revenir dans $\mathcal{R}^0$ soient décrites par la substitution de Tribonacci.

Pour obtenir la transformation souhaitée, il faudrait que f_0 et f_1 soient conjuguées, ce qui n'est pas le cas vu la "simplicité" de $\mathcal{R}^0$. On recommence donc la construction précédente et on obtient une transformation f_2 sur un ensemble $\mathcal{R}^2$ admettant f_1 pour application de premier retour sur $\mathcal{R}^1$. De proche en proche, on construit des transformations f_n qui convergent en un certain sens vers une transformation f auto-induite vérifiant les propriétés recherchées.

6. Initialisation du processus

La transformation "simple" avec laquelle commence le processus d'itération est un échange de morceaux sur un hexagone régulier : $\mathcal{R}^0$ désigne l'hexagone régulier présenté à figure 5. Visuellement, il s'agit des arêtes du cube unité de $\mathbb{R}^3$ que l'on voit lorsqu'on regarde ce cube unité depuis la demi-droite dirigée par le vecteur $(1,1,1)$. Autrement dit, $\mathcal{R}^0$ est la projection orthogonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x+y+z = 0$. Une partition naturelle est celle donnée par les faces du cube :

$$\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0_A \cup \mathcal{R}^0_B \cup \mathcal{R}^0_C.$$

Une autre partition naturelle est obtenue en regardant le cube de dessous, depuis la demi-droite dirigée par $(-1,-1,-1)$. La transformation qui passe d'une partition à l'autre est un échange de morceaux, noté f_0, qui est décrit par la donnée de trois vecteurs δ_A^0, δ_B^0 et δ_C^0.

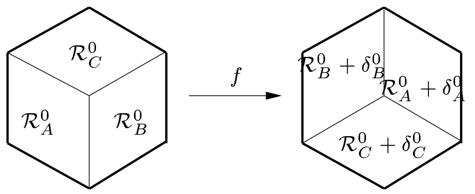

FIGURE 5. Echange de morceaux dans l'hexagone régulier $\mathcal{R}^0$.

On recherche alors d'une part un ensemble $\mathcal{R}^1$, de la forme $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}_A^1 \cup \mathcal{R}_B^1 \cup \mathcal{R}_C^1$; d'autre part un échange de morceaux f_1 défini sur cette partition (c'est-à-dire trois vecteurs δ_A^1, δ_B^1, δ_C^1) tels que le premier retour de f_1 sur $\mathcal{R}_A^1$ soit décrit par la substitution de Tribonacci. Selon la formule (1) démontrée section 5, $\mathcal{R}_A^1$ n'est rien d'autre que l'hexagone régulier $\mathcal{R}^0$. De plus, la formule (4) nous dit que :

$$(\mathcal{R}^0 + \delta_A^1) \cap \mathcal{R}^0 = (\mathcal{R}_C^0 + \delta_A^1).$$

Ainsi, si on déplace l'hexagone $\mathcal{R}^0$ en le translatant par le vecteur δ_A^1, la seule partie du translaté demeurant à l'intérieur de l'hexagone de départ doit être le translaté de la face $\mathcal{R}_C^0$. On se convaincra qu'un seul vecteur δ_A^1 vérifie cette propriété; il s'agit du vecteur dirigé par l'arête verticale du cube (voir figure 6).

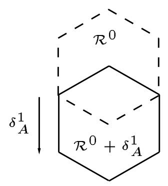

FIGURE 6. Unique vecteur δ_A^1 vérifiant les conditions requises.

Selon les formules (2) et (3), les ensembles $\mathcal{R}_B^1 = \mathcal{R}_A^0 + \delta_A^1$ et $\mathcal{R}_C^1 = \mathcal{R}_B^0 + \delta_A^1$ sont alors uniquement déterminés. Il n'existe de plus qu'un seul vecteur δ_B qui vérifie la formule (5) : $\mathcal{R}_A^0 + \delta_A^1 + \delta_B^1 \subset \mathcal{R}_A^1$. Le vecteur δ_C^1 est de même déterminé par la formule (6). Finalement, $\mathcal{R}^1$ est un nouvel hexagone, non régulier. L'échange de morceaux f_1 consiste à faire descendre $\mathcal{R}_A^1$, tandis que $\mathcal{R}_B^1$ remonte en haut à droite et $\mathcal{R}_C^1$ remonte en haut à gauche (voir figure 7).

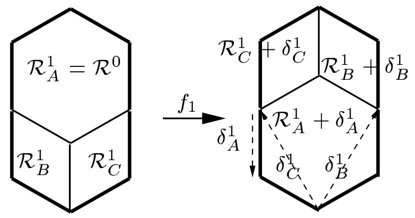

FIGURE 7. Echange de morceaux dans l'ensemble $\mathcal{R}^1$.

On se convaincra que f_0 est l'application induite par f_1 sur $\mathcal{R}_A^1 = \mathcal{R}^0$ et que la trajectoire des points de $\mathcal{R}^0$ sous l'action de f_1 est décrite par la substitution de Tribonacci. Les raisonnements de la section 3 sont donc transposables dans ce nouveau contexte. Par contre les transformations f_1 et f_0 ne sont pas topologiquement conjuguées.

7. ITÉRATION DU PROCESSUS

Pour pouvoir obtenir une transformation auto-induite, on construit un nouvel échange de morceaux f_2 sur un nouvel ensemble $\mathcal{R}^2$ contenant $\mathcal{R}^1$ tel que, d'une part, f_1 est l'induit de f_2 sur $\mathcal{R}^1$; d'autre part, la substitution de Tribonacci decrit la trajectoire des points de $\mathcal{R}^1$ avant de revenir dans $\mathcal{R}^1$. Ceci revient à déterminer un ensemble $\mathcal{R}^2$ et un vecteur δ_A^2 tels que :

- $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_A^2 \cup \mathcal{R}_B^2 \cup \mathcal{R}_C^2$,
- $\mathcal{R}_A^2 = \mathcal{R}_A^1 \cup \mathcal{R}_B^1 \cup \mathcal{R}_C^1 = \mathcal{R}^1$,
- $\mathcal{R}_B^2 = \mathcal{R}_A^1 + \delta_A^2$,
- $\mathcal{R}_C^2 = \mathcal{R}_B^1 + \delta_A^2$,
- $(\mathcal{R}_A^2 + \delta_A^2) \cap \mathcal{R}_A^2 = (\mathcal{R}_C^1 + \delta_A^2)$.

Là encore, le vecteur δ_A^2 est unique, ce qui permet de déterminer l'ensemble $\mathcal{R}^2$ et la transformation f_2 (voir figure 8).

La transformation f_1 est bien l'induit par f_2 sur $\mathcal{R}^1$, mais f_1 et f_2 ne sont toujours pas topologiquement conjuguées. On construit donc une nouvel transformation f_3 sur un ensemble $\mathcal{R}^3$, puis une transformation f_4 sur un ensemble $\mathcal{R}^4$, etc. Le fait d'être parti d'un hexagone régulier permet de montrer qu'une telle construction est

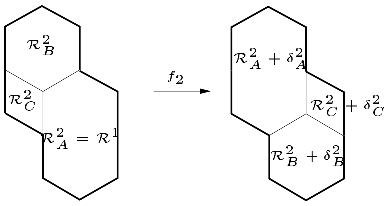

FIGURE 8. Echange de morceaux dans l'ensemble $\mathcal{R}^2$.

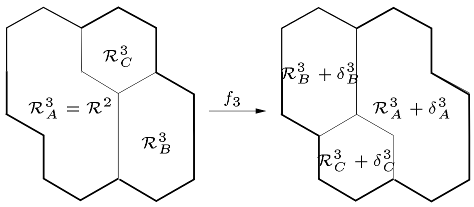

FIGURE 9. Echange de morceaux dans l'ensemble $\mathcal{R}^3$.

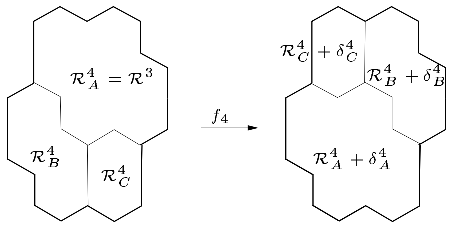

FIGURE 10. Tranformation f_4.

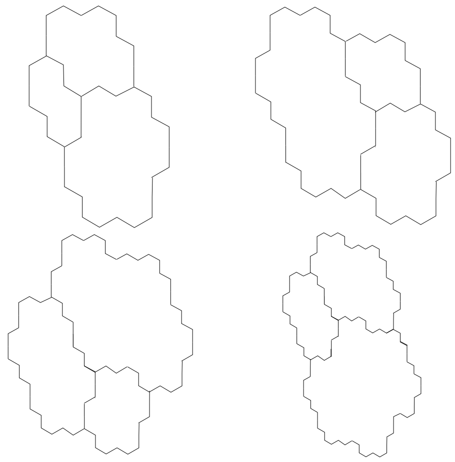

FIGURE 11. Ensembles $\mathcal{R}^i$ pour $i = 5, 6, 7, 8$.

possible et uniquement déterminée pour tout entier n.

Proposition 2. *Pour tout n, il existe un unique échange de trois morceaux f_n sur un polyèdre $\mathcal{R}^n \subset \mathbb{C}$ tel que*

- $\mathcal{R}^{n-1} \subset \mathcal{R}^n$*;*
- f_{n-1} *est l'application induite par f_n sur $\mathcal{R}^{n-1}$;*
- *la trajectoire des points de $\mathcal{R}^{n-1}$ sous l'action de f_n avant de revenir dans $\mathcal{R}^{n-1}$ est décrite par la substitution de Tribonacci.*

Les transformations f_3 et f_4 sont montrées aux figures 9 et 10. Les ensembles $\mathcal{R}^5$, $\mathcal{R}^6$, $\mathcal{R}^7$, $\mathcal{R}^8$ sont présentés figure 11. Faisons plusieurs remarques :

- Les représentations des ensembles sont renormalisées, dans la mesure où on a toujours $\mathcal{R}^{n-1} \subset \mathcal{R}^n$.
- Chaque ensemble $\mathcal{R}^n$ est partitionné en trois ensembles : le plus gros ($\mathcal{R}^n_A$) est égal à $\mathcal{R}^{n-1}$; celui de taille intermédiaire ($\mathcal{R}^n_B$) est égal à $\mathcal{R}^{n-2}$; celui de plus petite taille ($\mathcal{R}^n_C$) est égal à $\mathcal{R}^{n-3}$.
- La forme de chaque ensemble $\mathcal{R}^n$ rappelle grossièrement celle de $\mathcal{R}^{n-1}$, celui-ci ayant été préalablement tourné d'un angle d'environ $2\pi/3$, de manière à replacer le gros bloc $\mathcal{R}^n_A$ en bas de l'image. Ceci est particulièrement visible si on compare les formes de $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^5$ et $\mathcal{R}^8$ par exemple.

Cette impression visuelle selon laquelle chaque ensemble $\mathcal{R}^n$ semble être un raffinement du précédent se formalise mathématiquement comme suit. On appelle *nombre de Tribonacci* le seul complexe α de partie imaginaire strictement positive qui vérifie $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$. En particulier, son module est strictement inférieur à 1.

Théorème 3. *La suite de compacts $\alpha^n \mathcal{R}^n$ converge pour la distance de Haussdorf vers un compact $\mathcal{R}$ de $\mathbb{C}$ appelé* fractal de Rauzy*.*

Une représentation du fractal de Rauzy est donnée figure 12.

8. PROPRIÉTÉS DU FRACTAL DE RAUZY

Les propriétés du fractal de Rauzy ont fait l'objet d'un grand nombre d'études.

D'abord, le fractal de Rauzy se décompose en trois sous-ensembles compacts qui apparaissent

FIGURE 12. Fractal de Rauzy.

sous différents niveaux de gris sur la représentation

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B \cup \mathcal{R}_C.$$

Ces ensembles ne sont pas exactement disjoints mais *disjoints en mesure* : l'aire de leurs intersections deux à deux est nulle.

A une translation près, $\mathcal{R}_A$ et $\alpha\mathcal{R}$ ne font qu'un : $\mathcal{R}_A$ est l'image de $\mathcal{R}$ par une rotation d'environ $2\pi/3$ et d'une contraction. De même, $\mathcal{R}_B = \alpha\mathcal{R}_A = \alpha^2\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_C = \alpha^3\mathcal{R}$. Une telle figure, qui peut-être reconstituée à partir d'elle-même, est appelée *auto-similaire*.

De plus, il existe trois vecteurs δ_A, δ_B et δ_C tels que

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_A + \delta_A) \cup (\mathcal{R}_B + \delta_B) \cup (\mathcal{R}_C + \delta_C),$$

l'union étant disjointe sauf sur un ensemble dont l'aire est nulle. Ainsi, la transformation

$$f(x) = x + \delta_i \text{ ssi } x \in \mathcal{R}_A$$

est un échange de morceaux défini sur $\mathcal{R}$ privé d'un ensemble dont l'aire est nulle. Une représentation est donnée figure 13.

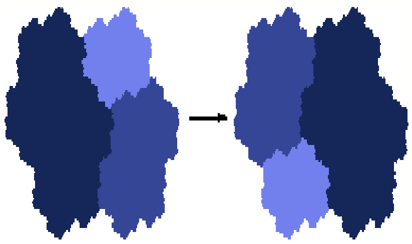

FIGURE 13. Translation par morceaux sur le fractal de Rauzy.

On montre que l'application induite par f sur $\mathcal{R}_A$ est conjuguée (en mesure) à f. Ceci signifie que f est auto-induite.

De plus, par construction, les trajectoires sous l'action de f des points de $\mathcal{R}_A$ avant de revenir dans $\mathcal{R}_A$ sont décrite par la substitution de Tribonacci. Autrement dit, on se trouve dans une situation similaire à celle décrite pour la rotation par le nombre d'or. On montre finalement le résultat suivant :

Théorème 4. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{A, B, C\}$ est le codage (dans la partition $\mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_B \cup \mathcal{R}_C$) de la trajectoire d'un élément du fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ sous l'action de l'échange de morceaux f, si et seulement si pour tout n, la suite finie $u_0u_1\ldots u_n$ apparaît dans le point fixe de la substitution de Tribonacci $A \mapsto AB$, $B \mapsto AC$, $C \mapsto A$.*

L'ensemble des points de $\mathcal{R}$ qui admettent le même codage qu'un autre point de $\mathcal{R}$ forme un ensemble dont l'aire est nulle.

Notons enfin que, comme celà semble être le cas visuellement, le fractal de Rauzy est connexe (il ne peut pas de décomposer en deux parties disjoites); il est en fait simplement connexe (il ne contient aucun trou); sa frontière est un ensemble fractal dont la dimension de Haussdorf est strictement comprise entre 1 et 2.

La substitution de Tribonacci admet ainsi une représentation géométrique sous la forme d'un échange de morceaux dans un ensemble compact de $\mathbb{C}$ aux propriétés très riches. Ceci généralise le théorème 1, au détail près que ne se pose plus la question de l'exclusion de certaines suites, liées au sens d'ouverture des intervalles sur lesquels le codage est effectué. En effet, dans le théorème 4, on n'a plus affaire a une partition stricte, comme c'etait le cas au théorème 1 mais à une partition mesurable; ce qui permet d'éviter d'exclure le codage des points de la frontière.

Encore plus généralement

Il est naturel de se demander pour quelles substitutions il est possible de construire une représentation du même type, c'est-à-dire par un échange de morceaux dans un compact que par extension nous appelerons *fractal de Rauzy de la substitution.*

Il est apparu que la propriété fondamentale permettant de construire le fractal de Rauzy est le fait que le polynôme annulateur de α, $X^3 -$

$X^2 - X - 1$, admet une racine réelle strictement plus grande que 1 tandis que ses deux autres racines α et $\overline{\alpha}$ sont de module strictement inférieur à 1. On dit que la racine réelle de plus grand module est un *nombre de Pisot*.

De manière générale, à toute substitution on associe la matrice qui la *linéarise*. Plus précisément, si la substitution est définie sur un alphabet $\{A_1, A_2, \ldots, A_d\}$, sa *matrice d'incidence* est la matrice de taille $d \times d$ dont le coefficient d'indice (i, j) est le nombre d'apparitions de la lettre A_i dans le mot $\sigma(A_j)$.

On dit qu'une substitution est *de type Pisot* si le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence admet pour racine une nombre de Pisot, c'est-à-dire une seule racine de module strictement supérieur à 1 et toutes les autres non nulles et de module strictement inférieur à 1.

On vérifiera que les polynômes caractéristiques des matrices associées aux substitutions de Fibonacci et Tribonacci sont respectivement $X^2 - X - 1$ et $X^3 - X^2 - X - 1$.

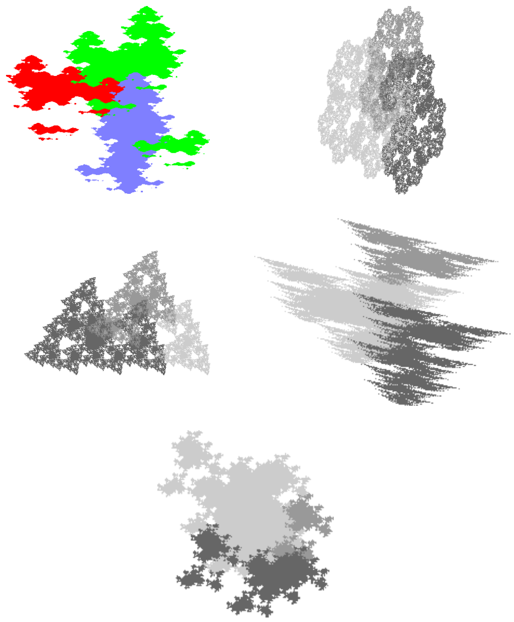

FIGURE 14. Fractals de Rauzy pour des substitutions de type Pisot.

On montre que pour les substitutions de type Pisot dont la matrice d'incidence est de déterminant ± 1, la méthode décrite pour la substitution de Tribonacci s'applique et permet de construire un fractal de Rauzy pour la substitution. Si la substitution est une règle de remplacement sur d lettres, le fractal de Rauzy est un compact dans $\mathbb{R}^{d-1}$.

Une transformation du type échange de morceaux existe sur le fractal de Rauzy si la substitution vérifie une condition combinatoire dite de *forte coïncidence*. Un résultat analogue au théorème 4 est alors vérifie par la substitution.

Les fractals de Rauzy ainsi obtenus sont toujours compacts et auto-similaires. Par contre leurs propriétés topologiques peuvent être assez éloignées de celles du fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci. En particulier, comme le montrent les exemples ci-dessous, il n'y a pas toujours connexité ou simple connexité.

Parmi les questions qui se posent actuellement, on cherche à determiner s'il existe des substitutions de type Pisot qui ne vérifient pas la condition de coïncidence; on recherche des conditions nécessaires et suffisantes de connexité et simple connexité; enfin, et surtout, on cherche à construire des fractals de Rauzy pour des substitutions qui ne sont pas de type Pisot.

REFERENCES

[1] P. Arnoux and S. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 8(2):181–207, 2001.

[2] P. Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, To appear, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, and A. Siegel.

[3] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems – spectral analysis*. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2):147–178, 1982.

IRMAR BÂT 22-23 - CAMPUS DE BEAULIEU - 35042 RENNES CEDEX - FRANCE

E-mail address: siegel@maths.univ-rennes1.fr