Université de la Méditerranée
Faculté des sciences de Luminy

Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée

Spécialité : Mathématiques et Fondements de l'Informatique

soutenue le 12 décembre 2000 par

Anne SIEGEL

Titre :

Représentations géométrique, combinatoire et arithmétique des systèmes substitutifs de type Pisot

Directeur de thèse : M. Pierre ARNOUX

Devant le jury composé de

M. Pierre ARNOUX
M. Jean BERSTEL
Mme Valérie BERTHE
M. Michel DEKKING
M. Albert FATHI, Rapporteur
M. François PARREAU, Rapporteur
M. Gérard RAUZY
M. Michel WALDSCHMIDT

A Stéphane et Quentin

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance à Pierre Arnoux qui a dirigé cette thèse. Son soutien actif, son attention et ses commentaires sur mes travaux, ainsi que sa patience, ont été précieux et constants. Sa passion pour les mathématiques fut très stimulante. Le sujet de thèse qu'il m'a proposé et les directions que nous lui avons fait prendre ont été passionnants.

Ma profonde gratitude va à Valérie Berthé, pour m'avoir accueillie au sein de l'IML et m'avoir toujours encouragée et conseillée. Sa patience dans la lecture et la correction de mes travaux a été sans égale. Son amitié m'est précieuse. Je suis très heureuse qu'elle fasse partie de ce Jury.

Je remercie vivement Albert Fathi de la charge de rapporteur qu'il a bien voulu accepter, et de m'avoir si bien conseillé en m'orientant de l'IML pour faire cette thèse.
Je remercie également profondément François Parreau pour s'être intéressé à mon travail et avoir accepté d'en être rapporteur, ainsi que pour ses nombreuses suggestions concernant le prolongement de mes travaux.
Je suis très honorée que J. Berstel, F.M. Dekking, G. Rauzy et M. Waldschmidt aient accepté d'être membres de ce Jury.

Je tiens à remercier les membres de l'équipe DAC, anciens, actuels comme informels, pour la chaleur humaine, l'amitié et la stimulation intellectuelle qu'ils ont su réunir. Merci tout particulièrement à Luca, Pascal et Vincent.
Ma reconnaissance va à l'ensemble de l'IML pour les conditions de travail et l'accueil chaleureux que j'y ai trouvés, ainsi qu'à Pierre Liardet et à son équipe pour leur gentillesse et le bon accueil qu'ils m'ont toujours fait.

Je suis très heureuse de remercier mes parents et mes soeurs pour leur présence constante, et aussi pour l'intérêt pour les mathématiques qu'ils ont généré chez moi (du moins pour mes parents !).
Un grand clin d'oeil à tous mes amis, marseillais comme ex-lyonnais, pour m'avoir sorti la tête des mathématiques, et particulièrement aux deux Hélènes et à Marie-Christine pour nos longues discussions.

Je dois aussi dire un mot de Quentin, de son calme avant sa naissance et de ses longues nuits de sommeil après cette même naissance, qui ont beaucoup contribué à la préservation de ma santé. Ses sourires fabuleux et ses premiers pas ont été une grande motivation pour finir cette thèse.

Enfin, aucun mot n'est suffisant pour exprimer la gratitude que je ressens envers Stéphane. Présence, patience, compréhension, soutien et encouragements de sa part ne se sont jamais démentis pendant ces dix dernières années.

Introduction

Au sein de la dynamique symbolique, deux classes de systèmes dynamiques particulièrement simples se distinguent. La première est celle des sous-shifts de type fini, d'entropie strictement positive, dont un grand nombre de propriétés ont été étudiées et mises en évidence. Obtenus à partir de contraintes finies, on voit naturellement apparaître au sein de ces systèmes des entiers algébriques : les partitions de Markov permettent de décrire les systèmes dynamiques topologiques au moyen de sous-shifts de type fini. Elle peuvent être vues comme une généralisation du système binaire, c'est-à-dire de la représentation symbolique par le décalage sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la multiplication par 2 modulo 1 qui est à la base de l'écriture des réels en base 2.

La seconde classe de systèmes symboliques est celle est systèmes dits substitutifs. Rappelons qu'une substitution est un objet combinatoire qui fait correspondre à chaque lettre d'un alphabet fini un mot fini non vide sur cet alphabet. Si la substitution mélange suffisamment les lettres (condition de primitivité), on lui associe un système symbolique minimal uniquement ergodique. Ces systèmes sont d'entropie nulle, et donc bien distincts des sous-shifts de type fini. Par contre, ils sont encore définis par des règles finies et des contraintes simples, ce qui permet de faire apparaître naturellement des entiers algébriques dans la structure de ces systèmes.

La première substitution qui a été étudiée est la substitution dite de Prouhet-Thue-Morse définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 21$. Cette substitution est dite de longueur constante, les longueurs des images des deux lettres 1 et 2 étant égales. En 1907, Thue étudia la combinatoire du point fixe de cette substitution dans le cadre de l'étude de suites symboliques sans facteur carré. En 1921, M. Morse a utilisé cette substitution pour construire des géodésiques récurrentes non fermées sur des surfaces à courbure négative. Plus tard, il a été prouvé que le système symbolique associé à cette substitution est une extension à deux points de l'odomètre diadique, c'est-à-dire le groupe $\mathbb{Z}_2$ des entiers 2-adiques.

Un autre exemple significatif est la substitution de Fibonacci définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$, de longueur non constante. Cette substitution engendre un système qui d'une part est isomorphe à une translation sur le tore de dimension 1, d'autre part contient des mots dont la complexité combinatoire est minimale parmi les suites non ultimement périodiques.

L'équivalent sur un alphabet à trois lettres de la substitution de Fibonacci est la substitution de Tribonacci définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$. G. Rauzy, avec des techniques issues de la théorie des nombres, a montré en 1981 montre que le système substitutif qui y est associé est isomorphe en mesure d'une part à une rotation sur le tore de dimension 2, et d'autre part à une échange de morceaux dans un compact auto-similaire du plan à frontière fractale.

On peut ainsi se demander si les systèmes substitutifs sont des systèmes dynamiques standards ou totalement nouveaux. Plus précisément, au vu des exemples précédents, il est intéressant de savoir quels sont les systèmes substitutifs qui sont isomorphes à une rotation sur un groupe compact, ou plus généralement de trouver leur facteur équicontinu maximal.

Une réponse précise a été donnée à cette question pour les substitutions de longueur constante, durant les années 1960-1970, avec les travaux de T. Kamae, J. C. Martin et F. M. Dekking en particulier. On sait ainsi que le facteur équicontinu maximal des systèmes substitutifs de longueur constante l est une translation sur le produit direct du groupe des entiers l-adiques $\mathbb{Z}_l$ et d'un groupe fini. Il y a de plus un isomorphisme mesurable entre un système substitutif de longueur constante et son facteur équicontinu maximal si et seulement si la substitution vérifie une condition combinatoire simple dite de coïncidences.

Il est naturel mais plus difficile de travailler en longueur non constante.

G. Rauzy a abordé cette question avec l'étude très complète du système associé à la substitution de Tribonacci. B. Host a ensuite fait un pas significatif en montrant que les fonctions propres des systèmes substitutifs primitifs sont continues. Ainsi, très opportunément, les deux principales classifications dynamiques que sont la classification par isomorphisme mesurable et celle par isomorphisme topologique sont équivalentes dans le cas des systèmes substitutifs primitifs.

Dans la continuation de ces travaux, C. Mauduit, S. Ferenczi et A. Nogueira ont montré que le spectre d'un système substitutif se divise en deux parties, la première, d'origine arithmétique, ne provenant que de la matrice d'incidence de la substitution, et la seconde, d'origine plus combinatoire, étant aussi liée aux mots de retour associés au point fixe de la substitution.

B. Host, A. N. Livshits, B. et M. Solomyak, et M. Hollander ont donné des conditions, certaines nécessaires, d'autres suffisantes sur les substitutions pour que les systèmes associés soit à spectre discret. En particulier, B. Host et indépendemment A. N. Livshits, dont les travaux ont été précisés et généralisé par M. Hollander, ont défini pour les substitutions de longueur non constante sur deux lettres une condition combinatoire dite de coïncidences qui généralise la condition de F. M. Dekking dans le cas longueur constante. Cette condition est équivalente au fait qu'un système substitutif de type Pisot sur deux lettres est à spectre discret.

Hormis pour la substitution de Tribonacci et certains exemples développés par B. Solomyak, ces travaux ne donnent pas une réalisation explicite du facteur équicontinu maximal. Pour toute substitution unimodulaire de type Pisot sur d lettres, P. Arnoux et S. Ito ont construit explicitement une partie auto-similaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ appelée fractal de Rauzy de la substitution. Ils ont de plus généralisé la condition de coïncidences pour toutes les substitutions de longueur non constante sur un alphabet fini, et montré que cette condition est suffisante d'une part pour que le système soit isomorphe en mesure à un échange de morceaux dans le fractal de Rauzy de la substitution, d'autre part pour que la substitution admette une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$ pour facteur topologique.

Les techniques utilisées ne permettent pas de montrer que ce facteur topologique est isomorphe en mesure au système substitutif, comme c'est le cas lorsque l'alphabet est de cardinal 2.

Tous les résultats évoqués ci-dessus seront précisés au chapitre 1.

Le but de cette thèse est d'étudier de manière plus précise et générale les systèmes substitutifs de longueur non constante. Une des composantes essentielles de ce travail est de réaliser le programme de travail suggéré par G. Rauzy dans [77].

Au premier chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés fondamentales des diverses notions qui sont utilisées dans cette thèse : substitutions, système dynamique topologique et abélianisé associés, topologies p-adiques, systèmes dynamiques symboliques de type fini, partitions de Markov et auto-similarité, théorie spectrale. Nous faisons de plus un rappel au sujet des résultats déjà connus, dont une partie vient d'être rapidement exposée, sur des thèmes tels que la reconnaissabilité des substitutions, la théorie spectrale des systèmes substitutifs et leur représentation géométrique.

Le chapitre 2 a été écrit en collaboration avec V. Canterini. Nous représentons les systèmes substitutifs primitifs de manière combinatoire en montrant que derrière toute substitution se trouve un système dynamique symbolique de type fini.

Théorème 2.4.2 *Tout système symbolique associé à une substitution primitive est conjugué en mesure par une application continue explicite à une transformation adique sur le support d'un système dynamique symbolique de type fini défini explicitement à partir de la substitution. La conjugaison est injective sauf sur l'orbite des points du système périodiques pour la substitution, où les fibres sont finies. La mesure ergodique sur le système substitutif est envoyée par la conjugaison sur une mesure équivalente à la mesure d'entropie maximale du système dynamique symbolique de type fini.*

On fournit ainsi une nouvelle démonstration des travaux de A. N. Vershik, qui avait prouvé ce résultat en construisant un compact markovien stationnaire muni d'une relation d'ordre partielle sur les étiquettes des arêtes. Mais cette relation d'ordre était arbitraire, et rendait cette représentation peu explicite. Notre définition des étiquettes à partir des préfixes des images de lettres par la substitution implique une relation d'ordre naturelle entre ces étiquettes et permet d'obtenir une représentation bien déterminée.

Le chapitre 3, écrit en collaboration avec V. Canterini, est consacré à la géométrie des systèmes substitutifs de type Pisot. Nous utilisons la structure combinatoire du système substitutif obtenue au chapitre 2 pour construire naturellement une représentation de tout système substitutif de type Pisot sur d lettres, qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur le système substitutif et un pseudo-échange de morceaux dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Cette représentation est appelée représentation géométrique du système.

En projetant $\mathbb{R}^{d-1}$ dans son quotient par un réseau bien choisi, on obtient une nouvelle représentation du système, à valeur dans un tore, qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur le système et une translation. On montre ainsi :

Théorème 3.2.1 *Tout système symbolique associé à une substitution de type Pisot sur d lettres admet pour facteur topologique une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$. L'application qui réalise ce facteur est explicite et est appelée représentation torique du système.*

On remarque que ce résultat est général, et ne fait pas intervenir la condition d'unimodularité ou de coïncidences, comme dans les résultats partiels de B. Host, M. et B. Solomyak, P. Arnoux et S. Ito sur ce sujet.

Dans le cas où la substitution, en plus d'être de type Pisot, est unimodulaire et vérifie la condition de coïncidences, on montre que le pseudo-échange de morceaux défini au début du chapitre pour représenter le système substitutif est en fait un échange de morceaux défini presque partout sur le fractal de Rauzy associé à la substitution. Avec des arguments similaires aux leurs, on retrouve ainsi le résultat suivant de P. Arnoux et S. Ito. L'intérêt de notre construction est que la conjugaison, qui se trouve être la représentation géométrique du système, est explicite.

Théorème 3.3.1 *Si σ est une substitution sur d lettres, unimodulaire, de type Pisot, qui vérifie la condition de coïncidences, alors le système symbolique associé à σ est conjugué en mesure à un échange de morceaux sur un compact auto-similaire de $\mathbb{R}^{d-1}$.*

Les méthodes développées pour prouver le théorème 3.3.1 montrent alors leurs limites dans la mesure où elles ne permettent pas de décider si la condition de coïncidences est suffisante pour que la représentation torique définie au théorème 3.2.1 soit injective en mesure, ce qui impliquerait que les systèmes substitutifs unimodulaires de type Pisot vérifiant cette condition sont des rotations toriques.

De ce fait, au chapitre 4, on aborde la question de l'injectivité de la représentation torique sous un angle totalement différent, en combinant une vision formelle des représentations géométrique et torique, la structure combinatoire du système substitutif décrite au chapitre 2, et la structure algébrique du système provenant en particulier de sa matrice d'incidence.

Plus précisément, on montre que ces représentations d'un système unimodulaire de type Pisot sont obtenues en rassemblant l'ensemble des valeurs que prend pour des métriques archimédiennes une série formelle à coefficients dans le corps de rupture formel du polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution.

L'étude de l'injectivité des représentations se ramène donc à l'étude des suites de chiffres qui annulent une série formelle pour toutes les métriques archimédiennes qui font converger cette série. Le caractère unimodulaire de la substitution implique que le corps sur lequel est définie la série est engendré par un entier algébrique. On en déduit que les suites de chiffres recherchées constituent des chemins dans un automate fini.

On montre alors que l'étude de la structure des automates ainsi obtenus permet de déterminer si les représentations géométrique et torique sont injectives en mesure.

Ainsi, on montre que l'injectivité en mesure de la représentation géométrique d'un système substitutif unimodulaire de type Pisot est équivalente à une première condition combinatoire explicite exprimée en terme de graphes. Cette condition est en particulier vérifiée par une substitution qui est à coïncidences, mais on ne sait pas s'il y a équivalence. Cette condition présente ainsi l'avantage sur la condition de coïncidences d'être nécessaire et suffisante, mais elle est beaucoup plus difficile à vérifier à la main.

Cette approche trouve son plus grand intérêt dans le fait que, contrairement à ce qui se passe pour la condition de coïncidences, ces méthodes sont encore valables pour l'étude de la représentation torique. On obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème 4.5.1 *L'injectivité en mesure de la représentation torique (théorème 3.2.1) d'un système substitutif unimodulaire de type Pisot est équivalente à une condition combinatoire explicite ne dépendant que de la substitution qui engendre le système.*

Corollaire 4.5.1 *Il existe une condition explicite et effective suffisante pour que le système symbolique engendré par une substitution unimodulaire de type Pisot soit à spectre discret.*

Par exemple, les systèmes engendrés par les substitutions $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 31$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 132$ sont chacun isomorphes à une translation sur le tore $\mathbb{T}^2$. De tels résultats étaient inconnus pour les substitutions sur plus de 3 lettres, excepté la substitution de Tribonacci.

Si on revient à une vision plus géométrique, l'interprétation en terme d'existence de pavages de l'injectivité en mesure de la représentation torique permet de déduire :

Corollaire 4.5.2 *Il existe une condition explicite et effective qui décide si le fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire de type Pisot sur d lettres engendre un pavage régulier de $\mathbb{R}^{d-1}$.*

Le théorème 4.5.1 ne permet pas pour l'instant d'obtenir des résultats généraux sur l'injectivité de la représentation torique d'une classe générale de substitutions, du fait de la difficulté de vérification du critère. Par contre, cette condition nécessaire et suffisante se vérifie en un temps fini pour tout exemple explicite, par un algorithme dont la programmation a fait l'objet de l'annexe B.

Au chapitre 5, on combine les visions combinatoires, géométriques, formelles et arithmétiques des systèmes substitutifs développées dans les chapitres précédents pour montrer que l'injectivité de la représentation torique d'une substitution , unimodulaire de type Pisot permet de construire explicitement une partition de Markov pour l'automorphisme du tore qui lui est associé.

Etant donné un automorphisme à coefficients positifs du tore, il suffit donc de trouver une substitution qui vérifie le le critère du théorème 4.5.1 pour en déduire une partition de Markov explicite de l'automorphisme.

Nous donnons ainsi une nouvelle manière de construire des partitions de Markov pour certains automorphismes du tore, en utilisant des substitutions. L'avantage de cette méthode constructive par rapport à celles déjà connues et plus générales (puisque concernant tous les automorphismes de type Pisot et pas seulement ceux à coefficients positifs) de R. Kenyon et A. Vershik ou S. Leborgne entres autres est de caractériser certaines propriétés topologiques de ces partitions de Markov (connexité, simple connexité, dimension de Haussdorf de la frontière) qui étaient difficilement accessibles par les constructions précédentes.

Les résultats des chapitres 4 et 5 sont totalement dépendants du caractère unimodulaire de la substitution. En effet, si la substitution n'est pas unimodulaire, la représentation torique a peu de chance d'être injective en mesure ou même de représenter le facteur équicontinu maximal dans la mesure où des exemples montrent que certains groupes p-adiques sont facteurs du système substitutif.

Le chapitre 6 est ainsi consacré à la représentation p-adique des systèmes substitutifs non unimodulaires. Les résultats principaux de ce chapitre ne font pas intervenir la condition Pisot mais le fait que le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

En effet, en étudiant les ramifications du nombre premier p dans le corps de décomposition du polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution, on obtient la caractérisation suivante :

Théorème 6.2.1 *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier.*

Le système dynamique associé à σ admet pour facteur une addition sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si chacune des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ appartient à chacun des idéaux premiers contenant p dans l'anneau des entiers du corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$.

On montre que cet énoncé est équivalent au suivant :

Corollaire 6.2.1 *Soit σ une substitution primitive dont la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier. Le système dynamique associé à σ admet pour facteur une translation sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si p divise tous les coefficients non dominant de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$, ce qui est équivalent à dire que $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p.*

En particulier, il existe des systèmes substitutifs non unimodulaires qui n'admettent pas de facteur p-adique. Un exemple est la substitution définie par $\sigma(1) = 11222$ et $\sigma(2) = 1222$. Ce résultat est plutôt inattendu, dans la mesure où il se produit ici un phénomène totalement distinct du cas longueur constante.

Par un parallèle avec la représentation géométrique des substitutions unimodulaires, on montre que, en un certain sens, la condition précédente sur le polynôme caractéristique est l'équivalent p-adique du fait qu'un polynôme irréductible admet pour racine un nombre de Pisot.

En guise de conclusion, au chapitre 7, on rassemble les représentations géométriques et p-adiques des systèmes substitutifs non unimodulaires de type Pisot pour en obtenir une représentation globale par un pseudo-échange de morceaux dans un produit d'espace euclidien et p-adiques.

Les techniques du chapitre 3 ne sont alors plus valables, et on ne peut ainsi pas montrer que la condition de coïncidences est une condition suffisante pour que le pseudo-échange de morceaux soit un échange de morceaux et que la représentation soit injective en mesure.

Par contre, les premiers résultats du chapitre 4 s'adaptent sans grosses modifications au cas non unimodulaire. On définit ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système substitutif de type Pisot soit isomorphe en mesure à un échange de morceaux dans un produit d'espace euclidien et p-adiques. On explique en quel sens ceci laisse espérer à terme l'obtention explicite de partitions de Markov pour l'extension naturelle de certains endomorphismes du tore.

Table des matières

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés fondamentales des diverses notions qui seront utilisées plus loin : substitutions, système dynamique topologique et abélianisé associés, topologies p-adiques, sous-shifts de type fini, partitions de Markov et auto-similarité, théorie spectrale.

Nous rappelons aussi les résultats déjà connus à propos de la reconnaissabilité des substitutions, de la théorie spectrale des systèmes substitutifs et de leur représentation géométrique. Cette partie bibliographique a fait l'objet d'une publication dans un ouvrage collectif *Introduction to finite automata and substitution dynamical systems*, à paraître chez Springer-Verlag.

1.1 Système dynamique topologique

Un *système dynamique topologique* est la donnée d'une application continue $T : X \mapsto X$ de l'espace métrique X compact dans lui-même. Le système dynamique est dit *minimal* si X ne possède pas de fermé invariant par T non trivial. Il est *uniquement ergodique* s'il existe une unique mesure de probabilité borélienne sur X qui est invariante par T.

Par exemple, une rotation d'angle irrationnel sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est minimale et uniquement ergodique, la mesure invariante étant la mesure de Lebesgue. Plus généralement, on a :

Proposition 1.1.1 (voir [52]) *La rotation de vecteur* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ *sur le tore* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *est minimale si et seulement si* $t_1, \ldots, t_n$ *et 1 sont rationnellement indépendants.*

Nous définirons à la section 1.4 l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des *entiers p-adiques*. Cet ensemble est naturellement muni d'une structure de groupe topologique. L'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est un système dynamique topologique minimal et uniquement ergodique.

Deux systèmes dynamiques (X_1, T_1) et (X_2, T_2) sont dits *topologiquement isomorphes* ou *topologiquement conjugués* s'il existe un homéomorphisme f de X_1 vers X_2 qui réalise une semi-conjugaison (*fait commuter*) entre T_1 et T_2, c'est-à-dire $T_1 \circ f = f \circ T_2$.

Un système dynamique (Y, T_1) est appelé *facteur topologique* de (X, T) s'il existe une application continue surjective de X dans Y qui réalise une semi-conjugaison entre T et T_1.

1.2 Système dynamique substitutif

On renvoie à [21],[28] et [75] (chapitres IV et V) pour plus de précisions sur les définitions et résultats de cette section.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$, où ε désigne le mot vide de $\mathcal{A}^*$. La longueur d'un mot fini W est notée $|W|$.

On appelle *mot infini bilatéral* tout élément w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On écrit un tel mot en le pointant entre w_{-1} et w_0, par exemple $w = \ldots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\ldots$. On note $\mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des mots infini unilatéraux indicés par les entiers strictement négatifs, et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis unilatéraux indicés par les entiers positifs ou nul.

Les ensembles $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$ sont munis du produit des topologies discrètes sur $\mathcal{A}$, et forment des ensembles de Cantor. Ces topologies sont métrisables pour la distance

$$d((w_i)_{i\in\mathbb{M}}, (v_i)_{i\in\mathbb{M}}) = \exp(-\min\{|i|;\ i \in \mathbb{M},\ w_i \neq v_i\}).$$

On appelle $\mathcal{B} = \{\, w.v\ ;\ w \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*},\ v \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}\}$ l'ensemble de tous les mots pointés pouvant être construits à partir de $\mathcal{A}$. Cet ensemble contient $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et s'injecte canoniquement dans $(\mathcal{A} \cup \{s\})^{\mathbb{Z}}$, où s est un symbole supplémentaire, en complétant tout élément de $\mathcal{B}$ qui n'est pas indicé par $\mathbb{Z}$ par le symbole s.

On dit qu'une suite w_n d'éléments de $\mathcal{B}$ converge vers $w \in \mathcal{B}$ si les images des x_n par l'injection canonique convergent dans $(\mathcal{A} \cup \{s\})^{\mathbb{Z}}$ vers l'image de w. On remarque qu'une telle définition est compatible avec la convergence dans $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$.

En particulier une suite $(w_n)_n$ de mots finis dont la longueur tend vers l'infini et tels que w_n est toujours un préfixe (respectivement suffixe) de w_{n+1}, converge vers un mot infini de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (respectivement $\mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$).

On appelle *cylindres* les ensembles :

$$[W.V] = \{(w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}};\ w_{-|W|}\ldots w_{-1}w_0\ldots w_{|V|-1} = WV\}$$

(lorsque W est vide, le cylindre est simplement noté $[V]$). Ils sont ouverts et fermés et forment une base de la topologie de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

On note S le *décalage* sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, qui à tout mot $w = (w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ associe le mot $Sw = (w_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. On appelle *point S-périodique* tout mot w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $h \geq 1$ avec $S^h(w) = w$.

Le *langage* $\mathcal{L}(w)$ d'un mot infini w est l'ensemble de tous les mots finis qui apparaissent dans w. Un élément de $\mathcal{L}(w)$ est appelé *facteur* de w.

Le *système dynamique symbolique* engendré par un mot infini bilatéral u est le couple $(\Omega(u), S)$, où $\Omega(u) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)\}$. Notons que l'ensemble $\Omega(u)$ est l'adhérence dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de l'orbite de u sous l'action de S; il est compact pour la topologie induite par celle de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et la restriction de S à $\Omega(u)$, encore notée S, est un homéomorphisme. On remarque que $\Omega(u)$ est fini si et seulement si u est un point S-périodique.

On définit de même un *système dynamique unilatéral* en se plaçant dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Le décalage S n'est alors plus injectif.

Une *substitution* est ici un morphisme σ pour la concaténation du monoïde libre $\mathcal{A}^*$, qui envoie $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^+$, et tel qu'il existe une lettre a de $\mathcal{A}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$. La substitution σ se prolonge de manière naturelle à l'ensemble des mots infinis $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par concaténation :

$$\sigma(\ldots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\ldots) = \ldots\sigma(w_{-2})\sigma(w_{-1}).\sigma(w_0)\sigma(w_1)\ldots$$

La substitution σ est dite *S-périodique* s'il existe un point périodique de σ qui soit également S-périodique.

Elle est de *longueur constante* si les images des lettres de l'alphabet contiennent le même nombre de lettres.

Un mot infini u de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un *point périodique* de σ si et seulement s'il existe un entier k non nul vérifiant $\sigma^k(u) = u$ et s'il existe une lettre c tel que tout facteur de u est facteur d'un itéré de σ sur c.

On note Ω_{per} l'ensemble des points périodiques de la substitution. Ainsi, Ω_{per} est l'ensemble des mots w de la forme $w = \lim_{n\to+\infty} \sigma^{hn}(b).\sigma^{hn}(a)$, où a et b sont deux lettres et h un entier tels que $\sigma^h(a)$ commence par a, $\sigma^h(b)$ finit par b, et ba est facteur d'un itéré de σ sur une lettre de l'alphabet.

Une substitution σ est dite *primitive* s'il existe un entier naturel h tel que $\sigma^h(a)$ contient une occurrence de b pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{A}^2$. Si σ est primitive, Ω_{per} est fini et non vide. Soit u un point périodique d'une substitution primitive σ, alors $\Omega(u)$ ne dépend pas de u : on le note Ω, et (Ω, S) est appelé le *système dynamique symbolique* engendré par σ. De même $\mathcal{L}(u)$ ne dépend pas de u, on le note alors $\mathcal{L}(\Omega)$. Si la substitution σ est primitive, le système (Ω, S) est *minimal* : il ne possède pas de fermé invariant par S non trivial.

De plus, ce système est uniquement ergodique : l'unique mesure de probabilité sur Ω qui est invariante par le décalage est notée μ_Ω. Si $[u.v]$ est un cylindre de Ω, $\mu_\Omega[u.v]$ est la fréquence d'apparition du mot fini uv dans n'importe quel élément de Ω.

Le *système dynamique symbolique unilatéral* possède des propriétés similaires, si ce n'est que le décalage S n'est pas une bijection sur cet ensemble. Dans la suite, nous allons nous intéresser à des systèmes bilatéraux, et non pas des systèmes unilatéraux comme le font la plupart des auteurs. La projection canonique du système bilatéral sur le système unilatéral étant injective sauf sur un ensemble dénombrable où elle est finie-à-un (voir [75], théorème V.21), les résultats obtenus seront pour la plupart valables pour les deux systèmes.

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à des substitutions primitive et non S-périodiques.

Les substitutions interviennent dans de nombreux domaines tels que la théorie ergodique, la géométrie (fractal, pavages), la théorie des langages formels et automates (DOL systèmes, complexité des langages, reconnaissabilité des langages) l'arithmétique (systèmes de numération), la théorie des nombres (transcendance et séries formelles), la physique théorique (opérateurs de Schrödinger discret et quasi-cristaux) et la logique. On trouvera dans [3, 28] une description complète de ces interactions.

Nous allons nous concentrer sur l'étude ergodique et géométrique des systèmes substitutifs. Nous ferons pour cela appel à des notions géométriques, combinatoires, arithmétiques et de théorie des nombres.

1.3 Abélianisé des substitutions primitives

Si σ est une substitution primitive sur d lettres, on note $\mathbf{M}_\sigma$ la *matrice d'incidence de* σ, dont le coefficient (i, j) est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$. Pour tout mot fini W, on note $\mathbf{l}(W) \in \mathbb{N}^d$ le vecteur ayant pour j-ième coefficient le nombre d'occurrences de la lettre j dans W. La matrice $\mathbf{M}_\sigma$ représente en fait l'application linéaire abélianisée associée à σ :

$$\forall W \in \mathcal{A}^* \qquad \mathbf{l}(\sigma(W)) = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{l}(W). \tag{1.1}$$

Une matrice est dite *primitive* s'il existe une puissance de cette matrice dont les coefficients sont tous positifs. La formule (1.1) signifie que la substitution σ est primitive si et seulement sa matrice d'incidence est primitive. Le théorème de Perron-Frobenius implique que $\mathbf{M}_\sigma$ admet alors une valeur propre dominante simple, qui est réelle positive, et un vecteur propre associé à cette valeur propre à coefficients positifs.

On note $\alpha = \alpha_1$ la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$. Cette valeur propre est réelle. On note $\alpha_2, \ldots \alpha_r$ les autres valeurs propres réelles de la substitution. Les valeurs propres complexes sont notées $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$, $\alpha_{r+s+1} = \overline{\alpha_{r+1}}$, $\ldots$, $\alpha_{r+2s} = \overline{\alpha_{r+s}}$. Ces valeurs propres sont comptées avec multiplicité. On a donc $r+2s = d$. On note $\mathbb{K}_k$ le plus petit corps complet contenant α_k, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ si $1 \leq k \leq r$ et $\mathbb{C}$ si $k > r$.

On a déjà rappelé que la mesure d'un cylindre $[i]$ de Ω est égale à la fréquence d'apparition de la lettre i dans n'importe quel mot w du système Ω, c'est-à-dire $\mu_\Omega[i] = \lim 1/2n \operatorname{card} \{-n < k < n;\, w_k = i\}$. En choisissant pour w un point périodique de la substitution, on en déduit (voir [75]) que le vecteur constitué de ces mesures de cylindres est un vecteur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ pour sa valeur propre dominante α :

$$\text{Soit } \mathbf{u} = (\mu_\Omega[i])_{i \leq d}. \quad \text{Alors } \mathbf{M}_\sigma \mathbf{u} = \alpha\, \mathbf{u}.$$

La substitution σ est dite *unimodulaire* si le déterminant de $\mathbf{M}_\sigma$ est de module 1.

1.3.1 Substitutions de type Pisot

On dit que la substitution est *de type Pisot* lorsque les valeurs propres sont toutes non nulles et de module différent de 1, et que seule la valeur propre dominante est de module supérieur à 1. En particulier, cette valeur propre dominante est un *nombre de Pisot*, c'est-à-dire que tous ses conjugués algébriques sont de module strictement inférieur à 1. On montre dans la proposition 1.3.1 que ces conjugués algébriques consistent en l'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$, c'est-à-dire que le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ est le polynôme minimal de chacune de ses valeurs propres.

Proposition 1.3.1 *Soit σ une substitution primitive de type Pisot et $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$. Alors $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

En particulier, σ ne peut être de longueur constante, les racines de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ sont toutes simples, et la matrice M_σ est diagonalisable à valeurs propres simples.

Preuve Selon le lemme de Gauss, $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il l'est sur $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe deux polynômes Q et R à coefficients entiers tels que $\chi_{\mathbf{M}_\sigma} = QR$. Alors Q et R ont chacun au moins une racine de module supérieur ou égal à 1, et la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a deux valeurs propres de module supérieur ou égal à un, ce qui est contraire à la définition du type Pisot.

Si σ est de longueur constante l, alors l est valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ pour le vecteur propre $(1, \ldots, 1)$ et $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est réductible sur $\mathbb{Q}$. ∎

Dans [42], C. Holton and L. Zamboni étudient le rang d'une représentation unidimensionnelle de l'orbite du point fixe d'une substitution et en déduisent qu'une substitution de type Pisot ne peut pas être S-périodique :

Proposition 1.3.2 (Holton, Zamboni [42]) *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence a une valeur propre de module strictement inférieur à 1. Alors aucun point fixe u de σ n'est S-périodique.*

La théorie des matrices positives a pour conséquence qu'une matrice de type Pisot est toujours primitive :

Proposition 1.3.3 ([17]) *Soit σ une substitution de type Pisot. Alors σ est primitive.*

Ainsi, lorsque nous considèrerons une substitution de type Pisot, nous n'aurons pas a supposer qu'elles sont primitives comme on le fait généralement pour étudier un système substitutif.

1.3.2 Bases algébriquement normalisées

Nous allons nous intéresser plus généralement aux substitutions telles que le polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Les valeurs propres sont alors toutes distinctes et algébriquement conjuguées entre elles. De plus, le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est une extension galoisienne sur $\mathbb{Q}$. Il existe ainsi pour tout $i \leq d$, au moins un $\mathbb{Q}$-automorphisme τ_i du corps $\mathbb{K}$ qui envoie α_1 sur son conjugué algébrique α_i. Il peut en exister plusieurs, mais ils se restreignent tous sur $\mathbf{Q}(\alpha)$ à l'unique homomorphisme de corps canonique de $\mathbf{Q}(\alpha)$ dans $\mathbf{Q}(\alpha_i)$. Pour $r < k \leq r+s$, les valeurs propres α_k et α_{k+s} sont conjuguées dans le plan complexe. On peut ainsi choisir pour τ_{k+s} l'automorphisme $\overline{\tau_k}$:

$$\forall\, r < k \leq r+s, \quad \tau_{k+s} = \overline{\tau_k}.$$

On étend à $\mathbb{K}^d$, en les notant de la même manière, la définition des automorphismes τ_i.

On dit que des vecteurs de $\mathbb{K}^d$ $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d}$, avec $\mathbf{e}_i \in \mathbf{Q}(\alpha_i)^d$ pour tout $i \leq d$, sont *algébriquement normalisés* si pour tout $i \leq d$ on a $\mathbf{e_i} = \tau_i(\mathbf{e_1})$. Cette définition est indépendante de l'automorphisme de corps τ_i choisi.

Les coordonnées d'un vecteur rationnel dans une telle base sont reliées par les automorphismes τ_i. En particulier, on a la propriété suivante, qui sera utilisée au chapitre 3 pour étudier les facteurs toriques des systèmes substitutifs primitifs de type Pisot.

Propriété 1.3.1 *La décomposition d'un vecteur rationnel non nul dans une base algébriquement normalisée a tous ses coefficients non nuls.*

Preuve Soit $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d}$ une base algébriquement normalisée et $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^d$, de décomposition $\mathbf{v} = \sum_1^d a_i\, \mathbf{e_i}$, avec $a_i \in \mathbb{K}$. En appliquant un automorphisme τ_j à cette décomposition, on obtient $\mathbf{v} = \sum_1^d \tau_j(a_i)\, \tau_j(\mathbf{e_i})$. Ainsi, $\tau_j(a_1)$ est la coordonnée de $\mathbf{v}$ selon $\mathbf{e_j}$, c'est-à-dire $\tau_j(a_1) = a_j$. Si un des coefficients a_j est nul, ils le sont donc tous, et $\mathbf{v}$ est nul. ■

1.3.3 Bases de vecteurs propres algébriquement normalisées

Tout vecteur propre à droite $\mathbf{u}$ pour la valeur propre α_1 vérifie $(\mathbf{M}_\sigma - \alpha_1 I)\mathbf{u} = 0$. Ce système a des solutions dans le corps $\mathbb{Q}(\alpha_1)$. Ainsi, il existe un vecteur $\mathbf{u_1} \neq 0$ tel que

$$\mathbf{M}_\sigma \mathbf{u_1} = \alpha_1\, \mathbf{u_1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u_1} \in \mathbb{Q}(\alpha_1)^d.$$

On pose $\mathbf{u_i} = \tau_i(\mathbf{u_1})$. Par construction, on a pour tout k, $\mathbf{M}_\sigma \mathbf{u_k} = \alpha_k\, \mathbf{u_k}$. Ainsi, $\mathbf{u_1}, \ldots \mathbf{u_d}$ est une famille de vecteurs propres à droite algébriquement normalisée.

Soit $<, >$ le produit scalaire défini dans $\mathbb{C}^d$ par $< \mathbf{e}, \mathbf{f} >= {}^t\overline{\mathbf{e}}\,\mathbf{f}$.

Des résultats classiques d'algèbre linéaire affirment que $\mathbf{u_1}$ est orthogonal aux vecteurs propres à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ pour les valeurs propres distinctes de α_1. Puisque $\mathbf{M}_\sigma$ est diagonalisable, ceci implique que $\mathbf{u_1}$ ne peut pas être orthogonal aux vecteurs propres à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ pour la valeur propre α_1. Ainsi, il existe un vecteur $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$ tel que

$${}^t\mathbf{v_1}\mathbf{M}_\sigma = \alpha_1\, {}^t\mathbf{v_1} \quad \text{et} \quad < \mathbf{u_1}, \mathbf{v_1} >= 1 \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{v_1} \in \mathbb{Q}(\alpha_1)^d.$$

On pose $\mathbf{v_k} = \tau_i(\mathbf{v_1})$. Par construction, on a ${}^t\mathbf{v_k}\mathbf{M}_\sigma = \alpha_k\, {}^t\mathbf{v_k}$. Ainsi $\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_d}$ est une famille de vecteurs propres à gauche algébriquement normalisée.

De plus, ces vecteurs vérifient la relation

$$\begin{array}{llllll} \forall\, i,j \leq d, & {}^t\mathbf{v_j}\,\mathbf{u_i} & = & <\overline{\mathbf{v_j}}, \mathbf{u_i}> & = & 1 \quad \text{si } i=j, \\ & & & & = & 0 \quad \text{sinon;} \\ \forall\, i \leq d, \forall\, r < j \leq d, & {}^t\overline{\mathbf{v_j}}\,\mathbf{u_i} & = & <\mathbf{v_j}, \mathbf{u_i}> & = & 0. \end{array} \tag{1.2}$$

Or, par construction, les restrictions des automorphismes τ_{r+i} et τ_{r+s+i} à $\mathbf{Q}(\alpha)$ sont conjuguées : puisque $\alpha_{r+i} = \overline{\alpha_{r+s+i}}$, la relation suivante est vraie pour tout $z \in \mathbf{Q}(\alpha)$: $\tau_{r+i}(z) = \overline{\tau_{r+s+i}(z)}$. On en déduit

$$\forall\, i \leq s, \quad \mathbf{v_{r+i}} = \overline{\mathbf{v_{r+s+i}}}.$$

Les vecteurs $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}, \overline{\mathbf{v_{r+1}}}, \ldots, \overline{\mathbf{v_d}}$, c'est-à-dire $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}, \mathbf{v_{r+s+1}}, \ldots, \mathbf{v_{r+2s}}, \mathbf{v_{r+1}}, \ldots, \mathbf{v_{r+s}}$, forment donc la base duale de $\mathbf{u_1}, \ldots \mathbf{u_d}$ dans le sens suivant :

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} <\overline{\mathbf{v_k}}, \mathbf{x}> \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^{d} <\mathbf{x}, \mathbf{v_k}> \mathbf{u}_k.$$

Ces vecteurs seront à la base de la représentation géométrique des substitutions primitives définie dans le chapitre 3 et étudiée dans les chapitres suivants.

1.4 Topologies p-adiques

On se référera à [4, 12, 36, 79] pour des détails sur cette section.

1.4.1 Nombres p-adiques

La *valeur absolue p-adique* est définie sur $\mathbb{Q}$ par $|z|_p = p^{-v_p(z)}$, où $v_p(z)$ est la plus grande puissance de p qui apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de z. Cette valeur absolue est *ultramétrique.*

Le *corps des nombres p-adiques* $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique. L'*anneau des entiers p-adiques* $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p$. Les valuation et valeur absolue p-adique se prolongent sur $\mathbb{Q}_p$ et sont notées de la même manière. Une conséquence du caractère ultramétrique de la valeur absolue est qu'une série est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si son terme général tend vers zéro. Topologiquement, $\mathbb{Z}_p$ est la boule unité fermée de $\mathbb{Q}_p$. Une base de la topologie de $\mathbb{Q}_p$ est formée des boules ouvertes et fermées $z + p^k\mathbb{Z}_p$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{Q}_p$. De plus, $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$.

L'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques peut aussi être obtenu comme la *limite projective* des groupes finis $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Plus précisément, pour $i \leq j$ si p_j^i désigne la projection canonique de $\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, on a

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}};\ a_i \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\ \ \forall j \geq i,\ p_j^i(a_j) = a_i\}.$$

On obtient ainsi un développement des éléments de $\mathbb{Q}_p$ par rapport à la suite de référence $(p^i)_i$, équivalent au développement décimal dans $\mathbb{R}$. Ce développement est appelé *développement de Hensel* :

$$\forall\, z \in \mathbb{Q}_p,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{Z},\ \exists\, (a_i)_{i \geq n_0} \in \{0, \ldots, p-1\},\ \ z = \sum_{i \geq n_0} a_i\, p^i.$$

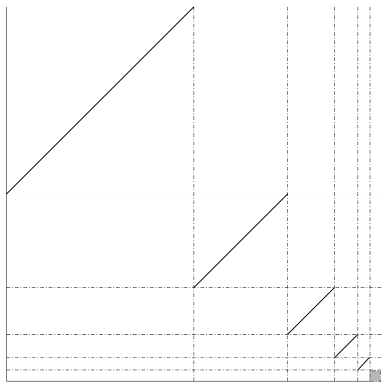

FIG. 1.1 – Représentation graphique de l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_2$

Le coefficient n_0 est positif si et seulement si $x \in \mathbb{Z}_p$.

Ce développement de Hensel établit une conjugaison topologique entre l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ et l'*odomètre* consistant en l'espace symbolique $\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ muni de l'application dite de passage au successeur (voir [37]).

On remarque en particulier que les ouverts-fermés $z + p^k\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}_p$ s'envoient sur les cylindres de $\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$. La mesure qui sera définie à la proposition 1.4.1 (voir section suivante) s'interprète simplement comme la préimage de la mesure de Bernoulli sur $\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}}$.

Enfin, le développement de Hensel permet d'envoyer $\mathbb{Z}_p$ dans l'ensemble $[0, 1]$ par l'application

$$\sum_{i \geq 0} \epsilon_i p^i \in \mathbb{Z}_p \mapsto \sum_{i \geq 0} \epsilon_i p^{-i-1} \in [0, 1].$$

Cette application conserve la mesure, propriété que nous utiliserons dans les parties 6 et 7 pour obtenir des informations sur la mesure de sous-ensembles de $\mathbb{Z}_2$.

Par contre, cette application n'est pas un homéomorphisme : on remarque qu'elle est continue mais n'est pas injective sur les réels dont le développement en base p est fini. L'absence d'homéomorphisme est cohérente dans la mesure où $\mathbb{Z}_p$ est totalement discontinu tandis que $[0, 1]$ est connexe.

Via cette application, l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est conjuguée en mesure à l'application suivante add_p sur $[0, 1]$, dont la représentation graphique est donnée à la figure 1.1 dans le cas où $p = 2$:

$$\begin{aligned} \forall k > 0, \qquad \text{si} \quad & 0 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}} \leq z < \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^k} \\ \text{alors} \quad & add_p(z) = z + \frac{1}{p^k} - \left(0 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Si n est un entier positif, la définition par limite projective amène naturellement à définir l'ensemble des *entiers n-adiques* $\mathbb{Z}_n$ comme le produit direct des $\mathbb{Z}_p$ pour tous les p premiers qui divisent n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}_n = \prod_{p|n,\, p \text{ premier}} \mathbb{Z}_p.$$

1.4.2 Complétés ultramétriques des corps de nombres

Un *corps de nombre* $\mathbb{K}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ son *anneau des entiers*. Cette anneau est un *anneau de Dedeking*. Plus précisément, Tout *idéal fractionnaire* $\mathcal{J}$ de $\mathbb{K}$ – c'est-à-dire toute partie de $\mathbb{K}$ pour laquelle il existe $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ tel que $z\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ – se décompose de manière unique sous la forme d'un produit fini de puissances d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$:

$$\mathcal{J} = \prod_{\mathcal{I} \text{ idéal premier de } \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \mathcal{I}^{n_{\mathcal{I}}} \qquad n_{\mathcal{I}} \in \mathbb{Z} \quad \text{presque tous nuls.}$$

Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier, pour tout $z \in \mathbb{K}$, la puissance de $\mathcal{I}$ dans la décomposition de $z\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est notée $v_{\mathcal{I}}(z)$. La valeur absolue $\mathcal{I}$-adique sur $\mathbb{K}$ est définie par $|z|_{\mathcal{I}} = f(\mathcal{I})^{-v_{\mathcal{I}}(z)}$, où $f(\mathcal{I}) = \mathrm{card}\,(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est le *degré résiduel de $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}$*.

Sur un corps de nombre $\mathbb{K}$, le théorème d'Ostrowski dit qu'il n'existe que deux classes de valeurs absolues :

- Les valeurs absolues archimédiennes – dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est la valeur absolue usuelle – qui sont de la forme $|z| = |\tau(z)|_{\mathbb{C}}$, où τ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$.
- Les valeurs absolues non archimédiennes, qui sont exactement les valeurs absolues $\mathcal{I}$-adiques pour tous les idéaux $\mathcal{I}$ premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Par définition, le complété de $\mathbb{K}$ pour les topologies archimédiennes est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le complété de $\mathbb{K}$ pour les topologies ultramétriques vérifie les propriétés suivantes.

Un idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ rencontre $\mathbb{Z}$ selon un idéal $p\mathbb{Z}$, avec p premier. Le complété $\widetilde{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ pour la valeur absolue $\mathcal{I}$-adique est alors une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré $e(\mathcal{I})\, f(\mathcal{I})$, où $e(\mathcal{I}) = v_{\mathcal{I}}(p)$.

L'anneau des entiers $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$ de ce complété admet un seul idéal premier $\widetilde{\mathcal{I}}$, qui est principal. Soit π un générateur de cet idéal : $\widetilde{\mathcal{I}} = \pi\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Les quotients de $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ par $\widetilde{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{I}$ sont alors identiques :

$$\forall\, n \geq 0 \quad \mathrm{card}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{\pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}\right) = \mathrm{card}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{\widetilde{\mathcal{I}}^n}\right) = \mathrm{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\mathcal{I}^n}\right) = f(\mathcal{I})^n.$$

Une base d'ouverts fermés de $\widetilde{\mathbb{K}}$ est formée des ensembles $z + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, pour $z \in \widetilde{\mathbb{K}}$ et $n \in \mathbb{N}$. A n fixé, ces ensembles sont disjoints ou égaux, et par définition de q, exactement au nombre de q^n. Ceci permet de définir une mesure sur $\widetilde{\mathbb{K}}$:

Propriété 1.4.1 *Soit $\mu_{\mathcal{I}}$ l'unique mesure sur $\widetilde{\mathbb{K}}$ qui vérifie*

$$\forall\, z \in \widetilde{\mathbb{K}}, \quad \forall\, n \geq 0, \qquad \mu_{\mathcal{I}}(z + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}) = 1/f(\mathcal{I})^n.$$

Alors $\mu_{\mathcal{I}}$ est la mesure de Haar sur $\widetilde{\mathbb{K}}$: elle est invariante par translation, vaut 1 sur $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, et vérifie la relation suivante pour tout borélien X de $\widetilde{\mathbb{K}}$:

$$\forall\, z \in \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}, \quad \mu_{\mathcal{I}}(z\, X) = \left(card\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{z\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}\right)\right)^{-1} \mu_{\mathcal{I}}(X). \tag{1.3}$$

Preuve L'invariance par translation de $\mu_{\mathcal{I}}$ découle directement de la définition de $\mu_{\mathcal{I}}$ sur les ouverts-fermés $z + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, de même que la mesure de $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. La formule (1.3) est vrai si elle est vérifiée pour les boréliens de la forme $X = z_0 + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Soit $z \in \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Comme $z\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$ est un idéal de $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$ et $\widetilde{\mathcal{I}}$ l'unique idéal premier de $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, il existe un entier k tel que $z\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} = \widetilde{\mathcal{I}}^k = \pi^k\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Le nombre $z_1 = z/\pi^k$ est ainsi inversible dans $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, autrement dit : $z_1\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} = \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Ceci implique l'égalité entre les ensembles : $z\,(z_0 + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}) = z_1 z_0 \pi^k + \pi^{k+n} z_1\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} = z_1 z_0 \pi^k + \pi^{k+n}\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. On en déduit :

$$\mu_{\mathcal{I}}(z\,(z_0 + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}})) = 1/f(\mathcal{I})^{k+n} = 1/f(\mathcal{I})^k\, 1/f(\mathcal{I})^n = 1/f(\mathcal{I})^k\, \mu_{\mathcal{I}}(z_0 + \pi^n\, \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}).$$

On conclut en rappelant que

$$f(\mathcal{I})^k = \mathrm{card}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{\pi^k\,\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}\right) = \mathrm{card}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{\pi^k\,z_1\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}\right) = \mathrm{card}\left(\frac{\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}{z\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}}\right).$$

■

En particulier, l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est uniquement ergodique.

1.5 Système dynamique symbolique de type fini, partition de Markov et auto-similarité

1.5.1 Systèmes dynamiques symboliques de type fini

Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble de *sommets* ou *états* $\mathcal{V}$ et d'un ensemble d'*arêtes* ou *transitions* $\mathcal{E}$, c'est-à-dire d'éléments de $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$. Si (i,t) est une arête, i en est le *sommet initial* et t le *sommet terminal*. Deux sommets peuvent être reliés par plusieurs arêtes.

La *matrice d'adjacence* d'un graphe $\mathcal{G}$ a pour taille le cardinal de $\mathcal{V}$. Si $i,t\in\mathcal{V}^2$, son coefficient d'indice i,t est le nombre d'arêtes qui relient i à t. Un graphe est ainsi uniquement déterminé par sa matrice d'adjacence.

Si une matrice $\mathbf{A}$ est à coefficients dans $\{0,1\}$, le *système dynamique symbolique bilatéral* associé à un graphe $\mathcal{G}$ de matrice d'adjacence $\mathbf{A}$ est l'ensemble des chemins bi-infinis du graphe $\mathcal{G}$ suivant, qui est bien fermé donc compact et invariant par le décalage de $\mathcal{V}^{\mathbb{Z}}$:

$$X_{\mathcal{G}} = X_{\mathbf{A}} = \{(s_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{V}^{\mathbb{Z}};\ \forall\, i\in\mathbb{Z},\ (s_i,s_{i+1})\in\mathcal{E}\}.$$

Deux sommets pouvant être reliés par une arête au plus, il n'y a pas d'ambiguité dans cette définition.

Le *système dynamique symbolique unilatéral* est l'ensemble des chemins infinis à droite de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire indexés par $\mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{B}$ un ensemble fini. Une partie X de $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ est un *système dynamique symbolique de type fini bilatéral* ou *sous-shift de type fini bilatéral* si et seulement s'il existe un ensemble fini $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}^*$ de mots finis sur $\mathcal{B}$ tels que X est l'ensemble des mots de $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ qui n'admettent aucun élément de $\mathcal{M}$ pour facteur. Muni du décalage et de la topologie de $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$, un système dynamique symbolique de type fini est un système dynamique symbolique, puisque compact et invariant par le décalage. On définit de même un *système dynamique symbolique de type fini unilatéral.*

Les systèmes dynamiques symboliques de type fini pour lesquels les mots interdits sont de longueur 2 sont exactement les systèmes dynamiques symboliques associés à un graphe fini dont la matrice d'adjacence est à coefficients dans $\{0,1\}$. Plus généralement, on peut toujours décrire un système dynamique symbolique de type fini à l'aide d'un graphe ou d'une matrice (voir [58]). Dorénavant, on assimilera les systèmes dynamiques symboliques de type fini et les systèmes dynamiques associés à un graphe.

Un *automate* ou *graphe étiqueté* par un ensemble $\mathcal{B}$ consiste en la donné d'un graphe $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ et d'une application d'étiquetage des arêtes $t:\mathcal{E}\mapsto\mathcal{B}$.

La *composante connexe d'un ensemble d'états* $\mathcal{V}$ dans un automate est le sous-automate ayant pour états ceux qui appartiennent à un chemin infini partant d'un état de $\mathcal{V}$.

Une partie de $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ est appelé *système sofique* (bilatéral ou unilatéral) s'il s'agit de l'ensemble des étiquettes des chemins (bi-infinis ou infinis) d'un automate. Muni du décalage et de la topologie de $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ ou $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, il s'agit encore d'un système dynamique symbolique.

On montre que les systèmes sofiques sont exactement les facteurs topologiques des systèmes symboliques de type fini (voir [58]).

Les systèmes dynamiques symboliques de type finis ne sont pas uniquement ergodiques : il existe une infinité de mesures de probabilité invariantes par le décalage. Certaines de ces mesures sont obtenues par exemple à partir de matrices *stochastiques* $\mathbf{P} = (p_{i,j})$ et d'un vecteur propre à gauche (p_i) de $\mathbf{P}$ pour la valeur propre 1 vérifiant $\sum p_i = 1$. En effet, on définit la mesure $\mu_{(\mathbf{P},(p_i))}$ définie comme suit sur les cylindres du système dynamique symbolique de type fini est une mesure de probabilité invariante par le décalage :

$$\mu_{(\mathbf{P},(p_i))}([a_0, a_1, \ldots, a_n]) = p_{a_0} p_{a_0,a_1} p_{a_1,a_2} \ldots p_{a_{n-1},a_n}.$$

Une de ces mesures se distingue des autres lorsque la matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ du système de type fini est primitive. En effet, cette matrice admet alors une valeur propre dominante simple α, et des vecteurs propres dominant à droite $\mathbf{u} = (u_i)_i$ et à gauche $\mathbf{v} = (v_i)_i$ à coefficients strictement positifs. On normalise ces vecteurs pour que $< \mathbf{v}, \mathbf{u} >= 1$. On pose $p_i = v_i\, u_i$ et $p_{i,j} = a_{i,j} u_j / (\alpha u_i)$. Alors la matrice $\mathbf{P}$ définie par $\mathbf{P} = (p_{i,j})$ est stochastique, et (p_i) en est un vecteur propre à droite pour la valeur propre 1. La mesure qui y est associée est d'*entropie maximale* (voir par exemple [92]).

1.5.2 Partitions de Markov

On se référera à [53, 81] pour plus de précisions sur les définitions de cette section.

Les partitions de Markov sont une manière de comprendre un système dynamique topologique de manière combinatoire. Ce sont des partitions d'un espace X qui permettent d'avoir une description symbolique, au moyen d'un système symbolique de type fini, de la dynamique d'une application agissant sur X, cette description préservant des propriétés telles que la périodicité et la transitivité. L'existence d'une partition de Markov permet de déduire des propriétés du système symbolique de type fini une description “quasi immédiate” de certaines propriétés dynamiques du système.

Ainsi, dans [1], Adler et Weiss montrent que l'entropie topologique est un invariant complet pour l'équivalence métrique des automorphismes ergodiques continus du tore $\mathbb{T}^2$. Leur preuve est basée sur la construction d'une partition de Markov du tore $\mathbb{T}^2$ relativement à l'automorphisme.

Plus précisément, toute matrice $\mathbf{M}$ à coefficients entiers induit naturellement un endomorphisme du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, qui est dit *hyperbolique* si et seulement si la matrice $\mathbf{M}$ n'a pas de valeur propre de module 1. L'endomorphisme est un *automorphisme* si et seulement si le déterminant de $\mathbf{M}$ est égal à ± 1. Ceci est un cas particulier de la définition générale des *difféomorphismes hyperboliques* sur laquelle nous ne nous étendrons pas ici.

En tout point z du tore, on définit naturellement une application $f_z : \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_s} \mapsto \mathbb{T}^n$, localement injective, où n_s et n_u sont les dimensions des sous-espaces stables et instables de la matrice (on a donc $n_u + n_s = n$). On obtient ainsi des coordonnées locales autour du point z relativement aux directions stables et instables.

Un *rectangle* est l'image $f_z(B_u \times B_s)$ où B_u et B_s sont des boules fermées de $\mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbb{R}^{n_s}$. La *frontière stable* d'un tel rectangle est l'ensemble $f_z(\partial B_u \times B_s)$, sa *frontière instable* est $f_z(B_u \times \partial B_s)$.

Une *partition de Markov* d'un automorphisme hyperbolique f du tore $\mathbb{T}^n$ est une partition $\Lambda = (C_i)_{i \leq k}$ finie de $\mathbb{T}^n$ en rectangles d'intérieurs disjoints telle que

- l'image par f de l'intersection d'un cylindre C_i avec un sous-espace affine dirigé par la direction stable de f est incluse dans une intersection de ce type,

– l'image par f^{-1} de l'intersection d'un cylindre C_i avec un sous-espace affine dirigé par la direction instable de f est incluse dans une intersection de ce type.

La *matrice de transition* de la partition de Markov est la matrice de taille k dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si et seulement si $f(C_i)$ rencontre l'intérieur de C_j.

Dans [14], R. Bowen a défini plus généralement les partitions de Markov pour les difféomorphismes hyperboliques, et montré que pour tout difféomorphisme hyperbolique d'une variété X, il existe une partition de Markov de X, un système dynamique symbolique de type fini bilatéral Y et une application continue, surjective et presque-partout injective de Y sur X qui conjugue f au décalage sur Y. Si f est une application non injective mais *expansive*, la conjugaison est remplacée par une semi-conjugaison définie sur un système symbolique de type fini unilatéral.

L'exemple le plus simple d'une partition de Markov est le système binaire sur le cercle : on munit le tore $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de l'action $f(z) = 2z \bmod 1$. L'application qui envoie une suite $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur le point de $[0,1[$ dont le développement binaire est z réalise une partition de Markov de X. Plus généralement, les partitions de Markov sont des généralisations du système binaire (voir [54]).

On notera que, passée la dimension 2, les partitions de Markov des automorphismes du tore sont constituées d'ensembles qui ne peuvent plus être de simples pavés : en effet, R. Bowen a montré dans [15] que pour les automorphismes hyperboliques du tore $\mathbb{T}^3$, les éléments d'une partition de Markov ont une frontière dont la dimension de Haussdorf est non entière.

1.5.3 Obtention pratique pour les endomorphismes hyperboliques du tore

Les partitions de Markov sont longtemps restées abstraites : à part pour les automorphismes linéaires du tore de dimension 2, des constructions explicites de partitions de Markov pour les automorphismes hyperboliques du tore n'ont été obtenues que récemment. Un exposé précis des divers résultats sur ce sujet est fait dans [54].

Des constructions explicites ont été obtenues pour les automorphismes du tore $\mathbb{T}^2$ et certains automorphismes du tore $\mathbb{T}^3$ [5, 10, 66].

En utilisant les β-développements définis par A. Bertrand-Mathis, B. Praggastis [74] construit des pavages qui induisent des partitions de Markov pour les automorphismes hyperboliques du tore dont la valeur propre dominante est un nombre de Pisot unimodulaire. Ces constructions sont particulièrement explicites et simples pour les automorphismes associés à la matrice compagnon d'un polynôme du type $x^n - d_1x^{n-1} - \cdots - d_n$ avec $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = 1$, du fait des propriétés qu'a le β-développement dans ces cas là, selon les travaux de C. Frougny et B. Solomyak [34].

Plus généralement, S. Leborgne [57] d'une part, R. Kenyon et A. Vershik [55] d'autre part, étudient le cas général des automorphismes du tore $\mathbb{T}^n$, en se basant sur les propriétés algébriques des valeurs propres de l'automorphisme pour définir un codage du système. Comme B. Praggastis, ces codages sont obtenus à partir de systèmes de numération en base non entière.

Ainsi, en utilisant un analogue des β-développements, S. Leborgne représente les systèmes par des systèmes sofiques.

Indépendemment, en choisissant des chiffres ou *digits* particuliers dans les développements en base non entière, R. Kenyon et A. Vershik construisent une représentation par un système dynamique symbolique de type fini. Ses propriétés géométriques sont difficilement accessibles, dans la mesure où les chiffres intervenant dans le développement sont choisis de manière purement arithmétique.

Au chapitre 5, nous montrerons que la notion de substitution permet d'associer à un automorphisme hyperbolique du tore de type Pisot et à coefficients positifs une structure combinatoire.

L'utilisation combinée de la structure algébrique sous-jacente de l'automorphisme et de la structure combinatoire de la substitution permettent de définir naturellement des chiffres qui engendrent un codage algébrique de l'automorphisme du tore. Sous certaines conditions combinatoires, on montre que ce codage induit une une partition de Markov totalement explicite.

Nous donnons ainsi une nouvelle manière de construire des partitions de Markov pour certains automorphismes du tore, en utilisant des substitutions. L'avantage de cette méthode constructive par rapport à celles déjà connues et plus générales (puisque concernant tous les automorphismes de type Pisot et pas seulement ceux à coefficients positifs) de R. Kenyon et A. Vershik ou S. Leborgne est de caractériser certaines propriétés topologiques de ces partitions de Markov (connexité, simple connexité, dimension de Haussdorf de la frontière) qui étaient difficilement accessibles par les constructions précédentes.

L'étude des endomorphismes hyperboliques du tore de déterminant distinct de ± 1, dont non bijectifs, peut-être abordée soit par une représentation par un système dynamique symbolique de type fini unilatéral, soit par la recherche d'une extension de l'endomorphisme qui serait bijective.

Suivant cette dernière approche, on dit qu'un système dynamique topologique (X, T) est l'*extension naturelle* d'un système dynamique topologique (X_1, T_1) si (X_1, T_1) est un facteur de (X, T), T est bijective et si pour tout (X_2, T_2) avec T_2 bijective telle que (X_1, T_1) est un facteur de (X_2, T_2), alors (X, T) est aussi facteur de (X_2, T_2).

Cette définition entraîne que l'extension naturelle est unique à isomorphisme près. Selon un résultat de Rohlin [78], tout système dynamique topologique admet une extension naturelle formelle.

Au chapitre 7, on expliquera en quel sens il semble possible de généraliser les résultats de cette thèse pour obtenir une partition de Markov explicite de l'extension naturelle des endomorphismes du tore de type Pisot.

1.5.4 Auto-similarité, pseudo-échanges de morceaux

Une collection Λ de compacts de $\mathbb{R}^n$ est un *pavage* d'un ensemble X qui est l'adhérence de son intérieur si et seulement si

- $X = \cup_{C \in \Lambda} C$,
- tout élément de Λ est l'adhérence de son intérieur,
- tout compact de X rencontre un nombre fini d'éléments de Λ,
- les éléments de Λ sont d'intérieurs disjoints.

Le pavage est appelé *pavage périodique de* $\mathbb{R}^n$ *modulo* $\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un réseau, si et seulement si

- $\mathbb{R}^n = \cup_{C \in \Lambda, \mathbf{x} \in \mathcal{L}} (C + \mathbf{x})$,
- pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $(C + \mathbf{x}) \cap \mathrm{Int}\, C' \neq \emptyset$ implique que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $C = C'$.

Un *pavage auto-similaire* est un pavage invariant par une application diagonale dilatante de $\mathbb{R}^n$, l'image de chaque pavé couvrant un ensemble de pavés du pavage original.

Des définitions plus précises et générales sont données dans [53] et [89].

Les travaux présentés dans cette thèse illustrent en partie la relation entre de tels pavages, la dynamique symbolique et la théorie de la représentation des nombres : un pavage auto-similaire est une partition de Markov déguisée et peut se voir comme une généralisation du système décimal, via la théorie de la représentation des nombres dans des bases non standard (voir l'exposé détaillé de R. Kenyon dans [54]).

On appelle *ensemble auto-similaire* un compact X de $\mathbb{R}^n$ qui admet une partition finie en pavés dont les translatés par un réseau forment un pavage périodique auto-similaire de $\mathbb{R}^n$.

On appelle *pseudo-échange de morceaux* d'un compact X la donnée d'une collection finie Λ de sous ensembles de X telle que de $X = \cup_{C\in\Lambda} C$ et de translations $t_C : C \mapsto X$, pour tout $C \in \Lambda$.

Si Λ est une partition de X, ou au moins si les ensembles sont d'intérieurs disjoints, et si les ensembles $t_C(C)$ forment une partition disjointe en mesure de X, le pseudo-échange de morceaux est une *translation par morceaux* ou un *échange de morceaux*, injectif au moins en mesure.

Remarquons que si les ensembles ne sont pas disjoints, on ne peut pas définir globalement un système dynamique sur X. On peut seulement définir des applications partielles qui engendrent un pseudo-groupe de translation, d'où le préfixe pseudo dans le terme pseudo-échange de morceaux.

Au chapitre 3, nous allons associer à une substitution primitive unimodulaire de type Pisot un compact d'un espace euclidien sur lequel est défini naturellement un pseudo-échange de morceaux. On déduira des propriétés d'auto-similarité du compact une condition suffisante pour que le pseudo-échange de morceaux soit un échange de morceaux. Le compact sera alors un ensemble auto-similaire.

1.6 Reconnaissabilité des substitutions

Soit σ une substitution primitive admettant un point fixe u. On a ainsi $u = \sigma(u)$. On note E_1 l'ensemble de longueurs suivant

$$E_1 = \{0\} \cup \{|\sigma(u_0 \dots u_{p-1})|, |\sigma(u_{-p} \dots u_{-1})|;\, p > 0\}.$$

Puisque $u = \sigma(u)$, pour tout facteur $W = u_i \dots u_{i+|W|-1}$ de u, il existe un rang j, une longueur l, un suffixe S de $\sigma(x_j)$ et un préfixe P de $\sigma(x_{j+l+1})$ tels que $W = S\sigma(u_{j+1}) \dots \sigma(u_{j+l})P$, et tels que $E_1 \cap \{i, \dots, i + |W| - 1\} = (k - i) + E_1 \cap \{k, \dots, k + |W| - 1\}$, avec $k = |\sigma(u_0 \dots u_j)| - |S|$ ce qui signifie que le découpage de u par rapport à σ est identique aux rangs i et k.

On dit que $[S, \sigma(u_{j+1}), \dots, \sigma(u_{j+l}), P]$ est un *1-découpage au rang* i de W, et que W provient du mot $u_j \dots u_{j+l+1}$, qui sera appelé *mot de provenance* de W.

Le facteur W apparaissant une infinité de fois dans la suite u, la question de l'unicité du 1-découpage de W s'est naturellement posée.

Dans [64], J. C. Martin appelle *déterminées à l'ordre 1* les substitutions pour lesquelles tout facteur suffisamment long admet un 1-découpage et des mots de provenance indépendants de son rang d'apparition. L'auteur affirme que toute substitution sur deux lettres non S-périodique est déterminée à l'ordre 1. Sa démonstration n'est pas convaincante.

B. Host [45] et M. Queffelec [75] introduisent plus tard une notion plus faible de *substitution reconnaissable*, pour lesquelles le 1-découpage d'un mot suffisamment long ne dépend pas de ses rangs d'apparition, sauf éventuellement sur un suffixe du mot de longueur bornée. Plus précisément, la substitution σ est dite *unilatéralement reconnaissable* s'il existe un entier $L > 0$ tel que si $u_i \dots u_{i+L-1} = u_j \dots u_{j+L-1}$ avec $i \in E_1$ alors $j \in E_1$.

B. Host montre dans [45] que cette propriété est équivalente au fait que l'image $\sigma(\Omega)$ par σ du système substitutif Ω associé à σ est ouverte. Rauzy a annoncé avoir une courte démonstration du fait qu'une substitution de longueur constante, injective sur les lettres, et non S-périodique, est unilatéralement reconnaissable [75]. La question restait en suspend pour les substitutions de longueur non constante.

Dans [71], B. Mossé généralise le cas où la substitution est de longueur constante en caractérisant les substitutions unilatéralement reconnaissables. Toutes ne le sont pas : une condition suffisante de non reconnaissabilité est par exemple que pour tout couple de lettres distinctes (a, b), $\sigma(a)$ est un suffixe strict de $\sigma(b)$ ou inversement. Ainsi, la substitution définie par $\sigma(1) = 1112$ et $\sigma(2) = 12$ n'est pas reconnaissable.

Pour obtenir un résultat général de reconnaissabilité, B. Mossé introduit alors une nouvelle notion de substitution reconnaissable, pour lesquelles le 1-découpage d'un mot suffisamment long ne dépend pas de ses rangs d'apparition, sauf éventuellement sur un suffixe et un préfixe du mot de longueur bornée. Plus précisément, une substitution σ est dite *bilatéralement reconnaissable* s'il existe un entier $L > 0$ tel que si $u_{i-L} \dots u_{i+L} = u_{j-L} \dots u_{j+L}$ avec $i \in E_1$ alors $j \in E_1$.

Il s'agit de la bonne notion de reconnaissabilité, ainsi que le montre le théorème suivant :

Théorème 1.6.1 (Mossé [71, 72]) *Soit σ une substitution primitive admettant un point fixe non périodique u. La substitution σ est bilatéralement reconnaissable et la provenance des facteurs du point fixe u est unique sauf aux extrémités : il existe $L > 0$ tel que si $u_{i-L} \dots u_{j+L} = u_{i'-L} \dots u_{j'+L}$, alors $u_i \dots u_j$ et $u_{i'} \dots u_{j'}$ ont le même 1-découpage et proviennent du même mot aux rangs i et i'.*

Ainsi, dès qu'une substitution est primitive, on peut toujours "désubstituer" les facteurs du point fixe, sauf peut-être ses bords.

Notons en particulier que selon le lemme 1.3.2, lorsqu'on considérera une substitution de type Pisot, il suffira de vérifier le critère de primitivité pour qu'elle soit bilatéralement reconnaissable.

Si maintenant σ est une substitution primitive non S-périodique, σ n'admet pas nécessairement un point fixe mais au moins un point périodique. Une puissance de σ est donc bilatéralement reconnaissable. Les systèmes substitutifs engendrés par σ et ses itérés étant identiques, on déduit du théorème 1.6.1 que tout mot du système bilatère se "désubstitue" en un unique mot :

Corollaire 1.6.1 *Soit σ une substitution primitive non S-périodique et Ω le système substitutif engendré par σ. Alors*

$$\forall w \in \Omega,\ \exists\, v \in \Omega,\ v\ \textit{unique};\quad w = S^k\sigma(v) \quad \textit{et} \quad 0 \le k < |\sigma(v_0)|\,.$$

Autrement dit, tout mot w de Ω peut-être découpé de manière unique sous la forme suivante :

$$w = \dots \mid \underbrace{\dots}_{\sigma(v_{-1})} \mid \underbrace{w_{-k} \dots w_{-1}.w_0 \dots w_l}_{\sigma(v_0)} \mid \underbrace{\dots}_{\sigma(v_1)} \mid \underbrace{\dots}_{\sigma(v_2)} \mid \dots$$

le mot $v = \dots v_{-n} \dots v_{-1} v_0 v_1 \dots v_n \dots$ appartenant à Ω.

Cette propriété justifie le choix de travailler avec le système bilatéral plutôt qu'avec l'unilatéral. En effet, un résultat similaire au corollaire 1.6.1 mais portant sur le système unilatéral n'est vrai que si la substitution est unilatéralement reconnaissable, ce qui n'est pas toujours le cas.

Dans [77], G. Rauzy se base sur un énoncé semblable au corollaire 1.6.1 pour associer à toute substitution primitive un *automate des suffixes* permettant de représenter par un système sofique le système substitutif unilatéral associé à la substitution. Or, non seulement le corollaire 1.6.1 n'est pas toujours vérifié, mais les résultats annoncés nécessitent le fait que le système sofique représentant le système substitutif soit de type fini.

Au chapitre 2, nous montrons comment le fait de considérer le système substitutif bilatéral permet, en modifiant l'automate des suffixes, de définir un *automate des préfixes-suffixes* associé à un système qui, plus que sofique, est de type fini. On peut ainsi, au chapitre 3, faire aboutir dans le cas général les méthodes exposées dans [77].

1.7 Théorie spectrale

1.7.1 Système dynamique mesuré

Un *système dynamique mesuré* est la donnée de (X, μ, T) μ est une mesure de probabilité définie sur X , $T : X \mapsto X$ est mesurable et préserve μ.

En particulier, un système dynamique topologique (X, T) uniquement ergodique est un système dynamique mesuré pour l'unique mesure de probabilité invariante sur la σ-algèbre des boréliens de X. C'est par exemple le cas du système symbolique associé à une substitution primitive non S-périodique.

Deux systèmes mesurés (X_1, μ_1, T_1) et (X_2, μ_2, T_2) sont dits *isomorphes en mesure*, *métriquement isomorphes* ou encore *conjugué en mesure* si et seulement s'il existe une application mesurable $f : X_1 \mapsto X_2$, bijective en mesure, dont l'application réciproque est mesurable, qui réalise une semi-conjugaison entre T_1 et T_2, et telle que μ_2 est la *mesure image* $f_*\mu_1$ de μ_1 par f, c'est-à-dire pour tout $B \subset X_2$ mesurable, $\mu_1(f^{-1}(B)) = \mu_2(B)$.

Etant donné un système dynamique mesuré (X, μ, T), on appelle *opérateur unitaire induit* l'application U_T suivante :

$$\begin{array}{rccc} U_T : & L^2(X, \mu) & \mapsto & L^2(X, \mu) \\ & f & \mapsto & f \circ T. \end{array} \tag{1.4}$$

L'application U_T est une isométrie, puisque T préserve la mesure. Les *valeurs propres* de (X, μ, T) sont par définition celles de U_T. Le *spectre discret* du système dynamique (X, μ, T) est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur U_T. Il est inclus dans le cercle unité.

Les *fonctions propres* de (X, μ, T) sont les vecteurs propres de U_T.

Par exemple, le spectre discret de l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est $\{e^{2i\pi\, k/p^n};\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Le spectre discret de la rotation d'angle α irrationnel sur le tore $\mathbb{T}$ est $\{e^{2i\pi\, k\alpha};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Plus généralement, le spectre discret de la rotation d'angle $(t_1, \dots t_n)$ sur le tore $\mathbb{T}^n$ est $\{e^{2i\pi\, \sum k_j t_j};\ k_j \in \mathbb{Z}\}$.

Le système est dit *à spectre discret* si $L^2(X, \mu)$ a une base hilbertienne de fonctions propres, ou encore si les fonctions propres engendrent un sous-espace vectoriel dense dans $L^2(X, \mu)$. Si le spectre discret ne contient que la valeur propre 1 avec multiplicité 1, le système est dit *faiblement mélangeant*. On dit que le spectre *a une composante continue* ou que le système est *à spectre partiellement continu* si le système n'est ni à spectre discret ni faiblement mélangeant.

Un système dynamique mesuré est dit *ergodique* si tout ensemble mesurable invariant est de mesure 0 ou 1. Ceci équivaut au fait que son opérateur unitaire induit admet 1 pour valeur propre simple. Les valeurs propres sont alors toutes simples et le spectre est un sous-groupe du cercle unité. Les fonctions propres sont de module constant [38].

Un théorème de Von Neumann affirme que deux transformations inversibles et ergodiques qui ont même spectre et sont à spectre discret sont métriquement isomorphes. Plus précisément, un système ergodique dont le spectre est discret est isomorphe en mesure à une rotation sur un groupe compact abélien muni de la mesure de Haar [38]. Ces rotations sont des produits de rotations toriques, d'addition sur les groupes p- adiques $\mathbb{Z}_p$ et d'additions sur un groupe fini $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (voir par exemple [81]).

1.7.2 Facteurs métriques

Un système dynamique mesuré (X_1, μ_1, T_1) est appelé *facteur métrique* du système mesuré (X, μ, T) si et seulement s'il existe une application mesurable surjective $f : X \mapsto X_1$, définie presque partout sur X, qui réalise une semi-conjugaison entre les applications T et T_1 et telle que μ_1 est la *mesure image* $f_* \mu$ de μ par l'application f.

La donnée d'un facteur d'un système dynamique métrique permet de préciser le spectre de ce système :

Lemme 1.7.1 *Le spectre discret d'un système dynamique mesuré contient les spectres discrets de tous ses facteurs métriques.*

Preuve Soit (X_1, μ_1, T_1) un facteur de (X, μ, T). Si g_1 est une fonction propre de (X_1, μ_1, T_1) pour la valeur propre λ, on a $g_1 \circ T_1 = \lambda\, g_1$. Soit $g = g_1 \circ f$. Alors $g \circ T = g_1 \circ f \circ T = g_1 \circ T_1 \circ f = \lambda\, g_1 \circ f = \lambda\, g$. Ainsi, g est fonction propre de (X, μ, T) pour λ. ■

Les lemmes suivants permettent, à contrario, de déduire du spectre discret d'un système dynamique métrique certains de ses facteurs.

Lemme 1.7.2 *Une rotation R_α d'angle α irrationnel sur $\mathbb{T}$ est facteur métrique d'un système dynamique ergodique (X, μ, T) si et seulement si $e^{2i\pi\,\alpha}$ est valeur propre de (X, μ, T).*

Preuve La condition nécessaire est une conséquence du lemme 1.7.1. Soit g une fonction propre de (X, μ, T) pour la valeur propre $e^{2i\pi\,\alpha}$. Par ergocidité, g est de module constant, qui peut être choisi égal à 1. Ainsi, il existe une unique fonction $f : X \mapsto \mathbb{T}$ mesurable telle que $g = \exp(2i\pi\, f)$. Puisque $g \circ T = e^{2i\pi\,\alpha} g$, on a $f \circ T = \alpha + T = R_\alpha \circ f$.

De ce fait, $\mu(f^{-1} f(X)) = \mu(X) = 1 \neq 0$ et la mesure $\mu * f$ sur $\mathbb{T}$ est non nulle et invariante par R_α. Par unique ergodicité de R_α, il s'agit donc de la mesure de Lebesgue ν. Puisque $f(X)$ est invariant par R_α et de mesure non nulle, on a $f(X) = \mathbb{T}$ par ergodicité de R_α, et R_α est bien un facteur métrique de (X, μ, T). ■

Le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ muni de la topologie discrète est uniquement ergodique pour l'addition de 1. Il vérifie un résultat semblable au lemme précédent.

Lemme 1.7.3 *L'addition de 1 sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est facteur métrique d'un système dynamique ergodique (X, μ, T) si et seulement si $e^{2i\pi/p^n}$ est valeur propre de (X, μ, T).*

Preuve La condition nécessaire provient du lemme 1.7.1.

Supposons que g est une fonction propre de (X, μ, T) pour la valeur propre $\exp(2i\pi/p^n)$, normalisée pour que son module soit égal à 1. Pour tout $0 \leq \varepsilon \leq 1/p^n$, l'ensemble $X_\varepsilon = g^{-1} \cup_{k\in\mathbb{Z}} \exp\{2i\pi(k/p^n + [0, \varepsilon[)\}$ est mesurable et stable par T. Il est donc de mesure 0 ou 1. De plus, les ensembles X_ε sont croissants en fonction de ε, X_0 est de mesure nulle et X_{1/p^n} de mesure pleine. La borne inférieure des ε pour lesquels X_ε est de mesure 1 existe donc. On la note ε_0. Alors $\cup_{\varepsilon<\varepsilon_0} X_\varepsilon = g^{-1} \exp(\cup_{k\in\mathbb{Z}} \exp\{2i\pi(k/p^n + [0, \varepsilon_0[)\}$ est de mesure nulle, tandis que $\cap_{\varepsilon>\varepsilon_0} X_\varepsilon = g^{-1} \exp(\cup_{k\in\mathbb{Z}} \exp\{2i\pi(k/p^n + [0, \varepsilon_0])\}$ est de mesure pleine. Soit $z = e^{2i\pi\varepsilon_0}$. On obtient ainsi que $g^{-1}\{z e^{2i\pi(k/p^n)}, k \in \mathbb{Z}\}$ est de mesure 1.

Il existe donc une unique fonction mesurable $f : X \mapsto \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ telle que $g = z \exp(2i\pi/p^n\, f)$ dans $L^2(X, \mu)$. Cette fonction vérifie $f \circ T = 1 + f$. Par unique ergodicité de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, on montre comme au lemme précédent que f préserve la mesure et est surjective. ■

Lemme 1.7.4 *L'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est facteur métrique d'un système dynamique ergodique (X, μ, T) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{2i\pi/p^n}$ est valeur propre de (X, μ, T).*

Preuve La condition nécessaire provient du lemme 1.7.1. Selon le lemme 1.7.3, si $e^{2i\pi/p^n}$ est valeur propre de (X,μ,T), il existe une fonction propre $g_n : X \mapsto \mathbb{C}$ pour la valeur propre $e^{2i\pi/p^n}$, qui s'écrit $g_n = z_n \exp(2i\pi/p^n\, f_n)$, avec $f_n : X \mapsto \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ vérifiant $f_n \circ T = 1 + f_n$.

Or, puisque g_{n+1} est fonction propre pour $e^{2i\pi/p^{n+1}}$, la fonction $(g_{n+1})^p$ est propre pour $e^{2i\pi/p^n}$. Les valeurs propres étant simples par ergodicité de (X,μ,T), $(g_{n+1})^p$ et g_n sont proportionnelles. On a ainsi $z_n \exp(2i\pi/p^n\, f_n) = {z_{n+1}}^p \exp(2i\pi/p^n\, f_{n+1})$. En particulier, $f_n - f_{n+1}$ est constant modulo p^n.

On rappelle que p_i^j désigne la projection canonique de $\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. Quitte à modifier f_{n+1} en lui soustrayant la constante, on obtient une suite de fonctions $f_n : X \mapsto \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ qui vérifient $f_n \circ T = 1 + f_n$ et telles que $p_{n+1}^n \circ f_{n+1} = f_n$ pour tout entier n.

Soit $f : X \mapsto \mathbb{Z}^n$ l'application définie par $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Selon ce qui vient d'être dit, on a pour tout $j \geq i$, $p_j^i(f_j(x)) = f_i(x)$. La fonction f est donc à valeur dans la limite inductive des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\mathbb{Z}_p$. De plus, on a $f \circ T = 1 + f$. Par unique ergodicité de l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$, on conclut comme au lemme 1.7.2 que $\mathbb{Z}_p$ est facteur métrique de (X,μ,T). ■

1.7.3 Facteur équicontinu maximal

Un système dynamique topologique (X,T) est appelé *équicontinu* si l'ensemble des applications $\{T^n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ est uniformément équicontinu, c'est-à-dire si

$$(\forall\, \epsilon > 0)\, (\exists\, \alpha > 0)\, (\forall\, x, y \in X)\ (\, d(x,y) < \alpha \implies (\forall\, n \in \mathbb{Z}),\, d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon\,).$$

Tout système dynamique topologique (X,T) admet un plus grand facteur équicontinu (Y,T_1), au sens que tout facteur topologique équicontinu de (X,T) est facteur topologique de (Y,T_1). Ce plus grand facteur équicontinu est unique et appelé *facteur équicontinu maximal* [30].

Il y a une correspondance bijective entre les caractères continus du facteur équicontinu maximal et les fonctions propres topologiques du système. Le facteur équicontinu maximal est ainsi une rotation sur un groupe abélien compact.

Dans le cas ergodique, les fonctions propres sont simples, et il est équivalent de chercher le facteur équicontinu maximal d'un système ou la partie discrète de son spectre.

Pour notre part, nous allons définir des applications sur le système substitutif à valeur dans un tore ou des entiers p-adiques, puis étudier leur injectivité en mesure.

1.8 Théorie spectrale des systèmes substitutifs

Les substitutions et systèmes dynamiques substitutifs on été introduits par W. H. Gottschalk [35], dans le cadre de l'étude des systèmes symboliques qui avait pris naissance dans [69, 70].

1.8.1 Substitutions de longueur constante

L'attention s'est d'abord focalisée sur les propriétés topologiques et ergodiques des systèmes associés à une substitution de longueur constante : T. Kamae montre que la condition de primitivité est suffisante pour assurer la minimalité [49] et donne une condition suffisante sur la substitution pour qu'elle soit à spectre discret [50]. B. G. Klein montre que les systèmes substitutifs primitifs de longueur constante sont uniquement ergodiques et d'entropie topologique nulle [56].

Dans [19], E. M. Coven et M. S. Keane considèrent des substitutions de longueur constante sur 2 lettres qui engendrent un système minimal. Leur facteur équicontinu maximal est alors $\mathbb{Z}_n$, où n est la longueur n de la substitution.

J. C. Martin généralise ceci aux substitutions de longueur constante n sur un alphabet fini [63] : si la substitution est injective sur les lettres, le facteur équicontinu maximal d'un système substitutif minimal de longueur constante n est l'addition de $(1,1)$ sur $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, où m est un nombre déterminé par la substitution. Il donne ensuite des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'il y ait isomorphisme en mesure avec ce facteur.

Finalement, M. F. Dekking généralise ces résultats avec de nouvelles méthodes :

Théorème 1.8.1 (Dekking [20]) *Soit σ une substitution non périodique de longueur constante n. Soit u un point périodique pour σ. On appelle* hauteur *de la substitution le plus grand entier m premier avec n qui divise tous les rangs strictement positifs d'apparition de u_0 dans u. Elle est inférieure au cardinal de l'alphabet.*

Le facteur équicontinu maximal du système substitutif associé à σ est l'addition de $(1,1)$ sur le groupe $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

L'auteur donne une méthode algorithmique de calcul de la hauteur d'une substitution. Par exemple, la substitution de Morse est de hauteur 1.

M. F. Dekking introduit aussi la condition combinatoire qui sera plus tard dite de *coïncidence* : une substitution de longueur constante n vérifie cette condition si et seulement s'il existe un entier k tel que les images de toutes les lettres de l'alphabet par un même itéré de la substitution ont même k-ième lettre. Généralisant [50], F. M. Dekking montre qu'une substitution vérifie cette condition si et seulement si elle est isomorphe en mesure à son facteur équicontinu maximal, c'est-à-dire qu'elle est à spectre discret. Autrement dit :

Théorème 1.8.2 (Dekking [20]) *Soit σ une substitution de longueur constante. Le système substitutif associé à σ est à spectre discret si et seulement si la substitution vérifie la condition de coïncidences.*

La substitution de Morse ne vérifiant pas la condition de coïncidence, on en déduit que le système substitutif associé n'est pas isomorphe en mesure à une rotation sur $\mathbb{Z}_2$.

1.8.2 Substitutions de longueur non constante

La question des substitutions de longueur non constante fut d'abord abordé dans [19, 20] en se ramenant à des substitutions de longueur constante. Plus tard, F. M. Dekking et M. S. Keane montrent qu'il n'existe pas de système substitutif fortement mélangeant [23]. P. Michel montre que le système associé à une substitution primitive de longueur non constante est uniquement ergodique [67]. M. Queffelec étudie en détail le type spectral des systèmes substitutifs dans [75]. La plupart des résultats précédemment évoqués apparaissent dans cette dernière référence.

J. C. Martin a obtenu un résultat partiel concernant le spectre discret des substitutions sur 2 lettres de longueur non constante [64]. Ses travaux sont handicapés par une définition trop faible de la propriété de reconnaissabilité (voir section 1.6). Si on prend en compte les propriétés sur la reconnaissabilité des substitutions prouvées par B. Mossé (voir section 1.6), ses résultats s'expriment comme suit.

Théorème 1.8.3 (Martin [64], voir aussi [45]) *Soit σ une substitution primitive sur deux lettres sans point fixe périodique. Soit X^2-TX+d le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de σ et r un rationnel. Soit w l'entier défini par:*

- *les facteurs premiers de w sont les nombres premiers qui divisent $|\sigma(1)|$ et $|\sigma(2)|$ mais ne divisent pas l'entier r,*

– *l'exposant de chaque facteur premier dans la décomposition de w est le même que dans la décomposition de* $|\sigma(1)| - |\sigma(2)|$.

Pour que $\exp(2\pi i r)$ *soit valeur propre du système dynamique associé à σ, il faut et il suffit qu'il existe des entiers k, m, n tels que* $r = k/w + m/(pgcd(d,T))^n$.

On en déduit la caractéristisation des facteurs p-adiques des systèmes associés à une substitution sur 2 lettres.

Corollaire 1.8.1 *Soit σ une substitution primitive sur deux lettres sans point fixe périodique. Soit p un nombre premier. L'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est facteur métrique du système substitutif si et seulement si p divise le déterminant et la trace du polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de σ.*

Nous généraliserons ce corollaire aux substitutions sur un alphabet quelconque au chapitre 4.

Dans [45], B. Host introduit une bonne notion de reconnaissabilité et prouve le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.8.4 (Host [45]) *Soit σ une substitution primitive sans point fixe S-périodique. Chaque fonction propre du système substitutif (Ω, S) associé à σ est égale presque partout à une fonction propre continue.*

Corollaire 1.8.2 *Soit σ est une substitution primitive sans point fixe S-périodique. Une rotation minimale sur un tore ou l'addition de 1 sur un ensemble d'entiers p-adique $\mathbb{Z}_p$ est un facteur topologique du système substitutif associé à σ si et seulement elle est facteur métrique.*

Preuve Le terme $T : Y \mapsto Y$ désigne une rotation irrationnelle sur un tore ou l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$. Soit (Ω, S) le système substitutif associé à σ. Supposons que T est facteur métrique de Ω. Selon le théorème 1.8.4, toutes les fonctions propres qui interviennent dans les preuves des lemmes 1.7.2 et 1.7.4 sont alors continues. De ce fait, la fonction $f : \Omega \mapsto Y$ qui réalise une semi-conjugaison entre S et T est continue. Le facteur métrique est donc un facteur topologique.

Réciproquement, supposons que (Y, T) est un facteur topologique de (Ω, S). Soit $f : \Omega \mapsto Y$ une fonction continue surjective telle que $f \circ S = R \circ f$. La mesure induite de celle de (Ω, S) par f est une mesure de probabilité invariante par T sur Y, qui est uniquement ergodique puisque Y est un tore ou un ensemble $\mathbb{Z}_p$. Il s'agit donc de la mesure du système dynamique métrique sur Y. Ainsi, (Y, T) est un facteur métrique de (Ω, S). ∎

B. Host en déduit une description complète du spectre discret des substitutions de longueur variable reconnaissables et injectives sur les lettres. Il généralise ainsi les résultats de [20] et [64].

Théorème 1.8.5 (Host [45]) *Soit σ est une substitution sur un alphabet $\mathcal{A}$ primitive sans point fixe S-périodique. On appelle* cobord *de σ tout application h de $\mathcal{A}$ dans l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 telle qu'il existe une application $f : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{U}$ qui vérifie $f(b) = f(a)h(a)$ pour tout élément ab du langage de la substitution.*

Pour que le complexe λ de module 1 soit une valeur propre de (Ω, S), il faut et il suffit qu'il existe un entier $p > 0$ tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, la limite $h(a) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{|\sigma^{pn}(a)|}$ existe et que h soit un cobord de σ.

Corollaire 1.8.3 *Soit σ une substitution primitive non S-périodique. Si λ est un nombre complexe de module 1 qui vérifie $\lim_n \lambda^{|\sigma^n(a)|} = 1$ pour toute lettre a de l'alphabet, alors λ est valeur propre du système associé à σ.*

Par exemple, ce théorème implique que la substitution définie par $\sigma(1) = 12121$ et $\sigma(2) = 122$ n'a aucune valeur propre et est donc faiblement mélangeante. Une simplification de la preuve des théorèmes 1.8.4 et 1.8.5 est faite dans [32] par S. Ferenczi, C. Mauduit et A. Nogueira pour donner une caractérisation plus explicite du spectre discret des substitutions primitives (voir théorème 1.8.10).

Par ailleurs, au début des années 80, A. M. Vershik définit un nouveau type de systèmes dynamiques, les *systèmes adiques*, en munissant l'ensemble des chemins d'un graphe infini d'un ordre partiel et en définissant sur cet ensemble appelé *compact markovien* une transformation de passage au successeur dite *transformation adique* [90]. L'idée sous-jacente est l'approximation des systèmes ergodiques. En effet, tout automorphisme d'un espace de Lebesgue muni d'une mesure ergodique invariante continue est isomorphe en mesure à une transformation adique.

Un compact markovien *stationnaire* est en fait le support un système dynamique symbolique de type fini, c'est-à-dire l'ensemble des chemins infinis d'un graphe étiqueté fini (voir section 1.5). Muni du décalage, cet ensemble est un système dynamique d'entropie strictement positive. Muni d'une transformation adique, cet ensemble est un système dynamique d'entropie nulle. A. N. Livshits montre que, essentiellement, un système adique est stationnaire si et seulement s'il est isomorphe en mesure au système associé à une substitution primitive [60].

Utilisant les notions de groupes de dimension sur des diagrammes de Brattelli, A. Forrest [33] montre que tout système substitutif primitif est topologiquement isomorphe à un système adique stationnaire. F. Durand, B. Host et C. F. Skau précisent ce résultat dans [29] et donnent un algorithme de calcul du système adique qui lui est isomorphe. Au chapitre 2, nous retrouvons le fait que tout système substitutif minimal est conjugué en mesure à une transformation adique sur un compact de Markov. On n'obtient pas un isomorphisme topologique. Par contre, le compact de Markov se déduit directement et très naturellement de la substitution.

Le parallèle entre les systèmes substitutifs et les systèmes adiques a permis à de nombreux auteurs de donner des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un système substitutif soit à spectre discret, à spectre partiellement continu ou faiblement mélangeant (voir [91]).

Ainsi, A. N. Livishits obtient une caractérisation des systèmes substitutifs discrets, sous la forme suivante, annoncée dans [59] et [91], et prouvée dans [61].

Théorème 1.8.6 (Livshits [59]) *Soit σ une substitution primitive sans point fixe périodique.*

On divise son alphabet en classes*, selon la longueur des images des lettres. Etant donné une classe C, on appelle C-bloc un élément $a_1 \dots a_r$ du langage de σ avec $a_1, a_r \in C$ et $a_2, \dots a_{r-1} \notin C$. On note Δ_C l'ensemble des paires $(a_1 \dots a_{r-1}, a_2 \dots a_r)$, où $a_1 \dots a_r$ est un C-bloc.*

On suppose qu'il existe un ensemble fini de mots $\{W_i\}$ et un ensemble fini Δ de paires (W_{i_k}, W_{j_k}) vérifiant $\mathbf{l}(W_{i_k}) = \mathbf{l}(W_{j_k})$ tels que pour toute paire $(V_1, V_2) \in \Delta \cup \Delta_C$, il existe un entier naturel m pour lequel on a $\sigma^m(V_1) = W_{l_1} \dots W_{l_s}$ et $\sigma^m(V_2) = W_{j_1} \dots W_{j_s}$, où $(W_{l_r}, W_{j_r}) \in \Delta \cup \Delta_C$ pour tout r et $W_{l_r} = W_{j_r}$ pour au moins un r.

Alors le système substitutif est à spectre discret.

Des exemples d'applications de ce théorème se trouvent parmi les substitutions de type Pisot, qui font l'objet de la section suivante (voir en particulier le théorème 1.9.3).

La réciproque du théorème 1.8.6 s'exprime sous la forme suivante.

Théorème 1.8.7 (Livshits [59]) *Soit σ une substitution primitive sans point fixe périodique. Soient c, d, a des lettres telles que $c \neq d$ et ac, ad appartiennent au langage de la substitution.*

On suppose qu'il existe un ensemble fini de mots $\{W_i\}$ et une suite croissante d'entiers m_i tels que pour tout i on a $\sigma^{m_i}(c) = W_{l_1} \dots W_{l_s} A$ et $\sigma^m(d) = W_{k_1} \dots W_{k_s} B$, avec A ou B vide, et pour tout t, $\mathbf{l}(W_{l_t}) = \mathbf{l}(W_{k_t})$ et $W_{l_t} \neq W_{k_t}$.

Alors le système substitutif n'est pas à spectre discret.

Par exemple, le système associé à la substitution définie par $\sigma(1) = 23$, $\sigma(2) = 12$ et $\sigma(3) = 23$ n'est pas à spectre discret. La substitution étant de longueur constante, elle admet cependant $\mathbb{Z}_2$ pour facteur (théorème 1.8.1), et n'est donc pas faiblement mélangeante.

Ce critère implique aussi que le système associé à la substitution de Morse n'est pas à spectre discret. On sait par ailleurs que la partie non discrète du spectre de ce système est un produit de Riesz (voir la bibliographie de [75]). On montre aussi que le système associé à cette substitution est isomorphe à une extension à deux points de son facteur équicontinu maximal, c'est-à-dire l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_2$.

A. N. Livishits définit enfin une condition suffisante pour que le système substitutif soit faiblement mélangeant.

Théorème 1.8.8 (Livshits [60]) *Soit σ une substitution primitive sans point fixe périodique.*

Si les valeurs propres de la matrice d'incidence de σ sont toutes de module supérieur ou égal à 1, alors le système substitutif associé à σ n'a pas de valeur propre irrationnelle.

S'il existe un élément du langage de la substitution $w = a_1 \ldots a_k = a_1 v$ avec $a_1 = a_k$ tel que pour tout entier n, les longueurs $|\sigma^n(v)|$ sont des entiers premiers entre eux pour $n > N$, alors le système substitutif n'admet aucune valeur propre rationnelle.

Ainsi, la substitution introduite dans [23] définie par $\sigma(1) = 112$ et $\sigma(2) = 12222$ est faiblement mélangeante [59].

B. Solomyak précise les théorèmes précédents en caractérisant de manière plus explicite que B. Host les valeurs propres irrationnelles des systèmes substitutifs.

Théorème 1.8.9 (B. Solomyak [85]) *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique irréductible sur $\mathbb{Q}$. Le système substitutif associé à σ admet au moins une valeur propre de la forme $\exp(2\pi i\,\beta)$, avec β irrationnel, si et seulement s'il existe un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ et γ irrationnel tel que $P(\alpha) = \gamma$ pour tout $\alpha \geq 1$ valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$.*

Le nombre $\exp(2\pi i\,\gamma)$ est alors valeur propre du système, ainsi que tous les $\exp(2\pi i\,\gamma^k)$.

Par exemple, le spectre du système associé la substitution définie par $\sigma(1) = 1244$, $\sigma(2) = 23$, $\sigma(3) = 4$ et $\sigma(4) = 1$ contient l'ensemble $\exp(2\pi i\mathbb{Z}\sqrt{2})$.

Ce dernier théorème permet d'obtenir des conditions diverses pour que la substitution soit à spectre rationnel. Entre autre, si s est le plus petit diviseur premier du cardinal d de l'alphabet, il suffit que le nombre de valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ supérieures ou égales à 1 soit strictement plus grand que d/s, pour que le système substitutif associé à σ n'ait pas de spectre irrationnel.

Une autre conséquence du théorème 1.8.9 est la suivante, puisque que le polynôme caractéristique d'une substitution de type Pisot est toujours irréductible sur $\mathbb{Q}$:

Proposition 1.8.1 *Si α est la valeur propre dominante de la matrice d'une substitution σ de type Pisot, le spectre du système associé à σ contient l'ensemble $\exp(2\pi i\mathbb{Z}[\alpha])$. En particulier, les systèmes substitutifs de type Pisot ne sont jamais faiblement mélangeants.*

Ainsi, les substitutions de type Pisot se rapprochent des substitutions de longueur constante par le fait qu'elles ne sotn jamais faiblement mélangeantes : les substitutions de longueur constante ont toujours des valeurs rationnelles, les substitutions de type Pisot ont toujours des valeurs irrationnelles. Par contre, dès qu'une substitution sort de ce cadre, des comportements complètement différents peuvent se produire, comme l'absence de valeur propre pour laquelle nous avons donné des conditions suffisantes au théorème 1.8.8.

Utilisant les techniques utilisées dans le cadre de l'étude des ensembles normaux substitutifs [65], S. Ferenczi, C. Mauduit et A. Nogueira reprennent la preuve et les résultats de B. Host [45], et les expriment de manière plus explicite et constructive en termes de mots de retour.

Théorème 1.8.10 (Ferenczi, Mauduit, Nogueira [32]) *Soit σ une substitution primitive non S-périodique et (Ω, S) le système associé à σ.*

On appelle mot de retour *tout élément $W = a_1 \ldots a_{k-1}$ du langage $\mathcal{L}(\Omega)$ de la substitution prolongeable en un mot $a_1 \ldots a_k \in \mathcal{L}(\Omega)$ tel que pour n assez grand, on ait $\sigma^n(a_k) = \sigma^n(a_1)$ et $\sigma^n(a_j) \neq \sigma^n(a_1)$, $\forall 1 < j < k$. Le temps de retour associé est $r_n(W) = |\sigma^n(a_1 \ldots a_{k-1})|$.*

Un nombre complexe λ de module 1 est une valeur propre du système substitutif (Ω, S) si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \lambda^{r_n(W)} = 1$ pour tout mot de retour w de la substitution.

Par exemple, le spectre du système associé à la substitution considérée précédemment et définie par $\sigma(1) = 1244$, $\sigma(2) = 23$, $\sigma(3) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, est exactement égal à l'ensemble $\exp(2\pi i\mathbb{Z}\sqrt{2})$.

Les auteurs déduisent de cette expression en terme de temps de retour une caractérisation des valeurs propres, qui généralise le théorème 1.8.9, en terme de valeurs de polynômes. Cette caractérisation est trop longue pour être donnée ici. Une conséquence de ces travaux peut-être exprimée comme suit.

Corollaire 1.8.4 (Ferenczi, Mauduit, Nogueira [32]) *Soit σ une substitution primitive non S-périodique.*

Soit λ une valeur propre du système associé à σ qui vérifie $\lim_n \lambda^{|\sigma^n(a)|} = 1$ pour toute lettre a de l'alphabet.

Si $\lambda = \exp(2\pi i\beta)$ avec β irrationnel, il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = \beta$ pour toute valeur propre $\alpha \geq 1$ de la matrice d'incidence de la substitution.

Si β irrationel est tel qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec $P(\alpha) = \beta$ pour toute valeur propre $\alpha \geq 1$ de la matrice d'incidence, alors il existe un entier k tel que $\exp(2k\pi i\beta)$ est valeur propre du système.

Ainsi, le spectre d'un système substitutif primitif est composé de deux parties. La première est l'ensemble des complexes qui vérifie le corollaire 1.8.4 : ces valeurs propres ne dépendent que de la matrice de la substitution, et plus précisément, pour les irrationnelles, de ses valeurs propres de module supérieur à 1, et sont en un certain sens naturels. De manière plus exotique et inattendue, il peut y avoir des valeurs propres du système substitutif qui ne vérifient pas ce corollaire. Elles dépendent étroitement des temps de retour et de la combinatoire de la substitution et ont par là un caractère non commutatif.

1.9 Représentation géométrique des systèmes symboliques

1.9.1 Représentation géométrique

Les systèmes symboliques ont été introduits comme les codages des trajectoires des points d'un espace géométrique dans une partition donnée sous l'action d'une application dont la dynamique était complexe à comprendre, précisément pour obtenir propriétés de cette dynamique : ce fut par exemple le cas de la substitution de Morse définie par $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 21$, et de son lien avec l'existence de géodésiques récurrentes non fermées sur des surfaces à courbure négative [68].

Un autre exemple significatif est le système substitutif engendré par la substitution de Fibonacci définie par $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = a$: ce système est l'ensemble des codages des points de $\mathbb{T}$ selon la partition $\mathbb{T} = [0, 1-\alpha[\cup[1-\alpha, 1[$ sous l'action de l'addition de α, où $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ est le nombre d'or. De plus, ce codage est 2-à-1 et presque partout injectif [70]. Plus généralement, les codages des rotations du cercle engendrent des suites dites *sturmiennes* dont les propriétés combinatoires, arithmétiques et géométriques sont très particulières et bien comprises [2, 70, 82].

Il est naturel de chercher à interpréter géométriquement les systèmes abstraits que sont les systèmes symboliques. Dans [75] (page 140), M. Queffelec appelle *représentation géométrique* d'un système symbolique (Ω, S) un système géométrique $(\mathcal{X}, T)$, sur lequel il existe une partition indexée par l'alphabet de Ω, telle que tout mot de Ω est l'itinéraire d'un point de $(\mathcal{X}, T)$ selon la partition. Elle demande quels systèmes admettent une telle représentation géométrique.

La représentation géométrique des systèmes substitutifs a fait l'objet de nombreux travaux : P. Arnoux et G. Rauzy représentent les systèmes vérifiant une certaine condition combinatoire par des échanges de 6 intervalles sur le cercle [8]. M. Boshernitzan et I. Kornfeld donnent dans [13] une conjugaison topologique entre la dynamique de la restriction à la limite d'une translation par morceaux avec celle d'une système substitutif. S. Ferenczi montre que la suite de Chacon est une exduction d'une rotation triadique [31]. Récemment, J. Cassaigne, S. Ferenczi et L. Q. Zamboni exhibent un exemple de suite d'Arnoux-Rauzy non substitutive dont les propriétés sont très éloignées des suites d'Arnoux-Rauzy substitutives : en particulier, leur exemple de suite ne peut pas être réalisé géométriquement comme une rotation sur un tore [18].

1.9.2 Substitutions de type Pisot

Le cas des systèmes substitutifs de type Pisot a fait l'objet d'une attention particulière.

G. Rauzy a montré [76] que le système associé à la substitution de Tribonacci : $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$, est isomorphe en mesure à un échange de trois morceaux dans un compact $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ appelé *fractal de Rauzy* (figure 1.2). Ce compact a une structure auto-similaire : à partir de méthodes introduites par M. Dekking dans [22], S. Ito and M. Kimura obtiennent [47] une nouvelle construction de $\mathcal{R}$ et prouvent que les domaines intervenant dans l'échange de morceaux ont une frontière fractale. Dans le même article, ils étudient la dimension de Haussdorf de la frontière de $\mathcal{R}$. A. Messaoudi obtient de nouvelles propriétés de cette frontière, en particulier une paramétrisation [66].

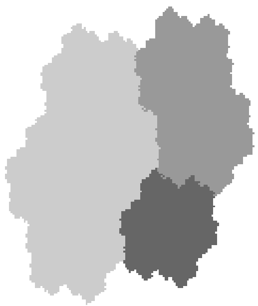

FIG. 1.2 – Fractal de Rauzy pour la substitution de Tribonacci

En étudiant le système de numération associé au nombre de Tribonacci, (racine de $x^3 - x^2 - x - 1$ de module inférieur à un) G. Rauzy prouve de plus dans [76] que $\mathcal{R}$ se projette sur le tore de manière injective en mesure. Ainsi, le compact $\mathcal{R}$ génère dans le plan un pavage périodique à frontière fractale.

L'auto-similarité de $\mathcal{R}$ implique que ce pavage est un pavage auto-similaire. Ceci est à rapprocher de la relation existant entre les suites sturmiennes, les pavages de la droite et la structure des quasi-cristaux (voir [6]), et plus généralement de la théorie des quasi-cristaux : à partir de techniques similaires à celle que G. Rauzy utilise dans [76], E. Bombieri and J. Taylor font appel aux substitutions pour exhiber un lien entre les quasi-cristaux et la théorie des nombres [9, 11, 54, 80, 89].

D'un point de vue ergodique, le résultat de G. Rauzy [76] signifie que le système substitutif engendré par la substitution σ est conjugué en mesure à une rotation sur le tore de dimension 2, l'application de conjugaison étant continue du système substitutif sur le tore.

Une première généralisation de ceci à l'ensemble des substitutions de type Pisot peut se faire via l'étude du spectre de ces systèmes, et l'application des résultats généraux de la section 1.8.2 au cas Pisot.

Dans [45], B. Host affirme qu'une conséquence de ses travaux est la suivante :

Théorème 1.9.1 (Host [45]) *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont le seul cobord est 1. Le système associé à σ a un spectre totalement irrationnel, engendré par les fréquences d'apparition des lettres dans n'importe quel mot du système, c'est-à-dire par les coordonnées d'un vecteur propre dominant normalisé de la matrice de la substitution.*

Nous avond déjà vu que la condition sur les cobords a été interprétée en terme de mots de retours par S. Ferenczi, C. Mauduit et A. Nogueira [32] : elle signifie qu'il existe p tels que les entiers $|\sigma^{pn}(a)|$ sont des temps de retour de la substitution pour toute lettre a.

Pour les substitutions de type Pisot non unimodulaires, ce résultat se généralise comme suit :

Proposition 1.9.1 *Soit σ une substitution de type Pisot dont le seul cobord est 1. Soient $\mu[1], \dots, \mu[d]$ les fréquences d'apparition des lettres de l'alphabet dans n'importe quel mot du système associé à σ. Soit α la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de σ.*

Le spectre du système substitutif associé à σ est l'ensemble $\cup_{n\geq 0} \exp(\, 2i\pi\, \alpha^{-n}\, \mathbb{Z}[\,\mu[1], \dots, \mu[d]\,]\,)$.

En particulier, le spectre de la substitution définie par $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$ est l'ensemble $\exp(\, 2i\pi\, \mathbb{Z}[1/\sqrt{2}]\,)$.

De manière moins précise mais sans aucune hypothèse sur les cobords, puisque que le polynôme caractéristique d'une substitution de type Pisot est irréductible sur $\mathbb{Q}$, on sait déjà par la proposition 1.8.1 que le spectre des systèmes substitutifs de type Pisot contient l'ensemble $\exp(\, 2i\pi\, \mathbb{Z}[\alpha]\,)$, où α est la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de la substitution.

Ainsi, tout système substitutif de type Pisot admet pour facteur mesurable une translation sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$. Ceci précise un résultat de M. Solomyak dans [87], qui s'intéresse aussi à la partie rationnelle du spectre des substitutions unimodulaires de type Pisot.

Théorème 1.9.2 (M. Solomyak [87]) *Le spectre rationnel d'un système substitutif unimodulaire de type Pisot est fini.*

M. Hollander reprend dans [40] la preuve des résultats de A. N. Livshits et applique ces résultats aux cas des substitutions de type Pisot sur 2 lettres.

Il montre que les systèmes associés à ces substitutions sont à spectre discret dès que la substitution vérifie une condition combinatoire qui généralise la condition de coïncidences introduite par M. F. Dekking pour les substitutions de longueur constante : on dit qu'une substitution sur deux lettres vérifie la *condition de coïncidences* s'il existe deux entiers k, n tels que $\sigma^n(0)$ et $\sigma^n(1)$ ont même k-ième lettre et les abélianisés des débuts de longueur $k-1$ de $\sigma^n(0)$ et $\sigma^n(1)$ sont égaux.

Cette définition était apparue plus tôt dans la littérature (voir [75]). B. Host, dans un travail non publié [46], avait en particulier remarqué le lien entre cette condition et le spectre des substitutions sur deux lettres, en prouvant que cette condition est nécessaire pour que le spectre du système soit discret, et suffisante si la substitution est unimodulaire (voir le théorème 1.9.4 ci-dessous). Le résultat général suivant, fortement conjecturé, a été prouvé indépendemment des travaux de B. Host par M. Hollander.

Théorème 1.9.3 (Hollander [40]) *Soit σ une substitution de type Pisot sur 2 lettres qui vérifie la condition de coïncidences. Alors le système substitutif associé à σ est à spectre discret.*

On ne sait toujours pas s'il existe une substitution de type Pisot qui ne vérifie pas cette condition.

B. Solomyak s'est attaché à étudier des classes d'exemples de substitutions de type Pisot en approfondissant les travaux de [45]. Il montre ainsi dans [85] que pour tout d, le système substitutif engendré par la substitution unimodulaire définie par $\sigma(1) = 123\ldots d$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2,\ldots,$ $\sigma(d) = d-1$ est à spectre purement discret, métriquement isomorphe à la translation du tore $\mathbb{T}^{d-1}$ ayant pour vecteur un vecteur propre dominant normalisé de la matrice d'incidence de σ. Par ailleurs, à l'aide des propriétés du β-développement, il montre dans [86] que les substitutions de type Pisot parmis celles qui sont définies par $\sigma(1) = 1^{a_1}2$, $\sigma(2) = 1^{a_2}3$, $\ldots$, $\sigma(d-1) = 1^{a_d-1}d$ et $\sigma(d) = 1^{a_d}$ avec $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_d \geq 1$ sont à spectre purement discret.

On est ainsi amené à penser que les systèmes substitutifs primitifs de type Pisot et unimodulaires sont de bons candidats pour être isomorphes en mesure à une rotation torique comme c'est le cas pour la substitution de Tribonacci, cette rotation torique est obtenue à partir des fréquences des lettres dans les mots du système. Or, selon le corollaire 1.8.2, une rotation irrationnelle est facteur métrique d'un système substitutif si et seulement si elle est facteur topologique. Il est donc naturel pour voir s'il y a bien isomorphisme, de chercher à construire une application continue du système substitutif dans un tore qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage du système substitutif et la translation sur le tore définie par les fréquences, puis de s'intéresser à l'injectivité de cette application.

Dans un travail hélas non publié [46], B. Host s'intéresse à la représentation des systèmes substitutifs primitifs de type Pisot unimodulaires sur 2 lettres. Il montre qu'il existe une fonction continue de Ω dans le tore $\mathbb{T}$ qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage et un pseudo-échange de morceaux de la droite, les morceaux étant les images des cylindres de Ω :

$$\exists\, f : X \mapsto \mathbb{R},\ f \text{ continue},\ \exists\, a_0, a_1 \in \mathbb{R};\quad \forall w \in \Omega,\ f(Sw) = f(w) + a_{w_0}.$$

B. Host prouve que cette application est injective en mesure si et seulement si sa projection sur le tore $\mathbb{R}/(a_1 - a_0)\mathbb{Z}$ est elle-même injective en mesure. Ceci équivaut encore au fait que la substitution σ vérifie la condition de coïncidences. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 1.9.4 (Host [46]) *Soit σ une substitution de type Pisot unimodulaire sur 2 lettres. La substitution vérifie la condition de coïncidences si et seulement si le systèmes substitutif associé à σ est isomorphe en mesure à un échange de deux intervalles et à une translation sur le tore $\mathbb{T}$. Si c'est le cas, les représentations sont explicites et continues.*

Ce résultat est antérieur à celui de M. Hollander [40]. Il est moins général puisque demandant la condition d'unimodularité, mais présente le grand intérêt d'etre constructif.

Généralisant [46], P. Arnoux et S. Ito considèrent dans [7] les substitutionsde type Pisot et unimodulaires sur d lettres. Ils construisent par approximations successives un compact de $\mathbb{R}^{d-1}$ appelé *fractal de Rauzy associé à la substitution*, qui se décompose naturellement en d parties fractales. Ces parties se recoupent à priori. Ces auteurs introduisent alors une notion générale de coïncidences.

Définition 1.9.1 (Arnoux, Ito [7]) *Une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A}$ satisfait la* condition de coïncidence *sur les préfixes (respectivement suffixes) si et seulement si, pour tout couple de lettres $(b_1, b_2) \in \mathcal{A}^2$, il existe un entier n, une lettre $a \in \mathcal{A}$ et des mots finis $p_1, s_1, p_2, s_2 \in \mathcal{A}^*$ tels que $\sigma^n(b_1)$ et $\sigma^n(b_2)$ se décomposent sous la forme suivante :*

$$\sigma^n(b_1) = p_1 a s_1 \quad \textit{et} \quad \sigma^n(b_2) = p_2 a s_2, \quad \textit{avec} \;\; \mathbf{l}(p_1) = \mathbf{l}(p_2)$$
$$(\textit{respectivement} \;\; \mathbf{l}(s_1) = \mathbf{l}(s_2))\,.$$

Un exemple de substitution qui ne vérifie pas cette condition est la substitution de Morse. On ne sait pas s'il existe des substitutions de type Pisot qui ne vérifient pas cette condition, même sur 2 lettres.

Sous cette condition, P. Arnoux et S. Ito montrent que les d parties sont disjointes en mesure et forment une partition du fractal de Rauzy de la substitution. Il en déduisent :

Théorème 1.9.5 (Arnoux, Ito [7]) *Soit σ une substitution sur d lettres unimodulaire de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences. Le système substitutif associé à σ est conjugué en mesure à un échange de d morceaux sur un compact de $\mathbb{R}^{d-1}$.*

De plus, l'espace $\mathbb{R}^{d-1}$ se projette dans le tore $\mathbb{T}^{d-1}$ de telle sorte que l'échange de morceaux se factorise en la translation irrationnelle dont le spectre est engendré par les fréquences des lettres dans les éléments du système substitutif. Ainsi :

Théorème 1.9.6 (Arnoux, Ito [7]) *tout système substitutif primitif unimodulaire de type Pisot vérifiant la condition de coïncidences admet pour facteur topologique une translation irrationnelle sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$, les fibres étant finies presque-partout.*

Par contre, cette projection dans le tore ne conserve pas, comme c'était le cas en dimension 2, le caractère injectif en mesure de la représentation. Les auteurs donnent une condition suffisante pour qu'il y ait isomorphisme en mesure avec la rotation : il suffit qu'il existe un ensemble d'intérieur non vide qui est contenu dans tous les domaines qui interviennent dans la construction par approximations successives du fractal de Rauzy de la substitution.

Des propriétés topologiques et géométriques des fractales de Rauzy ainsi définies ont été étudiées par un certain nombre d'auteurs :

- V. F. Sirvent et Y. Wang montrent que les fractals de Rauzy sont d'intérieur non vide et l'adhérence de leur intérieur [83].
- Des critères de simple connexité ont été donnés par S. Ito et M. Ohtsuki [48].
- Des critères de connexité ont été donnés par V. Canterini [16]. Ces derniers seront repris aux chapitre 4.

Enfin, C. Holton et L. Q. Zamboni ont travaillé sur la représentations unidimensionnelles des substitutions dont la matrice d'incidence admet une valeur propre contractante [42, 43, 44]. De leur travaux se déduit une majoration explicite de la dimension de Hausdorff des projections sur les axes du fractal de Rauzy associé à une substitution.

Plus précisément, pour toute substitution σ primitive, soit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ est un vecteur propre de la matrice d'incidence de σ pour une valeur propre α_1 avec $|\alpha_1| < 1$. Soit φ une fonction définie sur le système substitutif Ω associé à σ, cette fonction étant à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (suivant le corps qui contient α), et vérifiant $\varphi(Sw) = \varphi(w) + v_{w_0}$ pour tout $w \in \Omega$. C. Holton et L. Q. Zamboni montrent que la dimension de Hausdorff de l'ensemble réel ou complexe $\varphi(\Omega)$ est majorée par $-log(\alpha)/log(\alpha_1)$, où α est la valeur propre dominante de la matrice de la substitution.

En conséquence, si $|\alpha_1|\,\alpha < 1$, alors $\varphi(\Omega)$ est un ensemble de Cantor. Si $\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et vérifie $|\alpha_1|^2\alpha < 1$, alors $\varphi(\Omega)$ est d'intérieur non vide.

1.10 Contenu de la thèse

Le **chapitre 2**, est intitulé **Automate et développements en préfixes-suffixes** et porte sur les **substitutions primitives**. Il a été écrit avec Vincent Canterini. Nous utilisons la reconnaissabilité bilatérale des substitutions primitives pour associer à toute substitution primitive un *automate des préfixes-suffixes* qui permet de mettre en bijection le domaine du système substitutif et le support $\mathcal{D}$ d'un système dynamique symbolique de type fini.

En considérant cet ensemble $\mathcal{D}$ comme un *compact markovien stationnaire* au sens de A. Vershik [90], on montre que le successeur sur Ω est conjugué en mesure à une transformation adique définie sur $\mathcal{D}$ grâce à un ordre partiel qui se déduit naturellement de la substitution par la relation "préfixes". Nous retrouvons ainsi de manière constructive et explicite le fait que tout système substitutif minimal est conjugué en mesure à une transformation adique sur un compact de Markov [60, 29].

Ceci permet aussi d'interpréter dynamiquement et de généraliser les résultats de J. M. Dumont et A. Thomas [25] sur les échelles de numération associées au point fixe d'une substitution.

Des automates du type "automate des préfixes-suffixes" apparaissent dans des domaines variés de la littérature. L'automate des préfixes-suffixes en est la forme la plus complète.

Ainsi, la donnée de cet automate est équivalente à celle du graphe dirigé défini par C. Holton et L.Q. Zamboni dans [42] pour étudier la dimension de Haussdorf de représentations géométriques unidimensionnelles de substitutions. Ces deux auteurs étudient de manière indépendante dans [43] des propriétés du graphe dirigé qui recoupent une partie de nos résultats.

Cet automate est par construction une extension de l'*automate des préfixes* et de l'*automate des suffixes* définis par G. Rauzy dans [76, 77] pour représenter des systèmes substitutifs de type Pisot par des échanges de morceaux dans l'espace euclidien. Les systèmes dynamiques symboliques déterminés par ces deux derniers automates ne sont que sofiques, ce qui empêche l'obtention de résultats sur l'injectivité des représentations. L'automate des préfixes-suffixes, par contre, détermine un système dynamique symbolique de type fini. Ceci sera le point clé utilisé dans les chapitres 3 et 4 pour étudier l'injectivité de représentations géométriques de systèmes substitutifs.

L'automate des préfixes-suffixes se retrouve sous forme codée dans les travaux en théorie des nombres développés à partir de l'automate de G. Rauzy : tout d'abord ceux de J.-M. Dumont et A. Thomas [25, 26, 27], sur des échelles de numérations associées à certaines substitutions; ensuite leurs développement par V. Sirvent [84] pour exhiber certaines propriétés du fractal de Rauzy. Citons enfin, dans la continuation de ses travaux avec J. M. Dumont [24], la définition par T. Kamae dans [51] de pavages colorés à partir d'une substitution pondérée, l'agencement des pavés étant défini par des règles proches des transitions de l'automate des préfixes, mais non explicitées.

Pour finir, dans le domaine de la théorie des langages, l'automate des préfixes-suffixes se projette d'une part sur l'automate défini par A. Maes [62] dans ses travaux sur la décidabilité de théories arithmétiques, et d'autre part sur l'automate défini par P. Narbel [73] pour étudier la frontière d'un langage à partir de la description sous forme d'arbre de l'ensemble des chemins de son automate.

Le **chapitre 3** porte sur la **Représentation géométrique des systèmes substitutifs** et concerne les **substitutions de type Pisot**. Il a été écrit avec Vincent Canterini. Comme évoqué ci-dessus nous utilisons l'automate des préfixes-suffixes pour développer les idées que G. Rauzy a exposé dans [77] dans le but de généraliser ses travaux de [76].

Etant donné une substitution de type Pisot sur d lettres, nous construisons une application continue φ du système substitutif à valeur dans $\mathbb{R}^{d-1}$, qui réalise une conjugaison entre le successeur et un pseudo-échange de morceaux. Puisqu'on se trouve dans le cas Pisot, l'espace est de dimension suffisamment grande, si bien que les vecteurs qui définissent le pseudo-échange de morceaux ont un degré de liberté suffisant et engendre un réseau. On peut ainsi quotienter cet espace de sorte que l'échange de morceaux se factorise en une translation irrationnelle sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$.

On obtient ainsi une généralisation du théorème 1.9.6 de P. Arnoux et S. Ito à toutes les substitutions de type Pisot (la condition d'unimodularité n'est plus nécessaire), en en donnant une nouvelle preuve où l'opérateur qui réalise la conjugaison est explicite, défini partout, et continu.

L'application de représentation φ est en fait à valeur dans le fractal de Rauzy associé à la substitution par P. Arnoux et S. Ito. Nous montrons que les techniques qu'ils utilisent **dans le cas unimodulaire avec coïncidences** sont applicables à notre construction et nous donnons ainsi une nouvelle preuve du théorème 1.9.5. Cette preuve présente l'intérêt d'être plus explicite dans la mesure où on obtient un isomorphisme en mesure explicite entre système substitutif de type Pisot unimodulaire et échange de morceaux dans l'espace euclidien.

La représentation φ coïncide sur chaque coordonnée avec les représentations unidimensionnelles de C. Holton et L. Zamboni [42, 44]. Le fait de rassembler toutes ces représentations est naturel au sens que chacune est une expression différente d'un même système de numération formel : le système engendré par le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution.

Cette vision formelle des représentations géométriques sera abordée partiellement aux chapitres 4 et 6, et dans sa globalité au chapitre 7. Elle a été introduite par G. Rauzy dans [77], où en est déduit la définition d'un automate arithmétique lié à l'injectivité de la représentation.

Au **chapitre 4**, intitulé **Critère d'injectivité des représentations géométriques**, nous nous intéressons aux **substitutions unimodulaires de type Pisot**. Nous reprenons l'automate arithmétique de G. Rauzy [77] dans le cas des substitutions de type Pisot et unimodulaires. En approfondissant son étude, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour l'injectivité en mesure de la représentation φ dans l'espace euclidien. Ce critère est donc plus précis que la condition de coïncidence de [7], et il ne la fait pas intervenir. Par contre, il est plus complexe à vérifier. Nous donnons un algorithme pour le vérifier (son implémentation dans le langage *mupad* fait l'objet de l'**annexe B**). Comme pour les coïncidences, nous ne savons pas si ce critère est vérifié par toutes les substitutions unitaires de type Pisot.

Ces travaux permettent d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour l'injectivité en mesure de la représentation dans le tore. Tous les exemples traités vérifient cette condition et sont donc isomorphes en mesure à une rotation irrationnelle.

Ces résultats permettent au **chapitre 5**, intitulé **Partitions de Markov pour les automorphismes du tore**, d'utiliser la notion de substitutions pour construire des partitions de Markov explicites d'automorphismes du tore de type Pisot. On généralise ainsi les travaux de A. Messaoudi dans [66], qui a obtenu de telles partitions de Markov pour l'automorphisme du tore ayant pour matrice la matrice d'incidence de la substitution de Tribonacci.

On précise que l'existence d'une partition de Markov nécessite le fait que la substitution vérifie le critère d'injectivité sur le tore défini au chapitre 4. On n'a donc pas de résultat général, mais un moyen de construire des partitions de Markov explicites et aux propriétés géométriques et arithmétiques intéressantes.

En plus de la condition nécessaire et suffisante d'injectivité sur le tore, ces méthodes permettent d'aborder le cas des substitutions non unitaires de longueur non constante, dont les facteurs p-adiques, ou plus généralement le spectre rationnel, ont été très peu étudiés.

Pour les substitutions de type Pisot, on imaginait qu'il doit être possible d'ajouter à la représentation géométrique une composante arithmétique, à valeur dans une structure p-adique. Par exemple, dans [77], G. Rauzy montre que le système substitutif associé à la substitution σ_0 définie par $\sigma_0(a) = 1112$, $\sigma_0(2) = 12$, admet pour facteur une translation minimale sur le compact $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$.

Il semble naturel plus généralement de conjecturer qu'un système substitutif de type Pisot non unimodulaire admet pour facteur une translation sur $\mathbb{Z}_p$ pour tous les nombres premiers p qui divisent le déterminant de la matrice d'incidence de la substitution.

Au **chapitre 6**, qui a pour titre **Facteurs p-adiques des substitutions non unitaires**, nous contredisons ceci en montrant que le système associé à la substitution non unimodulaire σ_1 définie par $\sigma_1(1) = 11222$ et $\sigma_1(2) = 1222$ n'admet pour facteur aucune translation sur une partie d'un corps p-adique.

Plus généralement, étant donné **une substitution primitive** dont la **matrice d'incidence a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible** sur $\mathbb{Q}$, nous relions l'étude des ramifications de p dans le corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ à l'existence d'un facteur topologique p-adique du système substitutif associé à la substitution, et caractérisons ainsi ces facteurs p-adiques : on montre que le système admet $\mathbb{Z}_p$ pour facteur si et seulement si p divise tous les coefficients non dominants de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$. Nous généralisons ainsi les résultats de J. C. Martin dans [64] aux substitutions sur plus de 2 lettres.

Notons que selon le corollaire 1.8.2, on caractérise ainsi les facteurs topologiques p-adiques des systèmes substitutifs comme leurs facteurs métriques.

De plus, nous cherchons à voir si, similairement au cas réel, il existe un lien entre les facteurs p-adiques et une éventuelle représentation par un échange de morceaux dans des corps p-adiques.

Un nombre premier p étant fixé, nous montrons que tout système substitutif primitif peut être représenté dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, cette représentation réalisant une semi-conjugaison entre le décalage sur le système et un pseudo-échange de morceaux. La condition d'existence d'un facteur p-adique : *p divise tous les coefficients du polynôme caractéristique*, signifie alors que la dimension du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel est suffisamment grande, c'est-à-dire égale à la taille de l'alphabet, si bien que les vecteurs qui interviennent dans l'échange de morceaux forment une base de l'espace vectoriel. Finalement, dans la section 6.3.3, on prouve que le facteur p-adique du système est une projection dans $\mathbb{Z}_p$ de la représentation dans le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel.

Ainsi, il se produit dans le cas p-adique un phénomène identique au cas réel étudié dans [7] et au chapitre 3. En ce sens, la condition *p divise tous les coefficients du polynôme* apparaît comme un analogue p-adique du fait qu'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ admet pour racine un nombre de Pisot.

Au **chapitre 7**, qui a pour titre **Représentation globale des substitutions non unitaires**, nous rassemblons les représentations toriques et p-adiques des **substitutions non unimodulaires de type Pisot**. Nous exposons quels sont les points qui font pour l'instant défaut à la généralisation des résultats obtenus dans le cas unimodulaire sur l'injectivité des représentations (chapitre 4). Nous montrons comment ceci pourrait amener à terme à construire, selon les méthodes du chapitre 5, des partitions de Markov explicites pour une classe d'endomorphismes hyperboliques du tore.

Chapitre 2

Automate et développements en préfixes-suffixes

L'objectif de ce chapitre est de décrire de manière combinatoire le système substitutif bilatéral associé à une substitution primitive et de mettre en évidence la dynamique d'un système de numération associé à cette substitution.

Ainsi, on explicite une conjugaison en mesure entre le décalage sur un système substitutif minimal et une transformation adique sur le support d'un système dynamique symbolique de type fini, à savoir l'ensemble des chemins d'un automate dit des préfixes-suffixes. En caractérisant les préimages par la conjugaison des chemins périodiques de l'automate, on montre que cette conjugaison est injective sauf sur un ensemble dénombrable, sur lequel elle est finie-à-un. On en déduit l'existence d'une suite de partitions du système qui est génératrice en mesure. On montre sur un exemple comment ce travail s'applique à la représentation géométrique des substitutions.

Le contenu de ce chapitre a été écrit avec Vincent Canterini, excepté la dernière section. Il a fait l'objet d'un article intitulé *Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive*, accepté pour publication dans la revue *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*.

2.1 Désubstitution et développement en préfixes-suffixes

Soit σ une substitution primitive non S-périodique sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, d\}$ et soit (Ω, S) le système symbolique engendré par σ. Par compacité, tout mot de Ω se décompose sous la forme $x = S^k(\sigma(y))$, avec $k < |\sigma(y_0)|$, où $y \in \Omega$ et y_0 est la lettre d'indice 0 de y. Nous avons vu à la section 1.6 que l'unicité de cette décomposition est assurée par un résultat de [71, 72], où B. Mossé prouve que toute substitution primitive non S-périodique vérifie une propriété de *reconnaissabilité bilatérale*, que nous utiliserons sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\forall w \in \Omega,\ \ \exists\, v \in \Omega,\ \ \exists\, k \in \mathbb{N},\ \ v, k\ \text{ uniques}\,; \\ &w = S^k\sigma(v) \quad \text{ et } \quad 0 \le k < |\sigma(v_0)|\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si on note $p = w_{-k} \dots w_{-1}$ le préfixe de $\sigma(v_0)$ de longueur k et s le suffixe $w_1 \dots w_l$, la connaissance du couple (v, k) est équivalente à celle de v et de la factorisation de $\sigma(v_0)$ sous la forme pw_0s. Introduisons l'ensemble de ces découpages :

$$\mathcal{P} = \{(p, a, s) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*;\ \exists\, b \in \mathcal{A}\ ,\ \ \sigma(b) = pas\}.$$

Par exemple, soit σ_1 la substitution de Fibonacci définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma_1(2) = 1$. L'ensemble des découpages de préfixes-suffixes associé est

$$\mathcal{P} = \{(\varepsilon, 1, 2), (1, 2, \varepsilon), (\varepsilon, 1, \varepsilon)\}.$$

Pour la substitution σ_2 définie par $\sigma_2(1) = 1112$ et $\sigma_2(2) = 12$, on obtient

$$\mathcal{P} = \{(\varepsilon, 1, 112), (1, 1, 12), (11, 1, 2), (111, 2, \varepsilon), (\varepsilon, 1, 2), (1, 2, \varepsilon)\}.$$

La formule (2.1) signifie ainsi que $\mathcal{P}$ détermine une partition de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{\{(p,a,s)\in\mathcal{P},\, b\in\mathcal{A};\, \sigma(b)=pas\}} S^{|p|}\sigma[b], \qquad \text{l'union étant disjointe.}$$

Définition 2.1.1 *Soit (Ω, S) le système dynamique symbolique engendré par une substitution σ, primitive non S-périodique. On appelle* désubstitution *l'application $\theta : \Omega \to \Omega$ définie par*

$$\theta(w) = v \quad si \quad w = S^k\sigma(v) \;\; et \; 0 \leq k < |\sigma(v_0)|.$$

On note $\gamma : \Omega \to \mathcal{P}$ l'application suivante :

$$\gamma(w) = (p, w_0, s) \quad si \quad \sigma((\theta(w))_0) = pw_0s \;\; et \;\; w = S^{|p|}\sigma(\theta(w)).$$

L'existence et la continuité de ces applications découlent directement de [72]. Ceci justifie le choix de travailler sur un système dynamique bilatère plutôt qu'avec des mots unilatéraux. En fait, comme expliqué section 1.6, pour certaines substitutions – par exemple $\sigma(1) = 1112$ et $\sigma(2) = 12$ – la décomposition sous la forme $w = S^k(\sigma(v))$ n'est pas unique pour tous les mots unilatéraux du système dynamique, et il est impossible de définir un unique désubstitué dans ce cas.

Les ensembles $\gamma^{-1}(p, a, s)$ pour $(p, a, s) \in \mathcal{P}$ définissent une partition finie de Ω. Nous allons nous intéresser aux itinéraires des points de Ω dans cette partition sous l'action de la désubstitution θ.

Définition 2.1.2 *On note $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ l'application continue définie par*

$$\Gamma(w) = (\gamma\,(\,\theta^i w\,)\,)_{i\geq 0} = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}.$$

On appelle développement en préfixes-suffixes de *w la suite $\Gamma(w)$.*

Deux problèmes se posent : identifier $\Gamma(\Omega)$ et déterminer si Γ est injective. Nous montrerons que $\Gamma(\Omega)$ est entièrement décrit par la propriété suivante.

Remarque 2.1.1 *Si $w \in \Omega$ a pour développement $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$, alors*

$$a_0 = w_0 \qquad et \qquad \forall i \geq 0, \quad \sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i. \tag{2.2}$$

Nous étudierons à la section suivante le système dynamique symbolique de type fini qui est décrit par la formule 2.2, et montrerons son lien avec l'image $\Gamma(\Omega)$.

Relativement à l'injectivité de Γ, notons la remarque suivante.

Remarque 2.1.2 *Soit $w \in \Omega$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ son développement. Si les préfixes p_i et les suffixes s_i ne sont pas tous vides à partir d'un certain rang, alors w est la limite de la suite des mots finis suivants :*

$$\sigma^i(p_i)\ldots\sigma^2(p_2)\sigma(p_1)p_0\,.\,w_0s_0\sigma(s_1)\sigma^2(s_2)\ldots\sigma^i(s_i) \quad . \tag{2.3}$$

Si les préfixes ou les suffixes sont vides à partir d'un certain rang, les mots finis ci-dessus ne convergent pas vers un mot biinfini. Les éléments de Ω qui sont dans ce cas seront identifiés aux sections 2.3 et 2.4. On note dans la remarque suivante qu'il en existe :

Remarque 2.1.3 *Les développements $(p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ des points de Ω périodiques pour σ sont tels que $p_i = \varepsilon$ pour tout entier i. Les développements des antécédents par le décalage S de ces points sont tels que $s_i = \varepsilon$ pour tout entier i.*

2.2 Automate des préfixes-suffixes

Les propriétés des $\Gamma(w)$, où $w \in \Omega$, exprimées à la remarque 2.1.1 amènent à définir l'automate suivant. Des automates proches de celui-ci ont été défini dans des contextes divers, qui ont été rappelés à la section 1.10.

Définition 2.2.1 *L'*automate des préfixes-suffixes *associé à la substitution σ est défini comme suit :*
- *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des états. Tous les états sont initiaux.*
- *$\mathcal{P}$ est l'ensemble des étiquettes.*
- *Il existe une flèche entre les états a et b étiquetée par $e = (p, a, s)$ si $\sigma(b) = pas$.*

La matrice d'adjacence du graphe sous-jacent est la matrice d'incidence de σ. Si σ est primitive, l'automate des préfixes-suffixes est fortement connexe. Les figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 donnent des exemples de tels automates.

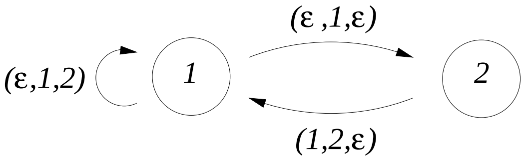

FIG. 2.1 – automate des préfixes-suffixes pour la substitution de Fibonacci $\sigma_1 : 1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 1$

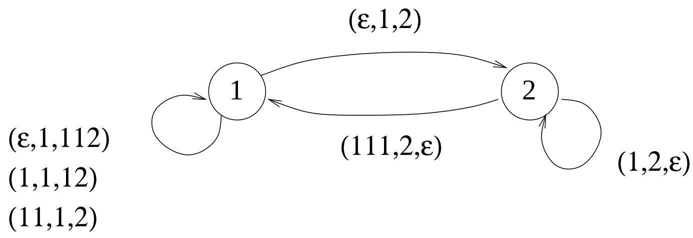

FIG. 2.2 – automate des préfixes-suffixes pour $\sigma_2 : 1 \mapsto 1112,\ 2 \mapsto 12$

Définition 2.2.2 *Un élément $(e_i)_{i\geq 0}$ de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est dit* admissible *s'il s'agit d'un mot infini reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ qui sont admissibles.*

Un chemin est étiqueté par les $e_i = (p_i, a_i, s_i)$ si et seulement si $\sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i$ pour tout i positif. On en déduit que $\mathcal{D}$ est le système dynamique symbolique de type fini de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ pour lequel les mots interdits sont toutes les paires d'étiquettes qui ne se suivent pas dans l'automate.

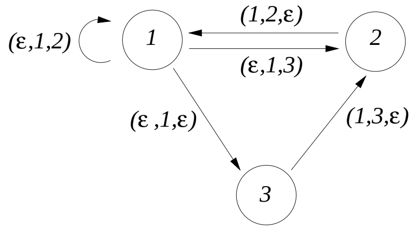

FIG. 2.3 – automate des préfixes-suffixes de la substitution de Tribonacci σ_3 : $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 13$, $3 \mapsto 1$

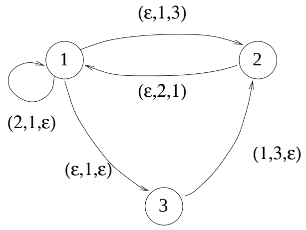

FIG. 2.4 – automate des préfixes-suffixes pour σ_4 : $1 \mapsto 21$, $2 \mapsto 13$, $3 \mapsto 1$

Proposition 2.2.1 *L'ensemble $\mathcal{D}$ muni du décalage de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est un système dynamique symbolique de type fini associé à la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{D}} = (m_{(p,a,s),(q,b,r)})_{((p,a,s),(q,b,r))\in\mathcal{P}^2}$ définie par*

$$m_{(p,a,s),(q,b,r)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma(b) = pas \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut maintenant répondre partiellement à la question sur l'image de Γ et de son injectivité.

Proposition 2.2.2 *On a $\Gamma(\Omega) \subset \mathcal{D}$. De plus, Γ est injective sur $\Gamma^{-1}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon)$, et $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon \subset \Gamma(\Omega)$, avec*

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{(p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0} \in \mathcal{D} \ ; \ (\exists\, i_0 \in \mathbb{N})(\forall\, i \geq i_0, \ p_i = \varepsilon) \ ou \ (\forall\, i \geq i_0, \ s_i = \varepsilon)\}.$$

Preuve Le fait d'avoir $\Gamma(\Omega) \subset \mathcal{D}$ est une conséquence directe de la remarque 2.1.1. L'injectivité de Γ sur $\Gamma^{-1}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon)$ provient de la formule (2.3). Si $\delta = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$, la suite des mots $\sigma^i(p_i) \ldots p_0.a_0s_0 \ldots \sigma^i(s_i)$ converge vers un mot infini x de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Celui-ci a tous ses facteurs dans $\mathcal{L}(\Omega)$ et appartient ainsi à Ω. La définition de Γ implique $\Gamma(x) = \delta$ et donc $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon \subset \Gamma(\Omega)$. ■

Les problèmes posés la surjectivité et l'injectivité de Γ se ramènent donc à l'étude précise de $\Gamma^{-1}\mathcal{D}_\varepsilon$. Par application du décalage (voir section 2.4), ceci revient à étudier les mots de Ω dont les développements ont tous leurs préfixes ou tous leurs suffixes vides.

2.3 Développement des points périodiques

Soit $\mathcal{D}_{min} = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}; \ \forall i \in \mathbb{N}, \ p_i = \varepsilon, \}$ et $\mathcal{D}_{max} = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}; \ \forall i \in \mathbb{N}, s_i = \varepsilon\}$.

Le but de cette section est de montrer que les inclusions $\Gamma(\Omega_{per}) \subset \mathcal{D}_{min}$ et $\Gamma\left(S^{-1}(\Omega_{per})\right) \subset \mathcal{D}_{max}$ (remarque 2.1.3) sont des égalités.

Si $(\varepsilon, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}_{min}$, les a_i forment une suite périodique, puisque l'automate défini sur $\mathcal{A}$ par $a \to b$ si $\sigma(b)$ commence par a est codéterministe. Ceci implique qu'il y a au plus d éléments dans $\mathcal{D}_{min}$. De même, $\mathcal{D}_{max}$ contient au plus d éléments. On en déduit aussi :

Lemme 2.3.1 *Soit $w \in \Omega$. Le développement $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ est dans $\mathcal{D}_{min}$ (respectivement $\mathcal{D}_{max}$) si et seulement si $w \in \Omega_{per}$ (respectivement $Sw \in \Omega_{per}$).*

Preuve Les preuves pour $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$ étant analogues, examinons seulement le cas des préfixes vides. On sait déjà que $\Gamma(\Omega_{per}) \subset \mathcal{D}_{min}$. Réciproquement, si $p_i = \varepsilon$ pour tout i, la suite $(a_i)_i$ est périodique. Soit l sa période. La partie positive w^+ est alors uniquement déterminée par $w^+ = w_0 w_1 \cdots = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nl}(a_0)$.

Les désubstitués $v^i = \theta^i(w)$ de w sont tels que $v^i = S^{|p_i|}\sigma(v^{i+1}) = \sigma(v^{i+1})$. Si $b_i = v^i_{-1}$ est la lettre d'indice -1 du mot v^i, la suite $(b_i)_i$ est périodique puisque $\sigma(b_{i+1}) = p_i b_i$. Si m est sa période, comme $w = \sigma^i(v^i)$, la partie w^- de w indexée négativement se termine par tous les $\sigma^i(b_i)$, ce qui implique $\ldots w_{-2}w_{-1} = w^- = \lim_{i\to\infty} \sigma^{i+m}(b_{i+m}) = \sigma^m(\lim_{i\to\infty} \sigma^i(b_{i+m})) = \sigma^m(w^-)$. En définitive $w = w^- \,.\, w^+ = \sigma^{lm}(w) \in \Omega_{per}$. ∎

Théorème 2.3.1 *On a*

$$\Gamma(\Omega_{per}) = \mathcal{D}_{min} \quad et \quad \Gamma(\, S^{-1}(\Omega_{per})\,) = \mathcal{D}_{max},$$

$$\Gamma^{-1}(\mathcal{D}_{min}) = \Omega_{per} \quad et \quad \Gamma^{-1}(\mathcal{D}_{max}) = S^{-1}(\Omega_{per}).$$

Preuve Si $e = (\varepsilon, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}_{min}$, les lettres a_i forment une suite périodique. Soit l sa période. Il existe un mot fini W tel que $\sigma^l(a_0) = a_0 W$. Soit $b_0 \in \mathcal{A}$ tel que $b_0 a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$ et b_i les lettres définies par $\sigma^l(b_i) = V_{i+1} b_{i+1}$ où les V_i sont des mots finis. Comme l'alphabet $\mathcal{A}$ est fini, il existe $j_0 > i_0$ tels que $b_{i_0} = b_{j_0}$. Par définition des b_i, on a $\sigma^{(j_0-i_0)l}(b_{i_0}) = v_{i_0+(j_0-i_0)} b_{i_0+(j_0-i_0)} = V_{j_0} b_{j_0}$. Ainsi, $k = j_0 - i_0$ et $V = V_{j_0}$ sont tels que $\sigma^{kl}(b_{i_0}) = V b_{i_0}$. Puisque $b_0 a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$, on a $b_{i_0} a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$. Le fait que $\sigma^{kl}(b_{i_0} a_0) = V b_{i_0} a_0 W$, avec W et V non vides par primitivité (quitte à remplacer kl par un multiple), entraîne donc que $w = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nkl}(b_{i_0}.a_0) \in \Omega_{per}$. Ainsi, $\Gamma(w) \in \mathcal{D}_{min}$. De plus, les définitions de θ et γ impliquent directement que les lettres d'indice 0 des $\theta^i w$ sont les a_i, ce qui prouve que $\Gamma(w) = e$.

Dans le cas où $e = (p_i, a_i, \varepsilon)_i \in \mathcal{D}_{max}$, la lettre a_0 vérifie $\sigma^l(a_0) = V a_0$, et on obtient une lettre b_{i_0} telle que $\sigma^{kl}(b_{i_0}) = b_{i_0} W$ avec $a_0 b_{i_0} \in \mathcal{L}(\Omega)$. Ainsi, $w = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nkl}(a_0.b_i) \in \Omega_{per}$ et vérifie $e = \Gamma(S^{-1}(w))$.

On a ainsi prouvé que $\mathcal{D}_{min} \subset \Gamma(\Omega_{per})$ et que $\mathcal{D}_{max} \subset \Gamma(\, S^{-1}(\Omega_{per})\,)$ ce qui, avec le lemme 2.3.1, termine la démonstration. ∎

Notons que Γ n'est pas nécessairement une bijection de Ω_{per} sur $\mathcal{D}_{min}$ ou de $S^{-1}(\Omega_{per})$ sur $\mathcal{D}_{max}$, comme le montre l'exemple suivant, où $S^{-1}(\Omega_{per})$ et $\mathcal{D}_{max}$ sont de cardinal différent.

Exemple. La substitution $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$ possède deux points périodiques u_1 et u_2 (de période 2) tandis que $\mathcal{D}_{min} = \{m_1, m_2\}$ et $\mathcal{D}_{max} = \{M\}$, avec :

$$u_1 = \lim_{n\to\infty} \sigma^{2n}(1.1) = \ldots 1321212111321.1321212111\ldots$$

$$u_2 = \lim_{n\to\infty} \sigma^{2n}(1.2) = \ldots 1321212111321.211132113211\ldots$$

$$m_1 = \Gamma(u_1) = ((\varepsilon,2,1),(\varepsilon,1,3))^\infty \qquad m_2 = \Gamma(u_2) = ((\varepsilon,1,3),(\varepsilon,2,1))^\infty,$$

$$M = \Gamma(S^{-1}(u_1)) = \Gamma(S^{-1}(u_2)) = (2,1,\varepsilon)^\infty.$$

La section suivante permet de ramener l'étude de $\mathcal{D}_\varepsilon$ à celle de $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$, et de régler ainsi les problèmes de la surjectivité de Γ dans $\mathcal{D}$ et de son injectivité en mesure.

2.4 Ordre et successeur

Sur des supports de système dynamiques symboliques de type fini semblables à $\mathcal{D}$, A. M. Vershik [90] utilise la terminologie des *compacts markoviens* et, à partir d'un ordre arbitraire sur l'alphabet, définit un ordre sur le support du système dynamique symbolique et un passage au successeur appelé *transformation adique*, en raison de la similarité avec les odomètres. Cette transformation fut d'abord introduite sur les diagrammes de Brattelli [39, 90], et a permis d'étudier le groupe de dimension des systèmes substitutifs [29]. Dans cette section, nous étudions la *transformation adique* obtenue sur $\mathcal{D}$, l'ordre $\prec$ sur $\mathcal{P}$ étant défini naturellement à partir de la substitution.

Plus précisément, pour deux éléments (p, a, s) et (q, b, r) de $\mathcal{P}$, on pose :

$$(p, a, s) \prec (q, b, r) \iff (\exists\, c \in \mathcal{A});\ \ (\, pas = qbr = \sigma(c)\,) \text{ et } (\,|p| < |q|\,). \tag{2.4}$$

Sur l'automate des préfixes-suffixes, deux étiquettes sont comparables si, et seulement si, elles marquent des transitions arrivant au même état. Pour cet ordre, un élément (p, a, s) est *minimal* si son préfixe p est vide et *maximal* si son suffixe s est vide. Ainsi, en chaque état de l'automate, arrivent une unique arête minimale $e = (\varepsilon, a, s)$ et une unique arête maximale $f = (p, b, \varepsilon)$.

Remarquons que si $(p, a, s) \in \mathcal{P}$ n'est pas maximal, alors l'élément (q, b, r) de $\mathcal{P}$ défini par $pas = qbr$ et $|p| + 1 = |q|$ est le plus petit des majorants stricts de (p, a, s).

Reprenons la substitution $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$, l'ordre $\prec$ est explicité figure 2.5.

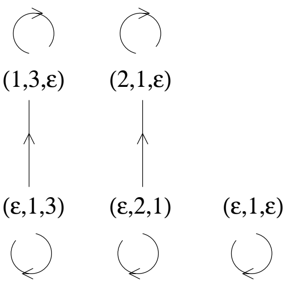

FIG. 2.5 – ordre $\prec$ pour $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$

L'ordre sur $\mathcal{P}$ permet de définir sur $\mathcal{D}$ un ordre lexicographique inverse encore noté $\prec$: si $(e_i)_i$ et $(f_i)_i$ sont deux suites de $\mathcal{D}$, on pose

$$(e_i)_i \prec (f_i)_i \iff (\exists\, i_0 \geq 0);\ (\forall\, i > i_0,\ e_i = f_i) \text{ et } (e_{i_0} \prec f_{i_0}). \tag{2.5}$$

Un élément $(e_i)_i$ de $\mathcal{D}$ est minimal (respectivement maximal) si pour tout i, e_i est un minimal (respectivement maximal) dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que tous les préfixes (respectivement suffixes) de $(e_i)_i$ sont vides. L'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{D}$ est donc $\mathcal{D}_{min}$, celui des éléments maximaux $\mathcal{D}_{max}$. Le théorème 2.3.1 signifie alors que $w \in \Omega$ est périodique pour σ si et seulement si son développement $\Gamma(w)$ est minimal, ou encore si et seulement si $\Gamma(S^{-1}w)$ est maximal.

Définition 2.4.1 *Soit $e = (e_i)_i \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{max}$, et i_0 le plus petit entier tel que e_{i_0} n'est pas maximal. L'image de e par l'application* successeur $\tau : \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{max} \to \mathcal{D}$ *est l'élément $\tau(e) = f$ de $\mathcal{D}$ défini par :*
- *si $i > i_0$, $f_i = e_i$,*
- *$f_{i_0} = (q_{i_0}, b_{i_0}, r_{i_0})$ défini par $e_{i_0} = (p_{i_0}, a_{i_0}, s_{i_0}) \prec f_{i_0}$ et $|q_0| = |p_0| + 1$.*
- *si $0 \leq i < i_0$ et $\sigma(b_{i+1}) = b_i r_i$, $f_i = (\varepsilon, b_i, r_i)$.*

Notons que, si $e \notin \mathcal{D}_{max}$, alors $\tau(e)$ est le plus petit des majorants stricts de e. La définition de τ implique facilement le résultat suivant :

Théorème 2.4.1 *Le successeur τ est une bijection de $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{max}$ dans $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{min}$. Si x est un élément de Ω tel que Sx n'est pas périodique pour σ, alors*

$$\Gamma(S(x)) = \tau(\Gamma(x)). \tag{2.6}$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \Omega\setminus S^{-1}(\Omega_{per}) & \xrightarrow{S} & \Omega\setminus\Omega_{per} \\ \Gamma\big\downarrow & & \big\downarrow\Gamma \\ \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{max} & \xrightarrow[\tau]{} & \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_{min} \end{array}$$

Revenons sur l'exemple de la substitution définie par $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$. Le point $m_1 = [(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)]^\infty \in \mathcal{D}$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} m_1 &=& (\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)\ldots \\ \tau(m_1) &=& (2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\ \tau^2(m_1) &=& (\varepsilon,1,\varepsilon)(1,3,\varepsilon) \quad - \quad - \quad \ldots \\ \tau^3(m_1) &=& (\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(2,1,\varepsilon) \quad - \quad \ldots \\ \tau^4(m_1) &=& (1,3,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\ \tau^5(m_1) &=& (\varepsilon,2,1)(2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad \ldots \\ \tau^6(m_1) &=& (2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\ \tau^7(m_1) &=& (\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,\varepsilon)(1,3,\varepsilon)\ldots \end{array}$$

et ainsi $\tau^7(m_1) = \Gamma(S^7 u_1)$.

Une solution naturelle pour définir le successeur d'un point maximal serait de lui associer un point minimal. Ceci est généralement impossible, puisque pour la plupart des substitutions, le nombre de points minimaux diffère de celui des points maximaux, comme dans le cas déjà vu de la substitution σ_4.

Dans le cas particulier où σ est une substitution *propre* (*id est* ne possède qu'un seul point périodique), l'application successeur τ est définie sur tout $\mathcal{D}$ en posant $\tau(M) = m$, où m est l'unique point minimal de $\mathcal{D}$ et M l'unique point maximal. Le système dynamique $(\mathcal{D},\tau)$ est alors un odomètre généralisé (voir [37]).

Le successeur permet de relier $\mathcal{D}_\varepsilon$ à $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$: la définition de τ implique facilement qu'un élément de $\mathcal{D}$ a tous ses préfixes (respectivement suffixes) vides à partir d'un certain rang si et seulement s'il appartient à l'orbite positive (respectivement négative) par τ de $\mathcal{D}_{min}$ (respectivement $\mathcal{D}_{max}$) :

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \left(\tau^n \mathcal{D}_{min} \cup \tau^{-n}\mathcal{D}_{max}\right).$$

Corollaire 2.4.1

$$\Gamma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n\Omega_{per}\Big) = \mathcal{D}_\varepsilon \qquad et \qquad \Gamma^{-1}(\mathcal{D}_\varepsilon) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n\Omega_{per}.$$

Exemple : substitution de Fibonacci. Cette substitution est définie par $\sigma_1(1) = 12$ et $\sigma_1(2) = 1$. Son automate des préfixes-suffixes est donné à la figure 2.1.

La substitution a deux points périodiques

$$u_1 = \lim_n \sigma^{2n}(1).\sigma^n(1) \text{ et } u_2 = \sigma(u_1) = \lim_n \sigma^{2n+1}(1).\sigma^n(1).$$

Ces deux points ont même développement en préfixes-suffixes : $\Gamma(u_1) = \Gamma(u_2) = [(\varepsilon, 1, 2)]^\infty$. En particulier, Γ n'est pas injective sur l'orbite positive de u_1 et u_2. L'image de cette orbite est l'ensemble des suites de $\mathcal{D}$ pour lesquelles les préfixes sont vides à partir d'un certain rang.

Par contre, Γ est injective sur l'orbite négative de u_1 et u_2. On a en effet $\Gamma(S^{-1}(u_1)) = [(\varepsilon, 1, \varepsilon)(1, 2, \varepsilon)]^\infty$ tandis que $\Gamma(S^{-1}(u_2)) = [(1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, \varepsilon)]^\infty$. L'image par Γ des orbites négatives de u_1 et u_2 est l'ensemble des suites de $\mathcal{D}$ pour lesquelles les suffixes sont vides à partir d'un certain rang. ■

De ce qui précède, et en particulier du corollaire 2.4.1, on déduit que Γ est une bonne représentation de Ω :

Théorème 2.4.2 *Soit σ une substitution primitive et non S-périodique. L'application Γ est continue surjective de Ω sur le support du système dynamique symbolique de type fini $\mathcal{D}$. Elle est injective sur $\Omega \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\Omega_{per}$ et est donc injective en mesure. De plus, pour tout $d \in \mathcal{D}$, on a card$(\Gamma^{-1}(d)) \leq$ card(Ω_{per}).*

Dans le cas particulier d'une substitution propre, Γ est un homéomorphisme et on retrouve un résultat de [29] disant que (Ω, S) est topologiquement isomorphe à une application adique sur le support d'un système dynamique symbolique de type fini. L'intérêt de notre résultat est que l'isomorphisme est constructif.

Cette étude sera complète lorsqu'on aura déterminé comment Γ agit sur la désubstitution θ et la substitution σ. Par construction, $\Gamma \circ \theta$ est le décalage T sur $\mathcal{D}$. L'application $\Gamma \circ \sigma$, qui est plus ou moins l'inverse de $\Gamma \circ \theta$, devrait donc être l'inverse du décalage T sur $\mathcal{D}$. Or, $\mathcal{D}$ est constitué de suites indexées par $\mathbb{N}$, et T^{-1} n'est pas défini sur $\mathcal{D}$: un élément de $\mathcal{D}$ peut-être prolongé de différentes manières vers la gauche. La proposition suivante signifie que le fait d'appliquer $\Gamma \circ \theta$ revient à choisir le plus petit des prolongements à gauche.

Proposition 2.4.1 *Soit T le* décalage sur $\mathcal{D}$ *et $\rho : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ l'application définie comme un* prolongement minimal à gauche *par $\rho(e_i)_i = (f_i)_i$ avec*

$$\begin{cases} f_0 &= (\varepsilon, b_0, s) \quad \text{où } e_0 = (p_0, a_0, s_0) \text{ et } \sigma(a_0) = b_0 s \\ f_i &= e_{i-1} \quad \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Les deux diagramme suivants sont commutatifs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \Gamma\downarrow & & \downarrow\Gamma \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[\rho]{} & \mathcal{D} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega \\ \Gamma\downarrow & & \downarrow\Gamma \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[T]{} & \mathcal{D} \end{array}$$

On a ainsi déterminé les règles suivantes sur le développement en préfixes-suffixes :

Propriété 2.4.1 (règles de développements) *Soit $w \in \Omega$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ son développement en préfixes-suffixes. Alors*

- *Le développement* $\Gamma(\sigma\, w) = (q_i, b_i, t_i)_{i\geq 0}$ *est tel que* $q_0 = \varepsilon$ *et* $q_{i+1} = p_i$ *pour* $i > 0$.
- *Si* $w \notin \Omega_{per}$, *le développement* $\Gamma(S\, w) = (r_i, c_i, u_i)_{i\geq 0}$ *vérifie*

$$\textit{pour tout } n \textit{ assez grand} \quad \sigma^n(r_n)\ldots\sigma^0(r_0) = \sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)a_0.$$

- *Si* $Sw \in \Omega_{per}$, *il existe* l *tel que pour tout* n, $\sigma^{nl}(p_{nl})\ldots\sigma(p_1)p_0w_0 = \sigma^{(n+1)l}(w_0)$. *De plus, le développement* $\Gamma(S\, w) = (r_i, c_i, u_i)_{i\geq 0}$ *vérifie* $\sigma^n(r_n)\ldots\sigma^0(r_0) = \varepsilon$.

Ces résultats s'interprètent dynamiquement par le fait que le système (Ω, θ) admet une partition markovienne (voir [58], partie 6.5).

Corollaire 2.4.2 *La partition de* Ω *par les ensembles* $\{\gamma^{-1}(p, a, s);\ (p, a, s) \in \mathcal{P}\}$ *est une partition de Markov de* (Ω, θ) *en mesure.*

Preuve Les ensembles $\gamma^{-1}(p, a, s)$ sont des ouverts-fermés de Ω disjoints deux à deux par définition et continuité de γ. Alors $(\mathcal{D}, T)$ est le système symbolique correspondant à la partition, puisque Γ est surjective et $(\mathcal{D}, T)$ est le système dynamique symbolique de type fini de matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ (formule (2.2.1)). Ceci assure que $\theta(\,\gamma^{-1}(p, a, s)\,)$ est l'union des $\gamma^{-1}(q, b, r)$ pour $m_{(p,a,s),(q,b,r)} = 1$. Enfin, si $e = (e_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$, par définition de Γ on a $\cap_{i\in\mathbb{N}}\theta^{-i}(\gamma^{-1}(e_i)) = \Gamma^{-1}(e)$, qui est presque sûrement réduit à un point. ∎

2.5 Echelles de numération et partition génératrice

Dans cette section, on montre que l'application Γ et le système dynamique symbolique de type fini $\mathcal{D}$ sont un interprétation dynamique de résultats sur les échelles de numération associées au point fixe d'une substitution [25].

Pour tout $b \in \mathcal{A}$, soit $(b) = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}\,;\ a_0 = b\}$ l'ensemble des étiquettes des chemins de l'automate qui partent de l'état b. Une conséquence de la surjectivité de Γ est : $\Gamma[\,b\,] = (b)$. Plus généralement, notons $<e_0, \ldots, e_p>$ un cylindre de longueur $p+1$ de $\mathcal{D}$. Les cylindres de $\mathcal{D}$ et ceux de Ω sont liés par la relation suivante.

Proposition 2.5.1 *Soient* $a \in \mathcal{A}$ *et* $k \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $n < |\sigma^k(a)|$, *il existe un unique chemin de longueur* k *de* $\mathcal{A}_\sigma$, *étiqueté* $e_0, \ldots, e_{k-1}$ *et arrivant en l'état* a, *tel que* $\Gamma(\,S^n\sigma^k[a]\,) \subset <e_0, \ldots, e_{k-1}>$.

Preuve L'unicité du chemin est évidente. L'existence du chemin se prouve par l'algorithme glouton suivant.

Si $a_k = a$ et $n_k = n$, on a $n_k < |\sigma^k(a_k)|$. Soit p_{k-1} le plus long préfixe de $\sigma(a_k)$ tel que $|\sigma^{k-1}(p_{k-1})| \leq n_k$ et a_{k-1} défini par $\sigma(a_k) = p_{k-1}a_{k-1}s_{k-1}$. Alors $(p_{k-1}, a_{k-1}, s_{k-1})$ étiquette une arête de l'automate entre a_{k-1} et a_k, et $S^{|p_{k-1}|}\sigma[a_k] \subset [a_{k-1}]$. De ce fait, si $n_{k-1} = n_k - |\sigma^{k-1}(p_{k-1})|$, on a

$$\begin{aligned} S^{n_k}\sigma^k[a_k] = S^{n_{k-1}}S^{|\sigma^{k-1}(p_{k-1})|}\sigma^k[a_k] &= S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}(S^{|p_{k-1}|}\sigma[a_k]) \\ &\subset S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}[a_{k-1}]. \end{aligned}$$

Par choix de p_{k-1} on a $n_{k-1} < |\sigma^{k-1}(a_{k-1})|$, ce qui assure qu'on peut réitérer le processus et obtenir une suite de lettres a_i, d'étiquettes (p_i, a_i, s_i) de l'automate entre a_i et a_{i+1}, et d'entiers $n_i < |\sigma^i(a_i)|$ vérifiant $n_i = n_{i+1} - |\sigma^i(p_i)|$ tels que :

$$S^n\sigma^k[a] = S^{n_k}\sigma^k[a_k] \subset S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}[a_{k-1}] \subset \cdots \subset S^{n_1}\sigma[a_1] \subset [a_0].$$

Ainsi, $\gamma(S^n\sigma^k[a]) = (p_0, a_0, s_0)$ et $\theta(S^n\sigma^k[a]) \subset S^{|p_1|}\sigma[a_2] \subset [a_1]$, et à nouveau $\gamma(\theta\, S^n\sigma^k[a]) = (p_1, a_1, s_1)$ avec $\theta^2(S^n\sigma^k[a]) \subset S^{|p_2|}\sigma[a_3] \subset [a_2]$. De proche en proche, on obtient $\gamma(\theta^i\, S^n\sigma^k[a]) = (p_i, a_i, s_i)$ pour $i < k$. ■

La surjectivité de Γ permet de préciser la proposition 2.5.1 en identifiant les préimages des cylindres de $\mathcal{D}$.

Corollaire 2.5.1 *Soit* $(e_i)_{i\leq k} = (p_i, a_i, s_i)_{i\leq k}$ *un chemin de longueur* $k+1$ *de l'automate des préfixes-suffixes. Si* $n = |\sigma^k(p_k)| + \cdots + |\sigma(p_1)| + |p_0|$*, alors*

$$<e_0, \ldots, e_k> = \bigcup_{\substack{b\in\mathcal{A}\,;\\ \sigma(b)=p_k a_k q_k}} \Gamma(S^n\,\sigma^{k+1}[b])$$

l'union étant disjointe.

Autrement dit, si $(q_k, b_k, t_k)_{0\leq k<N}$ est un chemin de l'automate des préfixes-suffixes arrivant en b_N on a :

$$\Gamma^{-1}\{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D},\ \ \forall\, k < N,\ (p_k, a_k, s_k) = (q_k, b_k, t_k) \text{ et } a_N = b_N\} \\ = S^{|\sigma^{N-1}(\mathrm{p}_{N-1})|+\ldots|\mathrm{p}_0|}(\sigma^N[b_N]). \quad (2.7)$$

On retrouve ici, comme cas particulier, la décomposition définie dans [25] d'un entier n dans la "base" de numération associée au point fixe d'une substitution. Cette décomposition leur permet de représenter les réels dans cette même base.

Corollaire 2.5.2 *Soit* a *une lettre de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\sigma(a) = av$ *avec* $v \in \mathcal{A}^+$*. Alors pour tout entier* n*, il existe dans* $\mathcal{A}_\sigma$ *un unique chemin arrivant en* a *noté* $(p_0, a_0, s_0)\ldots(p_{k-1}, a_{k-1}, s_{k-1})$*, avec* $p_{k-1} \neq \varepsilon$*, tel que* n *s'écrive :*

$$n = |\sigma^{k-1}(p_{k-1})| + \cdots + |\sigma(p_1)| + |p_0|.$$

On peut ainsi voir la proposition 2.5.1 comme une généralisation de [25] et les échelles de numération associées à une substitution comme des structures sous-jacentes à la dynamique de la désubstitution θ sur Ω.

Les cylindres $<e_0, \ldots, e_{k-1}>$ de longueur k forment une partition génératrice canonique de $\mathcal{D}$. L'injectivité de Γ, sauf sur un ensemble dénombrable, permet de remonter cette partition génératrice en une partition de Ω, constituée des préimages des cylindres de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire les $S^n\,\sigma^k[a]$.

Cette partition n'est pas topologique, dans la mesure où il est nécessaire d'isoler un nombre dénombrable de points qui ne sont pas séparés par la partition.

Ce résultat généralise celui obtenu dans [29], où les auteurs définissent une partition génératrice dans le cas d'une substitution propre. Au chapitre 3, nous aurons besoin de la proposition suivante pour montrer l'égalité de deux mesures sur Ω.

Proposition 2.5.2 *Soir* σ *une substitution primitive et* Ω *le système substitutif associé à* σ*.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$*, soit* $\Lambda_k = \{S^n\sigma^k[a];\ n \in \mathbb{N},\ a \in \mathcal{A},\ n < |\sigma^k(a)|\}$*. Les* Λ_k *forment une suite de partitions génératrice en mesure.*

Plus précisément, il existe un ensemble $\mathcal{N}$ *dénombrable tel que pour tout entier* k*,* $\Omega \setminus \mathcal{N} = \bigcup_{C\in\Lambda_k} C \setminus \mathcal{N}$*, où l'union est disjointe. Pour toute suite* $(C_k)_{k\geq 0}$ *avec* $C_k \in \Lambda_k$*,* $\cap C_k$ *est réduit à 0 ou 1 point ou bien consiste en un nombre fini de points de* $\mathcal{N}$*.*

Preuve Soit $(C_k)_{k\geq 0}$, $C_k \in \Lambda_k$ pour tout k, des sous-ensembles appartenant à chacune des partitions. D'après la proposition 2.5.1, $\Gamma(C_k)$ est inclus dans un unique cylindre de $\mathcal{D}$ de longueur k. Ainsi, $\cap_{k\geq 0}\Gamma(C_k)$ est inclus dans l'intersection de cylindres de longueur croissante de $\mathcal{D}$, qui soit est vide, soit contient un unique élément de $\mathcal{D}$. Dans le cas non vide, on a

$$\cap_{k\geq 0}\Gamma(C_k) = \Gamma(\cap_{k\geq 0} C_k) = \{e\} \quad \text{et donc} \quad \cap_{k\geq 0} C_k = \Gamma^{-1}\{e\}.$$

Soit $\mathcal{N}$ l'union dans Ω des orbites des points périodiques pour σ. Selon le théorème 2.4.2, si $e \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{D}$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est vide. Si $e \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est réduit à une point. Si $e \in \mathcal{D}_\varepsilon$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est fini et inclus dans $\mathcal{N}$.

La suite de partitions Λ_k sépare ainsi tout point de l'ensemble de mesure pleine $\Omega \setminus \mathcal{N}$. ∎

Concernant les partitions Λ_k, on notera que pour tout $C_k \in \Lambda_k$ et $C_{k+1} \in \Lambda_{k+1}$, C_{k+1} est inclus ou strictement disjoint de C_k.

2.6 Application

Nous détaillons ici sur un exemple comment nous allons, dans le chapitre suivant, utiliser la représentation de (Ω, S) par la transformation adique sur l'ensemble $\mathcal{D}$ pour représenter géométriquement le système substitutif (Ω, S).

Ainsi, on reprend l'exemple de la substitution $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$. L'objectif est de représenter $\mathcal{D}$ par un compact de $\mathbb{C}$ sur lequel le successeur s'interprète comme un échange de 3 morceaux. Le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence est $X^3 - X^2 - X - 1$. Notons α une racine de module inférieur à 1. Soit $\delta(\varepsilon) = 0$, $\delta(1) = 1$, $\delta(2) = \alpha - 1$ et $\delta(3) = 1/\alpha$ et soit la fonction $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(\,(p_i, a_i, s_i)_i\,) = \sum_{i\geq 0} \delta(p_i)\, \alpha^i.$$

On montrera à la proposition 3.1.1 que

$$\forall\, e = (p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}; \quad \varphi(\tau(e)) = \varphi(e) + \delta(a_0),$$

et que les images des cylindres $\mathcal{F}_i = \varphi(i)$, pour $i = 1, 2, 3$, sont disjointes en mesure dans le plan. L'image $\mathcal{F}$ de φ (cf. figure 2.6), qui a une structure auto-similaire, est ainsi stable par l'échange de morceaux défini sur chacun des $\mathcal{F}_i$ par $z \mapsto z + \delta(i)$. L'application φ étant injective en mesure, on obtient bien que le support du système dynamique symbolique de type fini $\mathcal{D}$ muni de l'application successeur τ est conjugué en mesure à un échange de morceaux dans le compact $\mathcal{F}$.

Enfin le fractal $\mathcal{F}$ se projette sur le tore $\mathbb{T}^2$ de sorte que les projections des $\delta(i)$ soient égales. Ainsi le système dynamique $(\mathcal{D}, \theta)$ admet pour facteur une translation du tore $\mathbb{T}^2$.

Plus précisément, à toute substitution primitive de type Pisot, sont associées deux représentations géométriques explicites des systèmes dynamiques $(\mathcal{D}, \tau)$ et (Ω, S), l'une est une translation minimale sur un tore, l'autre est un échange de morceaux euclidien. Les propriétés de Γ démontrées ici permettent de prouver que la représentation par un échange de morceaux est injective en mesure lorsque la substitution vérifie la condition combinatoire de coïncidences.

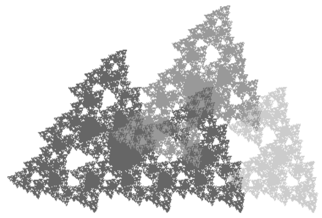

FIG. 2.6 – Fractal de Rauzy pour $\sigma_4 : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$

2.7 Mesure invariante par le successeur

Nous avons mis en évidence deux systèmes dynamiques sur l'ensemble $\mathcal{D}$.

Tout d'abord, nous venons de voir dans ce chapitre que $(\mathcal{D}, \tau)$ où τ est le successeur, est un système dynamique isomorphe en mesure au système substitutif engendré par la substitution, l'isomorphisme mesurable partant du système substitutif et à valeurs dans $\mathcal{D}$ étant de plus surjectif et continu. Ainsi, $(\mathcal{D}, \tau)$ est uniquement ergodique, la mesure invariante étant la mesure image $\Gamma_\star \mu_\Omega$ de la mesure invariante sur Ω.

Ensuite $\mathcal{D}$ muni décalage de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est un système dynamique symbolique de type fini. Un grand nombre de mesures invariantes existent sur ce système. Une se distingue en particulier, la mesure d'entropie maximale μ_{max}, qui se calcule aisément à partir de la matrice d'admissibilité de $\mathcal{D}$.

Dans cette section, on déduit du rapport entre cette matrice d'admissibilité et la matrice d'incidence de la substitution σ, une relation entre la mesure d'entropie maximale μ_{max} et la mesure μ_Ω invariante sur Ω. Cette relation permettra aux chapitres 4 et 5 d'obtenir des propriétés en mesure de (Ω, S) à partir de propriétés en mesure du système dynamique symbolique de type fini sur $\mathcal{D}$.

Nous supposerons que **la substitution σ est injective sur les lettres**. Ceci est en particulier vrai dès que la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ est de déterminant non nul, ce qui est le cas pour les substitutions de type Pisot.

Sous la condition d'injectivité, pour tout triplet $(p, a, s) \in \mathcal{P}$, il existe une unique lettre b telle que $\sigma(b) = pas$.

Proposition 2.7.1 *Soit σ une substitution primitive injective sur les lettres. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre à gauche de la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de σ, pour sa valeur propre dominante α. Soit $C_{max} = \sum_{b\in\mathcal{A}} \mathbf{v}_b\, \mu_\Omega[b]$. Alors la mesure d'entropie maximale sur $\mathcal{D}$ est définie sur les cylindres de $\mathcal{D}$ par*

$$\forall\, e_0 = (p_0, a_0, s_0), \ldots, e_N = (p_N, a_N, s_N) \in \mathcal{P},\ \ p_N a_N s_N = \sigma(b),$$
$$\mu_{max}[e_0 \ldots e_N] = C_{max} \begin{cases} \mathbf{v}_{a_0}\, \mu_\Omega[b]/\alpha^N & si\ p_i a_i s_i = a_{i+1}\ \forall\, 0 \le i < N \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve La matrice $\mathbf{M}_\mathcal{D}$ du système dynamique symbolique $\mathcal{D}$ est indexée par $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ et définie par

$$\forall\,(p,a,s),(p',a',s')\in\mathcal{P}\times\mathcal{P},\quad m_{(p,a,s),(p',a',s')}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad pas=\sigma(a')\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'automate des préfixes-suffixes étant fortement connexe, cette matrice est irréductible.

Soit z la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_{(p,a,s)})$ un vecteur propre à gauche associé. Soit $\mathbf{y}$ le vecteur indexé par $\mathcal{A}$ défini par $\mathbf{y}_b=\sum_{(p',a',s'),\sigma(b)=p'a's'}\mathbf{x}_{(p',a',s')}$.

Alors pour toute lettre b, on a :

$$\begin{aligned}
z\,\mathbf{y}_b &= \sum_{(p,a,s),\sigma(b)=pas} z\,\mathbf{x}_{(p,a,s)} = \sum_{\substack{(p,a,s),\\ \sigma(b)=pas}}\ \sum_{(p',a',s')\in\mathcal{P}} m_{(p',a',s'),(p,a,s)}\mathbf{x}_{(p',a',s')}\\
&= \sum_{\substack{(p,a,s),\\ \sigma(b)=pas}}\ \sum_{\substack{(p',a',s'),\\ \sigma(a)=p'a's'}} \mathbf{x}_{(p',a',s')} = \sum_{a\in\mathcal{A}} \mathrm{card}\{(p,s)\in(\mathcal{A}^*)^2,\ \sigma(b)=pas\} \sum_{\substack{(p',a',s'),\\ \sigma(a)=p'a's'}} \mathbf{x}_{(p',a',s')}\\
&= \sum_{a\in\mathcal{A}} (\mathbf{M}_\sigma)_{a,b}\,\mathbf{y}_a.
\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\mathbf{y}$ est vecteur propre à gauche de la matrice d'incidence de $\mathbf{M}_\sigma$ pour la valeur propre z. Les valeurs propres de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ sont donc des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$.

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur propre dominant à droite de $\mathbf{M}_\sigma$, constitué des mesures des cylindres de Ω : $\mathbf{u}_b=\mu_\Omega([b])$. Selon un calcul semblable au précédent, le vecteur $\mathbf{x}$ indexé par $\mathcal{P}$ et défini par $\mathbf{x}_{(p,a,s)}=\mu_\Omega([b])$, où $pas=\sigma(b)$ est un vecteur propre dominant à droite de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$. En effet, pour $(p,a,s)\in\mathcal{P}$, avec $pas=\sigma(b)$, on a

$$\begin{aligned}
(\,\mathbf{M}_{\mathcal{D}}\,\mathbf{x}\,)_{(p,a,s)} &= \sum_{(p',a',s')\in\mathcal{P}} m_{(p,a,s),(p',a',s')}\mathbf{x}_{(p',a',s')} = \sum_{\substack{(p',a',s')\in\mathcal{P}\\ a'=b,\sigma(b')=p'a's'}} \mu_\Omega([b'])\\
&= \sum_{b'\in\mathcal{A}} (\mathbf{M}_\sigma)_{b,b'}\,\mu_\Omega([b']) = \alpha\,\mu_\Omega([b]) = \alpha\,\mathbf{x}_{(p,a,s)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$ est la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$, et $\mathbf{x}$ est un vecteur propre dominant associé. La mesure d'entropie maximale a donc pour matrice

$$\mathbf{P}_{(p,a,s),(p',a',s')}=\begin{cases}\mu_\Omega[b']/(\alpha\,\mu_\Omega[b]) & \text{si } pas=\sigma(a') \text{ et } p'a's'=\sigma(b')\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre dominant à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$. Selon un raisonnement semblable au précédent, le vecteur $\mathbf{y}$ indexé par $\mathcal{P}$ et défini par $\mathbf{y}_{(p,a,s)}=\mathbf{v}_a$ est vecteur propre à gauche dominant de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}\,\mathbf{M}_{\mathcal{D}})_{(p,a,s)} &= \sum_{(p',a',s')\in\mathcal{P}} m_{(p',a',s'),(p,a,s)}\mathbf{y}_{(p',a',s')} = \sum_{\substack{(p',a',s')\in\mathcal{P}\\ \sigma(a)=p'a's'}} \mathbf{v}_{a'}\\
&= \sum_{a'\in\mathcal{A}} (\mathbf{M}_\sigma)_{a',a}\,\mathbf{v}_{a'} = \alpha\,\mathbf{v}_a = \alpha\,\mathbf{y}_{(p,a,s)}.
\end{aligned}$$

Par construction on a dans $\mathbb{R}^{\mathcal{P}}$: $<\mathbf{y},\mathbf{x}>= C_{max}$. La mesure d'entropie maximale est ainsi celle qui est donnée dans l'énoncé. ■

On aurait pu normaliser le vecteur $\mathbf{v}$ pour que la constante C_{max} soit égale à 1. Aux chapitres suivants, nous choisirons une normalisation différente de celle-ci pour le vecteur $\mathbf{v}$. Nous avons donc préféré exprimer un résultat indépendant de la normalisation de $\mathbf{v}$.

La formule (2.7) implique que la mesure induite sur $\mathcal{D}$ par celle de Ω est équivalente à la mesure d'entropie maximale :

Proposition 2.7.2 *Soit σ une substitution primitive injective sur les lettres. Il existe une unique mesure de probabilité sur $\mathcal{D}$ invariante par le successeur τ. Elle est équivalente à la mesure d'entropie maximale de $\mathcal{D}$.*

Preuve Puisque (Ω, S) et $(\mathcal{D},\tau)$ sont conjugués par l'application Γ, $(\mathcal{D},\tau)$ possède la propriété d'unique ergodicité de (Ω, S), l'unique mesure invariante étant la mesure induite de Ω par Γ.

Le vecteur $\mathbf{u} = (\mu_\Omega[a])_{a\in\mathcal{A}}$ constitue un vecteur propre dominant de la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de σ. On déduit de la formule (2.7) que

$$\forall\, e_0\ldots e_N \in \mathcal{P},\ \text{avec } e_k = (p_k, a_k, s_k) \text{ et } p_N a_N s_N = \sigma(b)$$
$$\mu_\Omega\, \Gamma^{-1}\,[e_0\ldots e_N] = \begin{cases} 1/\alpha^N\ \mu_\Omega[b] & \text{si } p_k a_k s_k = \sigma(a_{k+1})\,\forall\, k < N \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Soit $\mathbf{y}$ le vecteur indexé sur $\mathcal{P}$ défini par $\mathbf{y}_{(p,a,s)} = \mu[b]/\alpha$. Soit $\mathbf{y}_{max}$ le vecteur des probabilités initiales de la mesure d'entropie maximale. Ces deux vecteurs ont toutes leurs coordonnées non nulles, et on a $\forall\, e_0\ldots e_N \in \mathcal{P}$, $\mu_\Omega\ \Gamma^{-1}\,[e_0\ldots e_N] = (\mathbf{y}_{e_0}/(\mathbf{y}_{max})_{e_0})\,\mu_{max}[e_0\ldots e_N]$. La mesure invariante par τ et la mesure d'entropie maximale sont donc équivalentes. ■

On retrouve ainsi explicitement qu'un système adique muni du successeur est uniquement ergodique, la mesure invariante étant équivalente à la mesure d'entropie maximale du système [91].

Remarque. La proposition 2.7.2 signifie que la densité de la mesure μ_{max} par rapport à la mesure ${\Gamma^{-1}}_*\,\mu_\Omega$ existe : il s'agit d'une fonction constante sur les cylindres, déterminée par un vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ normalisé de telle façon que la mesure totale soit égale à 1.

Corollaire 2.7.1 *Soit σ une substitution primitive injective sur les lettres. Soit W un mot fini sur $\mathcal{P}$ reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. L'ensemble des mots de Ω dont le développement en préfixes-suffixes ne contient pas W comme facteur est de mesure nulle.*

Preuve Par construction, μ_{max} est invariante par le décalage sur $\mathcal{D}$. Soit W un mot fini sur $\mathcal{P}$ reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. Soit C_W l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}$ qui n'ont pas W pour facteur. Par ergodicité du décalage sur $\mathcal{D}$ par rapport à la mesure μ_{max}, on a $\mu_{max}\,\mathrm{C}_W = 0$. Puisque la mesure $\Gamma_\star\mu_\Omega$ invariante par τ est équivalente à μ_{max} on a $\mu_\Omega\,\Gamma^{-1}\mathrm{C}_W = 0$. ■

Si la substitution n'est pas injective sur les lettres, l'automate des préfixes-suffixes n'est pas déterministe : il existe deux lettres b et c telles que $\sigma(b) = \sigma(c)$ et pour toute décomposition $\sigma(b) = pas$, il existe deux flèches dans l'automate qui partent de a, vont vers b et c, et sont toutes deux étiquetées par (p, a, s). On obtient cependant des résultats identiques à ceux de cette section en modifiant l'ensemble $\mathcal{P}$ des étiquettes de l'automate, en y rajoutant la lettre b :

$$\mathcal{P}^\bullet = \{(p, a, s, b);\ pas = \sigma(b)\} \quad \text{et } \mathcal{D}^\bullet = \{(p_i, a_i, s_i, a_{i+1})_i \in {\mathcal{P}^\bullet}^{\mathbb{N}};\ (p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}\}.$$

Les ensembles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\bullet$ sont trivialement homéomorphes. Le système dynamique symbolique de type fini sur $\mathcal{D}^\bullet$ est déterministe, et les résultats précédents s'appliquent à $\mathcal{D}^\bullet$.

Chapitre 3

Représentation géométrique des systèmes substitutifs

Dans ce chapitre, on utilise la notion de développement en préfixes-suffixes définie au chapitre 2 pour représenter géométriquement les systèmes substitutifs de type Pisot.

On prouve ainsi que tout système substitutif de type Pisot admet pour facteur une translation minimale sur un groupe compact. Si la substitution est unimodulaire et vérifie une condition combinatoire, on prouve que le système dynamique est conjugué en mesure à un échange de morceaux dans un compact auto-similaire d'un espace euclidien.

Le contenu de ce chapitre a été écrit avec Vincent Canterini. Il a fait l'objet d'un article intitulé *Geometric Representation of primitive substitutions of Pisot type*, accepté pour publication par la revue *Transactions of the American Mathematical Society.*

3.1 Representation of substitutive system of Pisot type

In this section, as in [76], the prefix-suffix development and an arithmetic normalization of the eigenvectors of the matrix of σ are used to represent a substitutive system of Pisot type on a hyperplane.

3.1.1 Digit vectors for substitutions of Pisot type

Let σ be a **substitution of Pisot type** and $\mathbf{M}_\sigma$ the matrix associated to σ.

From now we use the notations of section 1.3. Let $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2, \ldots \alpha_r$ be the real eigenvalues of $\mathbf{M}_\sigma$, and $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$, $\alpha_{r+s+1} = \overline{\alpha_{r+1}}$, $\ldots$, $\alpha_{r+2s} = \overline{\alpha_{r+s}}$ the complex eigenvalues. Let $\mathbf{u_1}, \ldots \mathbf{u_d}$ be a algebraic normalized basis of right eigenvectors of $\mathbf{M}_\sigma$, while $\mathbf{v_1}, \ldots \mathbf{v_d}$ is the dual basis of left eigenvectors, as explained in section 1.3.3.

For every eigenvalue α_k, let δ_k be the map which sends any finite word W of $\mathcal{A}^*$ to the scalar product of $\mathbf{v_k}$ by the abelianized vector $\mathbf{l}(W)$.

$$\begin{array}{rll} \delta_k : & \mathcal{A}^* & \to \mathbb{K}_k \\ & W & \mapsto < \mathbf{l}(W), \mathbf{v_k} > . \end{array} \tag{3.1}$$

The following equations are easily deduced from scalar product bilinearity, the fact that $\mathbf{v_k}$ is a left eigenvector of $\mathbf{M}_\sigma$, and from formula (1.1).

$$\begin{array}{lrcl}
\forall\, j \in \mathcal{A} & \delta_k(j) & = & (\mathbf{v_k})_j, \\
\forall\, W_1, W_2 \in \mathcal{A}^* & \delta_k(W_1\, W_2) & = & \delta_k(W_1) + \delta_k(W_2), \\
\forall\, W \in \mathcal{A}^* & \delta_k(\sigma(W)) & = & \alpha_k\, \delta_k(W).
\end{array}$$

Set the *digit map*:

$$\begin{array}{rccl}
\delta: & \mathcal{A}^* & \to & \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \\
 & W & \mapsto & (\delta_k(W))_{2 \le k \le r+s}.
\end{array} \tag{3.2}$$

The map δ is a homomorphism on $\mathcal{A}^*$ with respect to concatenation:

$$\forall\, W_1, W_2 \in \mathcal{A}^* \quad \delta(W_1\, W_2) = \delta(W_1) + \delta(W_2). \tag{3.3}$$

Moreover, if $\mathbf{M}_{diag}$ denotes the diagonal matrix of size $s+r-1$ containing the contracting eigenvalues with no pair of complex conjugates, $\mathbf{M}_{diag}$ and σ satisfy a commutation relation:

$$\forall\, W \in \mathcal{A}^*,\;\; \delta(\sigma(W)) \;=\; \mathbf{M}_{diag}\, \delta(W) \quad \mathbf{M}_{diag} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_{r+s} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

The Rauzy fractal of the substitution $\sigma_3(1) = 12$, $\sigma_3(2) = 13$, $\sigma_3(3) = 1$ (Figure 3.1) is obtained in [76] as the closure of the points $\delta(W)$, over all the prefixes W of a fixed point of the substitution. With the same definition, one can build a compact set for every substitution of Pisot type (see [7, 83]). Some properties of these compact sets are proved in [42, 66, 83]. The aim of Section 3.1.2 is to extend to all of Ω and onto this compact set, the map defined on the orbit of the periodic points of Ω to obtain the compact set. In Section 2.6 was given an example of the methods used in the following.

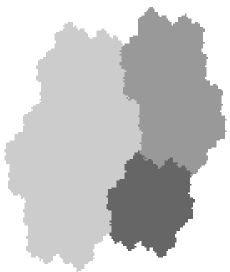

FIG. 3.1 – The Rauzy fractal

3.1.2 Representation of the substitutive system in a geometrical space

Proposition 1.3.2 implies that Theorem 2.4.2 is satisfied by every substitution of Pisot type: the prefix-suffix development Γ is well defined on Ω. In the next lemma, thanks to this development, we define on Ω a map which is equivalent to gathering in a vector all the geometric representations of C. Holton and L. Zamboni [42].

Lemma 3.1.1 *Let w be a word in Ω and $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ be its prefix-suffix development. The sequence of points $\delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)\,)$ has a limit in the space $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^s$ as n tends to infinity. The following map φ, called* representation map of Ω in the space, *is well-defined from Ω on $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^s$ and is continuous.*

$$\begin{aligned}\varphi(w) &= \lim_{n\to+\infty}\delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)\,)\\ &= \sum_{i\geq 0}\mathbf{M}_{diag}^i\,\delta(p_i) = \begin{pmatrix}\sum_{i\geq 0}\delta_2(p_i)\,{\alpha_2}^i\\ \vdots\\ \sum_{i\geq 0}\delta_{r+s}(p_i)\,{\alpha_{r+s}}^i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Proof The three equalities are deduced from formula (3.4) which implies:

$$\delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)\,) = \sum_{i=0}^{n}\mathbf{M}_{diag}^i\,\delta(p_i).$$

The map φ is well-defined and continuous because it is the limit of a power series which is normally convergent, since the number of vectors $\delta(p_j)$ is finite and the norm of $\mathbf{M}_{diag}$ is smaller than 1: $||\mathbf{M}_{diag}|| = \max\{|\alpha_k|;\, k>1\} < 1$. ∎

Set $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$ and $\mathcal{F}_i = \varphi([i])$ for each letter i. Two examples are given in Figure 3.2.

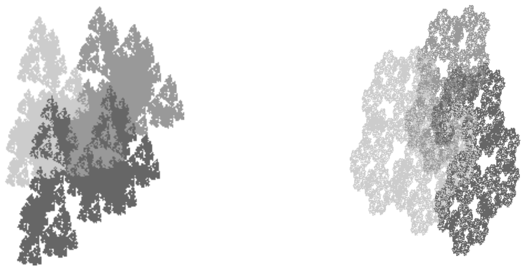

FIG. 3.2 – Fractals generated by 132,21323,321323132 and 12,3,31

The map φ is oubviously onto from Ω to $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$. The injectivity of φ will be the object of Section 3.3.1.

The way the shift map S and the substitution σ operate on the prefix-suffix development map (Lemma 2.4.1) permits us to express how S and σ operate in the space $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^s$ via the map φ:

Proposition 3.1.1 *For every w in Ω, if w_0 is the 0^{th} coordinate of w, we have:*

$$\varphi(Sw) = \varphi(w) + \delta(w_0), \tag{3.5}$$
$$\varphi(\sigma w) = \mathbf{M}_{diag}\,\varphi(w). \tag{3.6}$$

Proof Let $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$, $\Gamma(S\,w) = (q_i, b_i, t_i)_{i\geq 0}$ and $\Gamma(\sigma\,w) = (r_i, c_i, u_i)_{i\geq 0}$, be the prefix-suffix developments of w, Sw and σw respectively.

According to Lemma 2.4.1, if Sw is not a periodic point of σ, we have:

$$\exists n_0,\ \forall n\geq n_0 \qquad \sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)w_0 = \sigma^n(q_n)\ldots\sigma^0(q_0).$$

This is enough to prove the equality (3.5) if Sw is not periodic:

$$\begin{aligned}
\varphi(Sw) &= \lim_{n\to+\infty} \delta(\,\sigma^n(q_n)\ldots\sigma^0(q_0)\,) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)w_0\,) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)\,) + \delta(w_0) \\
&= \varphi(w) + \delta(w_0).
\end{aligned}$$

If Sw is a periodic point of σ, from Property 2.4.1, the development of Sw has empty prefixes, which implies $\varphi(Sw) = 0$. Moreover, the sequence $(p_i)_{i\geq 0}$ is periodic of period l. Thus, we get for every integer n and every $i < l$:

$$\sigma^{i+nl}(p_{i+nl})\ldots p_0 w_0 = \sigma^{nl}(\,\sigma^i(p_i)\ldots p_0 w_0\,),$$

which implies

$$\delta(\,\sigma^{i+nl}(p_{i+nl})\ldots p_0 w_0\,) = \mathbf{M}_{diag}{}^{nl}\,\delta(\,\sigma^i(p_i)\ldots p_0 w_0\,).$$

Since the number of vectors $\delta(\,\sigma^i(p_i)\ldots p_0 w_0\,)$ is finite and $\mathbf{M}_{diag}$ is a contracting linear map, we conclude:

$$\begin{aligned}
\varphi(w) &= \lim_{n\to+\infty} \delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots p_0\,) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \delta(\,\sigma^n(p_n)\ldots p_0 w_0\,) - \delta(w_0) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbf{M}_{diag}{}^{nl}\,\delta(\,\sigma^i(p_i)\ldots p_0 w_0\,) - \delta(w_0) \\
&= 0 - \delta(w_0) = \varphi(Sw) - \delta(w_0).
\end{aligned}$$

Finally, the definition of $r_i = p_{i-1}$ for $i \geq 1$ leads to formula (3.6):

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma w) &= \mathbf{M}^0_{diag}\,\delta(\varepsilon) + \sum_{j\geq 1} \mathbf{M}^j_{diag}\,\delta(p_{j-1}) \\
&= \mathbf{M}_{diag}\,\varphi(w).
\end{aligned}$$

■

Relations (3.5) and (3.6) suggest that we could define an exchange of domains $\mathcal{T}$ on $\mathcal{F}$ which satisfies a conjugacy relation with the shift S. As the exchange map would be different on each image cylinder $\varphi[i] = \mathcal{F}_i$, such a definition is possible only if the images of cylinders are completely disjoint, which is not the case even for Rauzy substitution (see [66]). Nevertheless, for Rauzy substitution, the domains $\mathcal{F}_i$ are disjoint up to a set of measure zero, and it is possible to define an exchange of domains in $\mathcal{F}$ which is measurably conjugate with the shift on Ω. We will prove in Section 3.3 that this is more generally true when the substitution verifies the combinatorial condition of coïncidences.

Another way to define a factor of (Ω, S) is to quotient the space in such a way that the projections of the vectors $\delta(k)$ defining the exchange of domains are equal. This is done in Section 3.2, using the geometrical interpretation of the map φ given in the next subsection.

3.1.3 Geometrical interpretation: equivalent representation in $\mathbb{R}^{d-1}$

In the next lemma, we modify the basis of $\mathbb{C}^d$ consisting of right eigenvectors of $\mathbf{M}_\sigma$ and obtain a basis in $\mathbb{R}^d$.

Lemma 3.1.2 *The following family of vectors is a basis of* $\mathbb{R}^d$.

$$\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}, Re\, \mathbf{u_{r+1}}, Im\, \mathbf{u_{r+1}}, \ldots Re\, \mathbf{u_{r+s}}, Im\, \mathbf{u_{r+s}}\}.$$

Proof Consider a real linear combination of the vectors equal to zero:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{r} z_k\, \mathbf{u_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} (x_k \operatorname{Re} \mathbf{u_k} + y_k \operatorname{Im} \mathbf{u_k}) = 0.$$

This can be rewritten in $\mathbb{C}^d$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{r} z_k \mathbf{u_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} ((\frac{x_k - i y_k}{2})\, \mathbf{u_k} + (\frac{x_k + i y_k}{2})\, \mathbf{u_{k+s}}) = 0.$$

Linear independence of the vectors $\mathbf{u_i}$ in $\mathbb{C}^d$ implies that $z_k = \frac{x_k - i y_k}{2} = 0$ for all k, that is $z_k = x_k = y_k = 0$ for all k. ■

We call *contracting hyperplane of* $\mathbf{M}_\sigma$ the hyperplane of $\mathbb{R}^d$ generated by the vectors :

$$\mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_r}, \operatorname{Re} \mathbf{u_{r+1}}, \operatorname{Im} \mathbf{u_{r+1}}, \ldots \operatorname{Re} \mathbf{u_{r+s}}, \operatorname{Im} \mathbf{u_{r+s}}.$$

The space $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ embeds onto this hyperplane:

Corollary 3.1.1 *The following linear map* $p_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{R}^d$ *is one-to-one from* $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ *onto the contracting hyperplane of* $\mathbf{M}_\sigma$.

$$p_{\mathcal{H}}(z_2, \ldots, z_{r+s}) = \sum_{k=2}^{r} z_k\, \mathbf{u_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} (2\, Re(z_k)\, Re\, \mathbf{u_k} - 2\, Im(z_k)\, Im\, \mathbf{u_k}). \tag{3.7}$$

The next lemma means that applying the map δ to a finite word W is equivalent to projecting the vector $\mathbf{l}(W)$ onto the contracting hyperplane of the matrix $\mathbf{M}_\sigma$ parallel to the expanding direction of $\mathbf{M}_\sigma$.

Lemma 3.1.3 *If* $q_{\mathcal{H}}$ *denote the linear projection of* $\mathbb{R}^d$ *onto the contracting hyperplane of* $\mathbf{M}_\sigma$ *parallel to the expanding direction of* $\mathbf{M}_\sigma$*, then:*

$$\forall\, W \in \mathcal{A}^* \quad p_{\mathcal{H}}\, \delta(W) = q_{\mathcal{H}}\, \mathbf{l}(W).$$

Proof By definition of $p_{\mathcal{H}}$ and δ, we have:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{H}}\, \delta(W) = \textstyle\sum_{k=2}^{r} &< \mathbf{l}(W), \mathbf{v_k} > \mathbf{u_k} \\ &+ \textstyle\sum_{k=r+1}^{r+s} 2 \operatorname{Re} < \mathbf{l}(W), \mathbf{v_k} > \operatorname{Re} \mathbf{u_k} - 2 \operatorname{Im} < \mathbf{l}(W), \mathbf{v_k} > \operatorname{Im} \mathbf{u_k}. \end{aligned}$$

Write the vector $\mathbf{l}(W)$ in the basis of the contracting hyperplane:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(W) &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} z_k \mathbf{u_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} (x_k \operatorname{Re} \mathbf{u_k} + y_k \operatorname{Im} \mathbf{u_k}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} z_k \mathbf{u_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} (x_k - i\, y_k)/2\, \mathbf{u_k} + (x_k + i\, y_k)/2\, \overline{\mathbf{u_k}}. \end{aligned}$$

The fact that the $\mathbf{u_k}$ are the dual basis of the $\mathbf{v_k}$ (Formula (1.2)) implies that:

$$\begin{array}{rl} k = 1 \ldots r & <\mathbf{l}(W), \mathbf{v_k}>= z_k, \\ k = r+1 \ldots r+s & <\mathbf{l}(W), \mathbf{v_k}>= (x_k - i\, y_k)/2. \end{array}$$

So that we get:

$$\mathbf{l}(W) =<\mathbf{l}(W), \mathbf{v_1}> \mathbf{u_1} + p_{\mathcal{H}}\, \delta(W).$$

Since $q_{\mathcal{H}}$ sends $\mathbf{u_1}$ to zero and leaves the contracting hyperplane of $\mathbf{M}_\sigma$ unchanged, we conclude :

$$q_{\mathcal{H}}\, \mathbf{l}(W) =<\mathbf{l}(W), \mathbf{v_1}> q_{\mathcal{H}}(\mathbf{u_1}) + q_{\mathcal{H}}\, p_{\mathcal{H}}\, \delta(W) = p_{\mathcal{H}}\, \delta(W).$$

■

Consequently, one way to construct the image $\varphi(\Omega)$ is to consider an infinite word w in Ω, embed it as a broken line in the space $\mathbb{R}^d$ (replacing each letter i by the i-th canonical vector), and then project each "vertex" of the broken line on the contracting hyperplane of $\mathbf{M}_\sigma$ parallel to the expanding direction of $\mathbf{M}_\sigma$. The set $\varphi(\Omega)$ is the closure of the projections.

The prefix-suffix development brings us to consider on the broken line the points corresponding to the prefixes $\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)$: the sequence of projections in the hyperplane of these points has a limit which belongs to $\varphi(\Omega)$, and this limit is $\varphi(w)$ (see Figure 3.3).

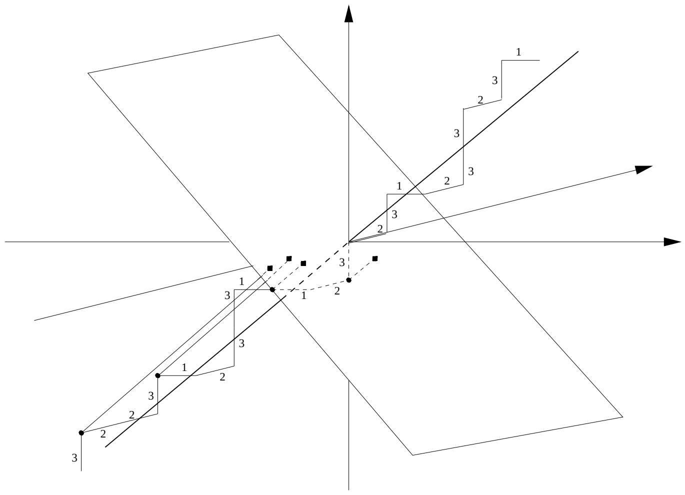

FIG. 3.3 – Projection on the hyperplane

3.2 Representation of (Ω, S) on the torus

To define, in the Pisot case, a commutation relation with a translation, we need to quotient the space so that the projections of the vectors $\delta(k)$ are equal. We prove in this section that the set $\mathcal{L}$ defined by

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{k=1}^{d} n_k \delta(k);\; n_k \in \mathbb{Z}\,, \sum_{k=1}^{d} n_k = 0 \right\} \tag{3.8}$$

is a lattice of the $\mathbb{R}$ vector space $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$, that is a discrete subgroup of rank $d-1$, so that the quotient of $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ modulo this lattice is isomorphic to the torus $\mathbb{T}^{d-1}$. We obtain in that way a representation of Ω on the torus, which satisfies a commutation relation with a translation. We prove that this translation is minimal.

The main argument in all this section is the following proposition:

Proposition 3.2.1 *The coordinates in the canonical basis of $\mathbb{R}^d$ of the expanding right eigenvector $\mathbf{u_1}$ of $\mathbf{M}_\sigma$ are rationally independent.*

Proof Let $(z_k)_{1\leq k\leq d}$ be the coordinates of the vector $\mathbf{u_1}$ in the canonical basis of $\mathbb{R}^d$. Consider a rational combination of z_k which is equal to zero:

$$\sum_{j=1}^d r_j z_j = 0 \qquad (r_j)_{1\leq j\leq d} \in \mathbb{Q}^d.$$

Since the vector $\mathbf{u_1}$ was defined so that every z_j belongs to $\mathbb{Q}(\alpha)$, it is possible to apply the canonical automorphisms $\tau_k : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha_k)$ and $\overline{\tau_k} : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\overline{\alpha_k})$ to the preceding equality, for every $1 \leq k \leq r+s$, so that we get:

$$k = 1 \ldots r+s \quad \sum_{j=1}^d \tau_k(r_j)\, \tau_k(z_j) = \sum_{j=1}^d r_j\, \tau_k(z_j) = 0,$$

$$k = r+1 \ldots r+s \quad \sum_{j=1}^d r_j\, \overline{\tau_k}(z_j) = 0.$$

Thus, the vector $(r_j)_{1\leq j\leq d}$ is orthogonal in $\mathbb{C}^d$ to the vectors $(\tau_k(z_j))_{1\leq j\leq d}$ and $(\overline{\tau_k}(z_j))_{1\leq j\leq d}$, which are by construction equal to $\mathbf{u_k}$ and $\overline{\mathbf{u_k}}$. This means that the vector $(r_j)_{1\leq j\leq d}$ is orthogonal to a full basis of the space $\mathbb{C}^d$, and must be zero. ■

By definition, the set $\mathcal{L}$ is discrete and generated by the $d-1$ vectors $(\delta(k) - \delta(1))_{2\leq k\leq d}$ in $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$. Thus, this set is a lattice if and only if the vectors $(\delta(k) - \delta(1))_{2\leq k\leq d}$ are linearly independent.

Lemma 3.2.1 *The $d-1$ vectors $(\delta(k) - \delta(1))_{2\leq k\leq d}$ are $\mathbb{R}$-linearly independent in $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$, so that they form a basis of this $\mathbb{R}$ vector space.*

Proof Since the embedding $p_{\mathcal{H}}$ is linear and one-to-one, the vectors $\delta(k) - \delta(1)$ are free if and only if the vectors $p_{\mathcal{H}}\,\delta(k) - p_{\mathcal{H}}\,\delta(1)$ are free in $\mathbb{R}^d$. Consider a linear combination of those vectors which is equal to zero:

$$\sum_{k=2}^d z_k\,(p_{\mathcal{H}}\,\delta(k) - p_{\mathcal{H}}\,\delta(1)) = 0.$$

Denote by $\mathbf{e_1}, \ldots \mathbf{e_d}$ the canonical basis of $\mathbb{R}^d$. Lemma 3.3 implies:

$$q_{\mathcal{H}}\left(\sum_{k=2}^d z_k\,(\mathbf{e_k} - \mathbf{e_1})\right) = 0.$$

Since $q_{\mathcal{H}}$ is a projection parallel to $\mathbf{u_1}$, its kernel is generated by $\mathbf{u_1}$ and there exists a real z_1 such that:

$$-(\sum_{k=2}^d z_k)\,\mathbf{e_1} + \sum_{k=2}^d z_k\,\mathbf{e_k} = z_1\,\mathbf{u_1}.$$

If z_1 is different from zero, the coordinates of $\mathbf{u_1}$ in the canonical basis are rationally dependent, which is impossible (Proposition 3.2.1). Thus, z_1 is zero and the independence of the vectors $\mathbf{e_k}$ implies that all the z_k are also equal to zero. ■

Corollary 3.2.1 *The following map $i_{\mathcal{L}}$ is an isomorphism from the $(d-1)$-torus $\mathbb{T}^{d-1}$ onto the quotient $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$.*

$$\begin{array}{rccl} i_{\mathcal{L}}: & \mathbb{T}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1}/\mathbb{Z}^{d-1} & \to & \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} \\ & (z_2, \dots, z_d) \ \ mod\ \mathbb{Z}^{d-1} & \mapsto & \sum_{k=2}^d z_k \ (\delta(k) - \delta(1)) \quad mod\ \mathcal{L} \end{array}$$

We can define the geometric representation map on the torus of the dynamical system:

Corollary 3.2.2 *If φ is the representation map of Ω in $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ (Lemma 3.1.1), the map $\varphi_{\mathcal{L}} = \varphi \ mod\ \mathcal{L} : \Omega \mapsto \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} \simeq \mathbb{T}^{d-1}$ is well defined and continuous. We call it the* representation map of Ω on the torus. *For every $w \in \Omega$, the following equality is satisfied in $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$:*

$$\varphi_{\mathcal{L}}(Sw) = \varphi_{\mathcal{L}}(w) + \delta(1).$$

Define the map $\mathcal{R}$ on $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$ by :

$$\forall z \in \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}, \qquad \mathcal{R}(z) = z + \delta(1) \bmod \mathcal{L}.$$

Thus, the diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{S} & \Omega \\ {\scriptstyle \varphi_{\mathcal{L}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathcal{L}}} \\ \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} & \xrightarrow[z \mapsto z+\delta(1)]{} & \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} \end{array}$$

Corollary 3.2.1 means that the addition of $\delta(1)$ on $(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s)/\mathcal{L}$ is conjugate to the addition of ${i_{\mathcal{L}}}^{-1}(\delta(1))$ on the torus $\mathbb{T}^{d-1}$, so that the minimality of one of these dynamical systems is equivalent to the minimality of the other. However, minimal translations on the torus are characterized by the Proposition 1.1.1.

Thus, the addition of $\delta(1)$ on $(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s)/\mathcal{L}$ is minimal if and only if the coordinates of ${i_{\mathcal{L}}}^{-1}(\delta(1))$ in the canonical basis are rationally independent from 1. We note that this is not equivalent, but in fact stronger than to prove that the vector ${i_{\mathcal{L}}}^{-1}(\delta(1))$ is rationally independent of the vectors generating the lattice $\mathbb{Z}^{d-1}$, that is the canonical basis.

Proposition 3.2.2 *The number 1 is rationally independent from the coordinates of $\delta(1)$ in the family $(\delta(k) - \delta(1))_{2 \le k \le d}$.*

Proof Denote z_k the coordinates of $\delta(1)$ in the basis $(\delta(k) - \delta(1))_{2 \le k \le d}$ of $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$:

$$\delta(1) = \textstyle\sum_{k=2}^d z_k \left(\delta(k) - \delta(1) \right).$$

If $\{\mathbf{e_1}, \dots \mathbf{e_d}\}$ denote the canonical basis of $\mathbb{R}^d$, applying the embedding $p_{\mathcal{H}}$ to this equality and using Lemma 3.1.3 implies:

$$q_{\mathcal{H}} \left((1 + \textstyle\sum_{k=2}^d z_k)\, \mathbf{e_1} - \sum_{k=2}^d z_k\, \mathbf{e_k} \right) = 0.$$

But the kernel of $q_{\mathcal{H}}$ is the expanding direction of $\mathbf{M}_\sigma$, so that their exists a real z_1 with:

$$z_1\, \mathbf{u_1} = (1 + \textstyle\sum_{k=2}^d z_k)\, \mathbf{e_1} - \sum_{k=2}^d z_k\, \mathbf{e_k}.$$

The number z_1 cannot be zero, otherwise every z_k would be zero and the preceding equality would become $\mathbf{e_1} = 0$. If the z_k and 1 are rationally dependent, then the first coordinate of $\mathbf{u_1}$ is a rational combination of z_k, which are the other coordinates of $\mathbf{u_1}$ in the canonical basis. Proposition 3.2.1 tells that this is impossible. ∎

As $i_{\mathcal{L}}$ is an isomorphism, we get that the addition of ${i_{\mathcal{L}}}^{-1}(\delta(1))$ on the torus $\mathbb{T}^{d-1}$ is minimal, so that:

Corollary 3.2.3 *The addition of $\delta(1)$ on $(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s)/\mathcal{L}$ is minimal.*

We deduce from this that $\varphi_{\mathcal{L}}$ is onto.

Theorem 3.2.1 *Any dynamical system (Ω, S) generated by a substitution of Pisot type on d letters admits as a topological factor a minimal translation on the torus $\mathbb{T}^{d-1}$.*

Indeed, the map ${i_{\mathcal{L}}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{L}}$ is continuous and onto, and realizes a semi-conjugation between the shift map S on Ω and a minimal translation on $\mathbb{T}^{d-1}$.

Proof The representation map $\varphi_{\mathcal{L}}$ is such that for all $w \in \Omega$ we have $\varphi_{\mathcal{L}}(S(w)) = \varphi_{\mathcal{L}}(w) + \delta(1)$.

The addition of $\delta(1)$ on $(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s)/\mathcal{L}$ is minimal so that if w is a point of Ω, the orbit of $\varphi_{\mathcal{L}}(w)$ under this addition is dense in $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$. Thus we have:

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} &= \overline{\{\varphi_{\mathcal{L}}(w) + n\delta(1);\, n \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{\varphi_{\mathcal{L}}(S^n w);\, n \in \mathbb{Z}\}} \\ &= \varphi_{\mathcal{L}}(\overline{\{S^n w;\, n \in \mathbb{Z}\}}) = \varphi_{\mathcal{L}}(\Omega).\end{aligned}$$

Hence, $\varphi_{\mathcal{L}}$ is onto and the addition of $\delta(1)$ on $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$ is a factor of (Ω, S). ∎

Thus, the following diagram commute. Note that we don't know if the semi-conjugacy map is one-to-one almost everywhere. This will be the object of chapter 4.

$$\begin{array}{ccc}\Omega & \xrightarrow{S} & \Omega \\ {\scriptstyle {i_{\mathcal{L}}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{L}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle {i_{\mathcal{L}}}^{-1}\circ\varphi_{\mathcal{L}}} \\ \mathbb{T}^{d-1} & \xrightarrow[+{i_{\mathcal{L}}}^{-1}\delta(1)]{} & \mathbb{T}^{d-1}\end{array}$$

This theorem gives some information about the image $\mathcal{F}$ of φ.

Corollary 3.2.4 *The compact subset $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$ of $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ has non empty interior and strictly positive Lebesgue measure.*

Proof The fact that $\varphi_{\mathcal{L}}(\Omega)$ is equal to the full torus $\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L}$ means that $\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathcal{L}}(\mathcal{F} + \mathbf{x})$ contains the parallelogram $\left\{\sum_{k=2}^{d} z_k(\delta(k) - \delta(1));\quad 0 \le z_k \le 1\right\}$, which has non empty interior since the $(\delta(k) - \delta(1))$ are a basis. As $\mathcal{F}$ is a closed subset of $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$, Baire's theorem implies that there exists a vector $\mathbf{x}$ such that $\mathcal{F} + \mathbf{x}$ has non empty interior, and so is $\mathcal{F}$. Thus, the measure of this set must be strictly positive. ∎

In what follows, we study more precisely the image $\mathcal{F}$ in the unimodular case.

3.3 Representation with an exchange of domains

We suppose from here on that σ **is of Pisot type and unimodular**. We prove in Section 3.3.1 that the induced measure on $\mathcal{F}$ of the measure on Ω by the representation map φ is proportional to the Lebesgue measure on each cylinder of Ω, which implies that φ is one-to-one almost everywhere on cylinders. Furthermore, if the substitution satisfies a certain combinatorial condition, we prove in Section 3.3.2 that φ is one-to-one almost everywhere, which allows us to define in Section 3.3.3 an exchange of domains on $\mathcal{F}$ which is measure-theoretically conjugate to the shift map on Ω.

3.3.1 Identification of the induced measure

Recall that by primitivity of σ, the symbolic dynamical system $(\Omega, S, \mathcal{B}, \mu_\Omega)$ is uniquely ergodic, where the Borel sets are generated by the cylinders $[U_1.U_2]$ for $U_1, U_2 \in \mathcal{A}^*$, and μ_Ω is defined on cylinders as follows : $\mu_\Omega[U_1.U_2] = \lim_{n\to+\infty}(1/n)\,\mathrm{card}\,\{i < n;\ S^i(u)$ begins with $U_1U_2\}$ (u denotes a periodic point for σ).

The vector of the measure of the cylinders $[i]$ is an eigenvector of $\mathbf{M}_\sigma$ corresponding to the Perron-Frobenius eigenvalue. Denote by $\mu_\mathcal{F}$ the restriction to $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$ of the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.

The following lemma gives a generalization of the work on substitutions on two letters of B. Host in [46].

Lemma 3.3.1 *If σ is of Pisot type and unimodular, there exists a non zero constant C such that for every letter i,*

$$\mu_\mathcal{F}\,\varphi[i] = C\,\mu_\Omega\,[i].$$

Proof The recognizability of σ implies that every cylinder $[i]$ can be decomposed in terms of cylinders $[j]$:

$$[i] = \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{A},\,(p,i,t)\in\mathcal{P}\,;\\ \sigma(j)=pit}} S^{|p|}\,\sigma[j] \quad \text{the union being disjoint.}$$

Proposition 3.1.1 implies then:

$$\varphi\left(S^{|p|}\,\sigma[j]\right) = \delta(p) + \mathbf{M}_{diag}\varphi[j].$$

The map associated to $\mathbf{M}_{diag}$ is a diagonal mapping. So, for every Borel set B of $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^s$:

$$\begin{aligned}\mu_\mathcal{F}(\mathbf{M}_{diag}B) &= \textstyle\prod_{i=2}^{r}|\alpha_i|\,\prod_{j=r+1}^{r+s}|\alpha_j|^2\,\mu_\mathcal{F}(B)\\ &= \frac{|\det\mathbf{M}_\sigma|}{\alpha}\,\mu_\mathcal{F}(B) \ = 1/\alpha\,\mu_\mathcal{F}(B).\end{aligned}$$

As $\mu_\mathcal{F}$ is invariant under translation we can write:

$$\begin{aligned}\mu_\mathcal{F}(\varphi[i]) &\le \textstyle\sum_{\sigma(j)=pit}\mu_\mathcal{F}(\delta(p)+\mathbf{M}_{diag}\varphi[j]) = \sum_{\sigma(j)=pit}1/\alpha\,\mu_\mathcal{F}(\varphi[j])\\ &= 1/\alpha\ \textstyle\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}\,\mu_\mathcal{F}(\varphi[j]\ ) = 1/\alpha\,(\,\mathbf{M}_\sigma\,(\,\mu_\mathcal{F}\varphi[j]\,)_{1\le j\le d}\,)_i.\end{aligned}$$

The number α is the dominant eigenvalue of the matrix $\mathbf{M}_\sigma$, so by Perron-Frobenius theorem it follows that the above inequalities are in fact equalities. The vector $(\,\mu_\mathcal{F}(\varphi[j])\,)_{1\le j\le d}$ is then a dominant eigenvector of $\mathbf{M}_\sigma$ and is, since α is a simple eigenvalue, proportional to the eigenvector for α: $(\,\mu_\Omega([j])\,)_{1\le j\le d}$. Moreover, the constant of proportionality can not be zero as $\mu_\mathcal{F}(\mathcal{F})$ is not zero, by Corollary 3.2.4. ∎

Corollary 3.3.1 *Let σ be a unimodular substitution of Pisot type. If $\sigma(j) = pit$ and $\sigma(k) = qiu$, with $(p,i,t), (q,i,u) \in \mathcal{P}$, then*

$$\mu_\mathcal{F}(\,\varphi(S^{|p|}\ \sigma[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma[k])\,) = 0.$$

Each $\varphi[i]$ is a union, disjoint in measure, of $\varphi(S^{|p|}\,\sigma[j])$:

$$\varphi[i] = \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{A},\,(p,i,t)\in\mathcal{P};\\ \sigma(j)=pit}} \varphi(S^{|p|}\,\sigma[j]).$$

Proof In the proof of Lemma 3.3.1, there is equality in measure on every line. ∎

Proposition 3.3.1 *If σ is of Pisot type and unimodular, the induced measure on $\mathcal{F}$ of the measure of Ω under the representation map φ is proportional to the Lebesgue measure on each cylinder of Ω : there exists a constant C such that for every letter i and for every Borel set $B \subset [i]$ of Ω,*

$$\mu_{\mathcal{F}}(\varphi B) = C\,\mu_\Omega(B)\,.$$

Proof From Proposition 2.5.2, the sequence of partitions is generating in measure:

$$\Omega = \bigcup_{n,i;\,n<|\sigma^k(i)|} S^n \sigma^k[i].$$

It suffices to prove the equality of the measures on every subset $S^n\sigma^k[i]$. However, if p is the prefix of length n of $\sigma^k(i)$, we have

$$\mu_{\mathcal{F}}(\varphi(S^n\sigma^k[i])) = \mu_{\mathcal{F}}(\delta(p) + \mathbf{M}^k_{diag}\varphi[i]) = 1/\alpha^k \mu_{\mathcal{F}}(\varphi[i]).$$

Furthermore, $\mu_\Omega(S^n\sigma^k[i]) = \mu_\Omega(\sigma^k[i])$ from the shift invariance. A similar calculation as in the Lemma 3.3.1, gives that

$$(\mu_\Omega([i]))_{1\le i\le d} = \mathbf{M}_\sigma\ (\mu_\Omega(\sigma[i]))_{1\le i\le d} = \mathbf{M}^k_\sigma\ (\mu_\Omega(\sigma^k[i]))_{1\le i\le d}.$$

Since $(\mu_\Omega([i]))_{1\le i\le d}$ is an eigenvector of $\mathbf{M}_\sigma$ we deduce that:

$$\mu_\Omega(S^n\sigma^k[i]) = 1/\alpha^k\mu_\Omega([i]) = 1/C\ \mu_{\mathcal{F}}(\varphi(S^n\sigma^k[i]))\,.$$

As φ is continuous and $\mathcal{F}$ is the image of this map, the formula we just got: $\mu_{\mathcal{F}}(\varphi B) = C\,\mu_\Omega(B)$, means that μ_Ω is proportional to the induced measure on $\mathcal{F}$. ∎

We deduce from this that φ is almost everywhere one-to-one on each cylinder $[i]$ of Ω:

Proposition 3.3.2 *If σ is of Pisot type and unimodular, the representation map φ is one-to-one almost everywhere on each cylinder $[i]$: there exists a subset $\mathcal{N} \subset \Omega$ of measure zero such that*

$$w_1, w_2 \in [i]\backslash\mathcal{N} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) \qquad \Longrightarrow \qquad w_1 = w_2.$$

Proof From Corollary 3.3.1, the sets

$$\mathcal{N}_i = \bigcup_{\substack{j\neq k \text{ or } (p,i,t)\neq(q,i,u)\\ \sigma(j)=pit,\sigma(k)=qiu}} \varphi(S^{|p|}\,\sigma[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma[k])$$

have measure zero in $\mathcal{F}$. Thus, by Proposition 3.3.1, the sets $\varphi^{-1}(\mathcal{N}_i)$ have measure zero in Ω. Let $\mathcal{N}_0 = \{S^n(w); \forall n \in \mathbb{Z},\ \exists l \in \mathbb{N},\ \sigma^1(w) = w\}$ be the orbit of periodic points of Ω. The following set have measure zero :

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0\ \cup \bigcup_{j\le d,\,k\ge 0,\,n<|\sigma^k(j)|} S^n\,\sigma^k\,\varphi^{-1}(\mathcal{N}_j).$$

Let $w_1 \neq w_2 \in [i]$ such that $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. We have to prove that w_1 and w_2 are then in $\mathcal{N}$.

There exists unique (p,i,t), (q,i,u), j and k such that $w_1 \in S^{|p|}\,\sigma[j]$ and $w_2 \in S^{|q|}\,\sigma[k]$. If $(p,i,t) \neq (q,i,u)$ or $j \neq k$, w_1 and w_2 belong to $\varphi^{-1}(\mathcal{N}_i) \subset \mathcal{N}$. Otherwise, w_1 and w_2 satisfy

$w_1 = S^{|p|}\,\sigma(w_1')$ and $w_2 = S^{|p|}\,\sigma(w_2')$, with $w_1', w_2' \in [i_1]$. This implies that $\varphi(w_1') = \varphi(w_2')$. Applying this calculation an infinite number of times, we obtain that w_1 and w_2 belong to $\mathcal{N}$ or they have the same prefix-suffix development. But the development map Γ is one-to-one everywhere off the orbit $\mathcal{N}_0$ of the periodic points of σ, which is contained in $\mathcal{N}$. Thus, w_1 and w_2 belong to $\mathcal{N}$. ■

For every $x \in \mathcal{F}$, let n_x denote the number of points w in Ω such that $\varphi(w) = x$. An easy consequence of the injectivity on cylinders is that for almost every $x \in \mathcal{F}$, we have $n_x \leq d$. Propositions 3.3.1 and 3.3.2 mean that the induced measure $\varphi_\star\mu_\Omega$ has density Cn_x for the Lebesgue measure $\mu_\mathcal{F}$.

3.3.2 Pisot unimodular case with coincidences

Propositions 3.3.1 and 3.3.2 also mean that the injectivity in measure of the map φ can be expressed in terms of measures of a finite number of sets :

Corollary 3.3.2 *The injectivity in measure of the representation map φ is equivalent to the fact that the images of cylinders overlap on a set of measure zero.*

In [43], C. Holton and L. Q. Zamboni give in the 2-dimensional case, sufficient conditions for injectivity, in terms of Haussdorf dimension. A consequence of those conditions is the following :

Proposition 3.3.3 (Holton,Zamboni [43]) *Let σ be a substitution on 2 letters. If the Haussdorf dimension of $\mathcal{F}$ is strictly positive and $\mathcal{D}$ has a unique minimal element, then the representation map h is one to one off of a set of measure zero.*

From a completely different point of view, for substitutions on two letters, B. Host [46] and C. Holton [41] have proved independently that if a geometric representation map is measure-theoretically one-to-one, then the substitution σ satisfies the coincidence condition given in definition 1.9.1, introduced by F.M. Dekking in [20] for substitutions of constant length and generalized to all substitutions by P. Arnoux and S. Ito in [7]. We recall that it is unknown, even in the case $d = 2$, if every substitution of Pisot type satisfies the coincidence condition.

Proposition 3.3.4 *If σ is of Pisot type, unimodular and satisfies the coincidence condition, then the representation map φ is one-to-one almost everywhere: there exists a subset $\mathcal{N}_0 \in \Omega$ of measure zero such that*

$$w_1, w_2 \in \Omega\backslash\mathcal{N}_0 \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) \qquad \Longrightarrow \qquad w_1 = w_2.$$

Proof Fix (j,k) in $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. By hypothesis, there exists i such that $\sigma^n(j) = pit$ and $\sigma^n(k) = qiu$, with $\mathbf{l}(p) = \mathbf{l}(q)$ or $\mathbf{l}(t) = \mathbf{l}(u)$. According to Corollary 3.3.1, $\varphi(S^{|p|}\,\sigma^n[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma^n[k])$ has measure zero.

If the coincidence condition is on the prefixes, the two vectors $\delta(p)$ and $\delta(q)$ are equal. Hence, the set $\varphi(S^{|p|}\,\sigma^n[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma^n[k])$ of measure zero is equal to:

$$\begin{aligned}\varphi(S^{|p|}\,\sigma^n[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma^n[k]) &= (\delta(p) + \mathbf{M}^n_{diag}\,\varphi[j]) \cap (\delta(q) + \mathbf{M}^n_{diag}\,\varphi[k]) \\ &= \delta(p) + \mathbf{M}^n_{diag}(\varphi[j] \cap \varphi[k]).\end{aligned}$$

Since the Lebesgue measure is invariant under translation and $\mathbf{M}_{diag}$ is a linear map of determinant $\pm 1/\alpha$, we deduce that:

$$\begin{aligned}0 &= \mu_\mathcal{F}(\,\varphi(S^{|p|}\,\sigma^n[j]) \cap \varphi(S^{|q|}\,\sigma^n[k])\,) = \mu_\mathcal{F}(\,\delta(p) + \mathbf{M}^n_{diag}(\varphi[j] \cap \varphi[k])\,) \\ &= 1/\alpha^n\,\mu_\mathcal{F}(\,\varphi[j] \cap \varphi[k]\,) = 1/\alpha^n\,\mu_\Omega(\,\varphi^{-1}(\varphi[j] \cap \varphi[k])\,).\end{aligned}$$

Let $\mathcal{N}$ be the subset of measure zero defined in Proposition 3.3.2. Then the following subset $\mathcal{N}_0$ of Ω is of measure zero:

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \bigcup_{j \neq k} \varphi^{-1}(\varphi[j] \cap \varphi[k]).$$

Let $w_1, w_2 \in \Omega$ such that $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. Then, if $(w_1)_0 = (w_2)_0$, by definition of N, w_1 and w_2 belong to N. Otherwise, w_1 and w_2 are in $\varphi^{-1}(\varphi[(w_1)_0] \cap \varphi[(w_2)_0])$. In each case, w_1 and w_2 belong to $\mathcal{N}_0$, that is to say φ is one-to-one off a subset of measure zero.

However if the coincidence condition is on the suffixes, the vectors $\delta(t)$ and $\delta(u)$ are equal. Similar arguments than before lead to the calculation:

$$\begin{aligned}
0 &= \mu_{\mathcal{F}}(\,\varphi\, S^{|p|}\,\sigma^n[j] \cap \varphi\, S^{|q|}\,\sigma^n[k]\,) \\
&= \mu_{\mathcal{F}}(\,(\delta(p) + \varphi\,\sigma^n[j]) \cap (\delta(q) + \varphi\,\sigma^n[k])\,) \\
&= \mu_{\mathcal{F}}(\,(\delta(\sigma^n(j)) - \delta(s) + \varphi\,\sigma^n[j]) \cap (\delta(\sigma^n(k)) - \delta(r) + \varphi\,\sigma^n[k])\,) \\
&= \mu_{\mathcal{F}}(\,-\delta(s) + (\delta(\sigma^n(j)) + \varphi\,\sigma^n[j]) \cap (\delta(\sigma^n(k)) + \varphi\,\sigma^n[k])\,) \\
&= \mu_{\mathcal{F}}(\,(\delta(\sigma^n(j)) + \varphi\,\sigma^n[j]) \cap (\delta(\sigma^n(k)) + \varphi\,\sigma^n[k])\,) \\
&= \mu_{\mathcal{F}}(\,\varphi\, S^{|\sigma^n(j)|}\sigma^n[j] \cap \varphi\, S^{|\sigma^n(k)|}\sigma^n[k]\,) = \mu_{\mathcal{F}}(\,\varphi\,\sigma^n S[j] \cap \varphi\,\sigma^n S[k]\,) \\
&= 1/\alpha^n\, \mu_{\mathcal{F}}(\,\varphi\, S[j] \cap \varphi\, S[k]) = 1/\alpha^n\, \mu_{\Omega}(\,S^{-1}\varphi^{-1}(\varphi S[j] \cap \varphi S[k])\,).
\end{aligned}$$

In this case we consider the set of measure zero defined by:

$$\mathcal{N}_0' = \mathcal{N} \bigcup_{j \neq k} S^{-1}\varphi^{-1}(\varphi S[j] \cap \varphi S[k])\,.$$

A similar argument yields that φ is one-to-one on $\Omega \backslash \mathcal{N}_0'$. ■

3.3.3 Exchange of domains in the coincidence case

We suppose now that σ is of Pisot type, unimodular and satisfies the coincidence condition. The fact that the representation map φ is measure-theoretically one-to-one implies that the image of Ω under φ can be decomposed as a disjoint union:

$$\varphi(\Omega) = \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{d} \varphi[i] \qquad \text{disjoint almost everywhere.}$$

As a consequence, if we set $\mathcal{F}_i = \varphi[i]$, the following exchange of domains $\mathcal{T}$ is defined almost everywhere on $\mathcal{F}$ (see an example in Figure 3.4) :

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{T}: & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & x \in \mathcal{F}_i & \mapsto & x + \delta(i). \end{array}$$

Proposition 3.1.1 now means that the following diagrams commute.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\mathcal{T}"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Omega \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\mathbf{M}_{diag}"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

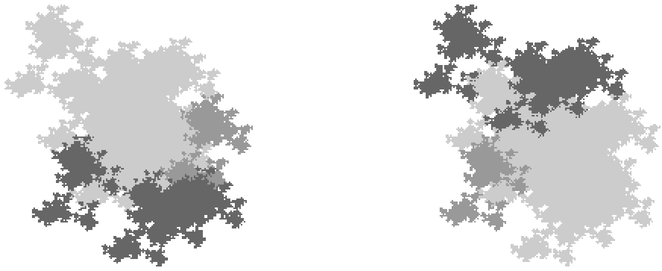

FIG. 3.4 – Exchange of domains generated by 131,1,1132

But the set $\mathcal{F}$ has a self-similar structure in the following sense: if for each prefix p we call h_p the contracting map defined by

$$\begin{array}{rccl} h_p: & \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s & \to & \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{M}_{diag}\, \mathbf{x} + \delta(p), \end{array}$$

then the partition of each cylinder on the form $[i] = \bigcup_{\sigma(j)=pit} S^{|p|}\sigma[j]$ and the injectivity of φ imply that the images $\mathcal{F}_i$ of cylinders decompose as the following partition, which is disjoint almost everywhere:

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{\sigma(j)=pit} h_p(\mathcal{F}_j). \qquad \text{disjoint almost everywhere.} \tag{3.9}$$

Thus, the compact set $\mathcal{F}$ is tiled by the self-similar tiles $\mathcal{F}_i$ as defined in [53].

This proves that the representation map φ is a measure-theoretic isomorphism between (Ω, S) and the transformation $\mathcal{T}$ on the self-similar set $\mathcal{F}$. As the transformation p is a linear isomorphism from $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ onto $\mathbb{R}^{d-1}$, we get the following theorem.

Theorem 3.3.1 *If σ is a substitution on d letters which is of Pisot type, unimodular and satisfies the coincidence condition, (Ω, S) is measure-theoretically conjugate to an exchange of domains on a self-similar compact subset of $\mathbb{R}^{d-1}$.*

More precisely, the representation map $p_{\mathcal{H}} \circ \varphi$ is continuous from Ω onto its image $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$, one-to-one off a subset of Ω of measure zero, and realizes a conjugation between the shift map on Ω and an exchange of domains defined almost everywhere on $p_{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$.

Example (see Figure 3.5) Let σ be the substitution $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 31$, $3 \mapsto 1$ and β be a contracting eigenvalue of $\mathbf{M}_\sigma$. The matrix $\mathbf{M}_{diag}$ is simply (β) and the vector $\delta = (\delta(1), \delta(2), \delta(3))$ can be chosen as $(1, \beta - 1, \beta^2 - \beta - 1)$. Then $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$ has the following self-similar structure:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \beta\mathcal{F}_1 \cup (\beta\mathcal{F}_2 + \beta^2 - \beta - 1) \cup \beta\mathcal{F}_3 \\ \mathcal{F}_2 &= \beta\mathcal{F}_1 + 1 \\ \mathcal{F}_3 &= \beta\mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

One can remark that Formula (3.9) is verified by all substitution of Pisot type if we replace the disjoint union by a simple union. This gives a new proof of a recent result due to V.S. Sirvent and Y. Wang in [83].

Proposition 3.3.5 ([83]) *If σ is of Pisot type, the sets $\mathcal{F}_i$ have non empty interior.*

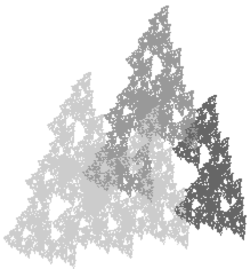

FIG. 3.5 – The fractal generated by 12,31,1

Proof By Corollary 3.2.4, $\mathcal{F}$ has non empty interior, so that there exists an integer i_0 such that $\mathcal{F}_{i_0}$ has non empty interior. The self-similar structure of $\mathcal{F}$ (Formula (3.9)), and the fact that the prefix-suffix automaton is strongly connected imply that each $\mathcal{F}_i$ contains a copy of $\mathcal{F}_{i_0}$: there exists a finite sequence of prefix $p_1, \ldots, p_k$ such that $h_{p_1} \ldots h_{p_k}(\mathcal{F}_{i_0}) \subset \mathcal{F}_i$, so that $\mathcal{F}_i$ have non empty interior. ■

In [83], the authors also prove that each $\mathcal{F}_i$ is the closure of its interior.

3.4 Suffixes construction

The representation map φ we defined takes only in account the prefixes p_i of the prefix-suffix development of points of Ω. It is also possible, as done in [77] to define a representation map with the suffixes of this development:

$$\forall\, w \in \Omega \quad \varphi'(w) = \sum_{i \geq 0} \mathbf{M}_{diag}^{j}\, \delta(s_i) \, \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \quad \text{with } \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}.$$

Formula (3.4) implies that the maps φ and ψ are linked by the relation

$$\forall\, w \in \Omega \qquad \varphi'(w) = -\varphi(w) - \delta(w_0) = -\varphi(Sw).$$

So that the prefix and suffix constructions are completely equivalent. This is coherent if one considers the fact that every substitutive system has zero entropy: thus, knowledge of past of a point of Ω, that is its negative part described by φ, is "equivalent" to knowledge of the future, that is its positive part described by φ'.

3.5 Récapitulatif et problèmes ouverts

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 3.2.1, qui affirme l'existence d'une semi-conjugaison continue entre le décalage sur Ω et une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "S"] \arrow[d, "i_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{L}}"'] & \Omega \arrow[d, "i_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{L}}"] \\
\mathbb{T}^{d-1} \arrow[r, "\text{translation minimale}"'] & \mathbb{T}^{d-1}
\end{tikzcd}$$

Cette semi-conjugaison a été obtenue en composant diverses applications, comme décrit dans le diagramme ci-dessous.

La substitution est supposée et de type Pisot.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \Omega \arrow[d, "\Gamma"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\tau\ \text{transformation adique}"'] \arrow[d, "\varphi\circ\Gamma^{-1}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\varphi\circ\Gamma^{-1}"] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathcal{T}\ \text{pseudo-échange de morceaux}"'] \arrow[d, "p_{\mathcal{L}}"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "p_{\mathcal{L}}"] \\
\left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} \arrow[r, "\text{translation minimale}"'] \arrow[d, "i_{\mathcal{L}}^{-1}"'] & \left(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s\right)/\mathcal{L} \arrow[d, "i_{\mathcal{L}}^{-1}"] \\
\mathbb{T}^{d-1} \arrow[r, "\text{translation minimale}"'] & \mathbb{T}^{d-1}
\end{tikzcd}
$$

– Toutes les semi-conjugaisons sont continues;
– Γ est injective sauf sur un ensemble dénombrable;
– $i_{\mathcal{L}}$ est un homéomorphisme;
– Si σ est unitaire avec coïncidences :
  – $\mathcal{T}$ est un échange de morceaux;
  – $\mathcal{F}$ est un ensemble auto-similaire.

Les semi-conjugaisons dont on ne sait pas à priori qu'elles sont des conjugaisons en mesure sont la représentation φ et la projection $p_{\mathcal{L}}$. Nous venons de montrer que la condition de coïncidences est une condition suffisante pour l'injectivité en mesure de φ. Par contre, ces méthodes n'apportent aucun résultat sur l'injectivité de la projection $p_{\mathcal{L}}$. On sait simplement que les fibres de $p_{\mathcal{L}}$ sont bornées, par compacité de $\mathcal{F}$. Plus précisément :

Remarque : extension finie du facteur équicontinu maximal. Dès que la substitution est unimodulaire, on a vu que la représentation géométrique φ est injective en mesure sur les cylindres $[i]$ de Ω. Ainsi, presque toutes les fibres de cette représentation géométrique contiennent au plus d points de Ω (un point dans chaque cylindre au plus). Puisque $\varphi(\Omega)$ est borné, la projection $p_{\mathcal{L}}$ de $\varphi(\Omega)$ dans le tore est elle aussi à fibre finie. Ainsi, dans le cas unimodulaire, un système substitutif de type Pisot est toujours une extension finie d'une translation torique. En particulier, tout système substitutif unimodulaire de type Pisot est une extension finie de son facteur équicontinu maximal.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder ces problèmes d'injectivité sous un angle totalement différent, en se concentrant sur le support de système dynamique symbolique de type fini $\mathcal{D}$. Nous allons ainsi définir une condition nécessaire et suffisante en terme de graphes pour l'injectivité de la semi-conjugaison $\varphi \circ \Gamma^{-1}$ définie sur $\mathcal{D}$, puis pour celle de $p_{\mathcal{L}} \circ \varphi \circ \Gamma^{-1}$. Les propriétés de Γ déterminées au chapitre 2 permettront d'en déduire que ces conditions caractérisent aussi l'injectivité de la représentation géométrique φ, de la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}} = p_{\mathcal{L}} \circ \varphi$, ou de sa projection $i_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{L}}$ dans $\mathbb{T}^{d-1}$.

Chapitre 4

Critère d'injectivité des représentations géométriques

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les substitutions unimodulaires de type Pisot. En combinant

- une vision formelle de la représentation géométrique,
- la structure combinatoire du système décrite par l'automate des préfixes-suffixes,
- la structure numérique du système provenant en particulier de la matrice d'incidence de la substitution,

on définit au moyen de graphes des conditions nécessaires et suffisantes explicites pour l'injectivité en mesure de la représentation géométrique φ et de sa projection dans le tore $\varphi_{\mathcal{L}}$.

La définition de la représentation φ et l'injectivité en mesure du développement en préfixes-suffixes Γ ont pour conséquence que la caractérisation de l'injectivité en mesure de la représentation φ est équivalente à la détermination les couples de développements en préfixes-suffixes distincts $(p_i, a_i, s_i)_i$ et $(q_i, a_i, s_i)_i$ tels que $\sum_i \mathbf{M}^i_{diag}\delta(p_i) = \sum_i \mathbf{M}^i_{diag}\delta(q_i)$, c'est-à-dire

$$\sum_i \mathbf{M}^i_{diag}(\delta(p_i) - \delta(q_i)) = 0. \tag{4.1}$$

Comme premier pas l'injectivité en mesure de φ, à la section 4.2, on recherche les suites de vecteurs de la forme $\delta(p) - \delta(q)$ qui vérifient la formule (4.1). On caractérise ainsi les suites de vecteurs $\mathbf{x}_i$ qui vérifient la formule $\sum_i \mathbf{M}^i_{diag}\mathbf{x}_i = 0$, où les $\mathbf{x}_i$ sont simplement pris dans un ensemble fini construit à partir des différents préfixes des images de lettres par la substitution. En particulier, on ne pose aucune condition sur la succession des $\mathbf{x}_i$.

Pour trouver les suites de vecteurs en question, on utilise principalement le fait que la série $\sum_i \mathbf{M}^i_{diag}\mathbf{x}_i$ tend vers 0, ce qui implique que lorsqu'on renormalise les sommes finies de cette série, on obtient un ensemble borné. On obtient ainsi un automate arithmétique, qui reconnaît les suites de vecteurs $(\delta(p_i) - \delta(q_i))_i$ vérifiant la formule (4.1), sans aucune condition sur les p_i ou q_i.

A la section 4.3, on rajoute à la contrainte arithmétique décrite par l'automate arithmétique, une contrainte combinatoire d'admissibilité dans l'automate des préfixes-suffixes. Plus précisément, on modifie l'automate arithmétique pour que les vecteurs $\mathbf{v}_i$ qui correspondent à l'étiquette d'un de ses chemins s'expriment sous la forme $\mathbf{v}_i = \delta(p_i) - \delta(q_i)$, où $(p_i)_i$ et $(q_i)_i$ sont les préfixes de développements en préfixes-suffixes $(p_i, a_i, s_i)_i$ et $(q_i, a_i, s_i)_i$, c'est-à-dire de chemins admissibles de l'automate des préfixes-suffixes.

On obtient ainsi un nouvel automate appelé *automate de connexité*, parce que cet automate fournit une condition suffisante et une autre condition nécessaire de connexité du fractal de Rauzy associé à la substitution.

Les étiquettes des chemins de l'automate de connexité sont des différences de digits provenant chacun d'une étiquette de l'automate des préfixes-suffixes. A la section 4.4, on remplace chaque différence de digits par la première étiquette de l'automate des préfixes-suffixes qui intervient dans cette différence. On obtient ainsi un nouvel automate appelé *automate d'injectivité*. On montre que cet automate reconnaît les développements des points de Ω pour lesquels la représentation φ n'est pas injective, et on en déduit une condition nécessaire et suffisante effective d'injectivité en mesure de la représentation géométrique φ.

De manière semblable, la caractérisation de l'injectivité en mesure de la représentation sur le tore $\varphi_{\mathcal{L}} = p_{\mathcal{L}} \circ \varphi$ est équivalente à la détermination les couples de développements en préfixes-suffixes distincts $(p_i, a_i, s_i)_i$ et $(q_i, a_i, s_i)_i$ tels que

$$\sum_i \mathbf{M}_{diag}^i (\delta(p_i) - \delta(q_i)) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \tag{4.2}$$

où $\mathcal{L}$ est le réseau engendré par les vecteurs $\delta(i) - \delta(d)$.

L'ensemble $\varphi(\Omega)$ étant borné, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs du réseau qui peuvent vérifier une égalité du type de la formule 4.2.

Pour chacun de ces vecteurs, à la section 4.5, on définit avec des méthodes semblables à celles des sections précédentes, un automate d'injectivité qui reconnaît les développements en préfixes-suffixes qui vérifient la formule 4.2. On en déduit une condition nécessaire et suffisante effective d'injectivité en mesure de la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$.

4.1 Interprétation formelle de la représentation géométrique

Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot et (Ω, S) le système dynamique symbolique associé à σ.

On note α une valeur propre, considérée comme formelle, de la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de σ. Le vecteur $\mathbf{v}_\alpha$ est le vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ pour la valeur propre α, comme défini à la section 1.3.2.

Définition 4.1.1 *On appelle* représentation formelle de Ω *la fonction de Ω dans le corps des séries formelles $\mathbb{Q}[[\alpha]]$ définie comme suit : si $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ est le développement en préfixes-suffixes de $w \in \Omega$, on pose*

$$F_\alpha(w) = \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}\left(\sigma^i\left(p_i\right)\right), \mathbf{v}_\alpha >= \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_\alpha > \alpha^i.$$

Cette définition ne dépend pas en fait de la valeur propre α choisie : puisque $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible, toutes les valeurs propres sont conjuguées et sont donc identiques d'un point de vue formel. Le choix de la valeur propre α intervient par contre lorsqu'on cherche à donner une valeur complexe à $F_\alpha(w)$: du fait de sa définition, la série $F_\alpha(w)$ converge dans $\mathbb{C}$ dès que $|\alpha| < 1$.

Si $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ désignent toujours les $r-1$ valeurs propres réelles de $\mathbf{M}_\sigma$ et $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}, \overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \overline{\alpha_{r+s}}$ ses valeurs propres complexes, on note F_{α_k} la fonction de Ω dans $\mathbb{K}_k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est la valeur de F_α lorsque, par l'automorphisme canonique τ_k, on plonge dans $\mathbb{K}_k$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}[[\alpha]]$ dont les coefficients forment un ensemble borné. On a ainsi :

$$\forall\, w \in \Omega,\ \text{ si } \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \ \text{ alors } F_{\alpha_k}(w) = \sum_{i\geq 0} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_k > {\alpha_k}^i = \sum_{i \geq 0} \delta_k(p_i)\, {\alpha_k}^i.$$

On retrouve les coordonnées de la représentation géométrique φ définie au lemme 3.1.1, et on a donc :

$$\forall\, w \in \Omega \qquad \varphi(w) = \big(F_{\alpha_2}(w), \dots F_{\alpha_{r+s}}(w)\big) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \simeq \mathbb{R}^{d-1}. \tag{4.3}$$

Ainsi, la représentation géométrique φ est constituée de toutes les valeurs complexes que peut prendre la série formelle F_α. Cette idée va dominer tout le chapitre.

4.2 Automate arithmétique

Dorénavant, la notation α désigne la valeur propre dominante α_1 de $\mathbf{M}_\sigma$.

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}(\alpha)$ suivant :

$$\mathcal{C} = \left\{ < \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p) - \mathbf{l}(q) >;\ (p,a,s), (q,b,r) \in \mathcal{P}^2 \right\}.$$

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1 *Soit $\mathcal{G}_a$ l'ensemble des nombres $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$ qui s'écrivent $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n$, où $(c_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}$ telle que pour $k = 2 \dots d$ on a $\sum_{n\geq 0} \tau_k(c_n)\, {\alpha_k}^n = 0$.*

On définit sur $\mathcal{G}_a$ un automate étiqueté par $\mathcal{C}$ en disant que $\gamma \in \mathcal{C}$ étiquette l'arête joignant ξ à ν si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_n$ et un entier N tels que :

$$\xi = \tfrac{1}{\alpha^N} \textstyle\sum_{n<N} c_n\, \alpha^n, \quad \nu = \tfrac{1}{\alpha^{N+1}} \textstyle\sum_{n<N+1} c_n\, \alpha^n, \quad \gamma = c_N$$

$$\forall\, k = 2 \dots d, \quad \textstyle\sum_{n \geq 0} \tau_k(c_n)\, {\alpha_k}^n = 0.$$

On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des sommets de l'automate qui appartiennent à un chemin infini partant du sommet 0. Le sous-automate ayant $\mathcal{V}_a$ pour ensemble de sommets est appelé automate arithmétique *associé à σ.*

Le théorème suivant a été énoncé et partiellement prouvé par G. Rauzy dans [77].

Théorème 4.2.1 *Si la substitution σ est unimodulaire de type Pisot, l'automate arithmétique associé à la substitution σ est fini. Les étiquettes de ses chemins infinis partant de 0 sont exactement les suites $(c_n)_n$ à valeur dans $\mathcal{C}$ telles que $\sum_{n\geq 0} \tau_k(c_n) {\alpha_k}^n = 0$ pour tout $k = 2 \dots d$.*

Preuve Montrons tout d'abord que l'ensemble des conjugués algébriques des éléments de $\mathcal{G}_\alpha$ est borné.

Soit $1 \leq k \leq d$ fixé et τ_k l'automorphisme canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{Q}(\alpha_k)$. On pose $M_k = \max\{|\tau_k(\gamma)|,\ \gamma \in \mathcal{C}\}$. Soit ξ un sommet de $\mathcal{G}_a$. Il existe une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ et un entier N tels que $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n$ et $\sum_{n\geq 0} \tau_k(c_n)\, {\alpha_k}^n = 0$ pour tout $k > 1$.

Si $k = 1$, on a $\tau_1(\xi) = \xi \leq \frac{M_k}{|\alpha|-1} = C_1$. Par contre, si $k > 1$, alors $|\alpha_k| < 1$ et on sait par hypothèse que $\sum_{n\geq 0} \tau_k(c_n)\, {\alpha_k}^n = 0$. Ceci implique que $\tau_k(\xi) = -\sum_{n \geq 0} c_{n+N}\, {\alpha_k}^n$ et $C_k = \frac{M_k}{1-|\alpha_k|}$ est une borne de $\tau_k(\mathcal{G}_a)$. Ainsi, l'ensemble des conjugués algébriques des sommets de $\mathcal{G}_a$ est borné.

On établit maintenant une bijection entre l'ensemble des suites qui annulent toutes les séries étudiées et les chemins de l'automate arithmétique.

Si $(c_n)_n$ étiquette un chemin partant de 0, il existe des sommets ξ_n tels que $\xi_0 = 0$ et c_n étiquette l'arête joignant ξ_n et ξ_{n+1}. Ces nombres vérifient $\alpha\,\xi_{n+1} = c_n + \xi_n$. De proche en proche, on obtient :

$$\xi_N = \frac{\xi_0 + \sum_{0 \le n < N} \alpha^n c_n}{\alpha^N} = \frac{\sum_{0 \le n < N} \alpha^n c_n}{\alpha^N}.$$

Soit $1 < k \le d$. On vient de voir que $|\tau_k(\xi_N)|$ est borné par C_k. On en déduit

$$|\sum_{n<N} {\alpha_k}^n \tau_k(c_n)| = |\tau_k(\alpha^N \xi_N)| = |\tau_k(\xi_N)|\,|\alpha_k|^N \le C_k\,|\alpha_k|^N \to_{n\to+\infty} 0.$$

De ce fait, $\sum_{n\ge 0} \tau_k(c_n)\,{\alpha_k}^n = 0$ est nul pour $k = 2 \ldots d$.

Réciproquement, si $(c_n)_n$ est tel que $\sum_{n\ge 0} \tau_k(c_n){\alpha_k}^n = 0$ pour $k = 2 \ldots d$, les nombres $\xi_N = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\,\alpha^n$ sont des sommets du graphe $\mathcal{G}_a$ tels que c_n étiquette l'arête de ξ_n à ξ_{n+1}, et on a $\xi_0 = 0$.

Les étiquettes $(c_n)_n$ des chemins de $\mathcal{G}_a$ partant de 0 sont donc exactement les suites telles que $\sum_{n\ge 0} \tau_k(c_n){\alpha_k}^n = 0$ pour $k = 2 \ldots d$.

Enfin, on déduit de ce qui précède que $\mathcal{G}_a$ et dont $\mathcal{V}_a$ est fini.

Par ailleurs, l'ensemble $\mathcal{C}$ étant fini, il existe un entier A tel que les éléments de $A\mathcal{C}$ sont des entiers algébriques (annulateurs d'un polynôme ayant 1 pour coefficient dominant). Le nombre α étant un nombre de Pisot unimodulaire, $1/\alpha$ est lui aussi un entier algébrique ce qui implique que $A\,\mathcal{G}_a$ est un ensemble d'entiers algébriques dont les conjugués algébriques sont bornés. Un théorème de Galois (qui dit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers algébriques dont les conjugués algébriques sont bornés par des constantes données) implique que $\mathcal{G}_a$ est fini. ■

La condition Pisot sur le nombre α n'est en fait nécessaire : ce théorème est vérifié par tous les entiers algébriques qui n'ont aucun conjugué algébrique de module 1.

Corollaire 4.2.1 *Si ξ est un sommet de l'automate arithmétique, ses conjugués algébriques sont bornés par les constantes C_k ne dépendant que de $\mathcal{C}$ définie dans la preuve du théorème 4.2.1.*

4.2.2 Obtention pratique de l'automate.

Pour construire l'automate arithmétique, on considère une liste contenant seulement le nombre 0, et on lance une procédure récursive qui considère un sommet de la liste en cours, lui ajoute un élément de $\mathcal{C}$, divise le tout par α, et teste si le nombre obtenu peut-être un sommet, c'est-à-dire si les conjugués algébriques de ce nouveau nombre sont majorés par les constantes C_k. Si le nombre obtenu est bien un sommet, on vérifie s'il appartient déjà à la liste de sommets. Si ça n'est pas le cas, on l'y rajoute. On considère ensuite l'élément suivant dans l'ensemble $\mathcal{C}$, ou le sommet suivant dans la liste, jusqu'à ce que la procédure ne trouve plus de nouveau mot. La preuve du théorème 4.2.1 implique que ceci se produit en un temps fini.

On obtient ainsi une liste de sommets qui contient $\mathcal{G}_a$. On construit un automate ayant cette liste pour ensemble de sommets en mettant une arête indicée par c de ξ vers ν si et seulement si $c = \alpha\,\nu - \xi \in \mathcal{C}$. On enlève récursivement dans ce graphe les sommets qui sont non entrant ou non sortant.

On ne conserve du dernier automate que la composante connexe du sommet 0. La liste de sommets est alors exactement $\mathcal{A}$.

On peut simplifier les calculs en utilisant les symétries de l'automate arithmétique : un nombre ξ est un sommet de l'automate si et seulement si son opposé $-\xi$ l'est et un nombre c étiquette une arête entre ξ et ν si et seulement si $-c$ étiquette une arête entre $-\xi$ et $-\nu$.

Exemple 1 : substitution de Fibonacci. Cette substitution est définie par $\sigma_1(1) = 12$ et $\sigma_1(2) = 1$. Les valeurs propres de la matrice sont le nombre de Fibonacci $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ et $\theta = (1-\sqrt{5})/2$, racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Un vecteur propre est $\mathbf{v}_\alpha = (1, 1/\alpha)$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes (figure 4.1) sont le vide ε et 1, si bien que l'ensemble d'étiquettes est $\mathcal{C}_1 = \{0, 1, -1\}$.

L'algorithme donne l'automate à 7 sommets décrit à la figure 4.1. Par construction, les chemins partant de 0 y sont étiquetés par les suites $(c_n)_n$ de $\{0, 1, -1\}$ telles que $\sum_{i \geq O} d_i\, \theta^i = 0$.

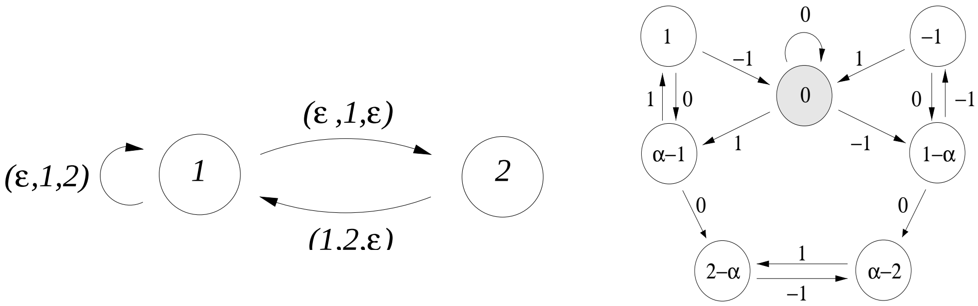

FIG. 4.1 – automates des préfixes-suffixes et arithmétique de σ_1

Exemple 2 : Substitution de Tribonacci. Cette substitution a déjà été définie par $\sigma_3(1) = 12$, $\sigma_2(2) = 13$, $\sigma_2(3) = 1$.

Les valeurs propres de la matrice de cette substitution sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$. Un vecteur propre dominant de la matrice est $\mathbf{v}_\alpha = (1, \alpha - 1, \alpha^2 - \alpha - 1)$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes (figure 4.2) sont les mêmes que ceux de Fibonacci, et l'ensemble d'étiquettes est le même $\mathcal{C}_2 = \{0, 1, -1\}$.

L'automate arithmétique est un graphe à 15 sommets (figure 4.2). Ce graphe reconnaît les suites de $\{0, 1, -1\}$ telles que $\sum_{n \geq O} d_i\, \theta^n = 0$, où θ est le nombre de Tribonacci, c'est-à-dire une des racines de $X^3 - X^2 - X - 1$ de module inférieur à 1. Ceci est à relier aux travaux de A. Messaoudi dans [66]. Nous reviendrons sur ce lien de manière plus précise à la section 4.4.3.

Exemple 3 : Substitution de Tribonacci renversée. Soit σ_5 définie par $\sigma_5(1) = 12$, $\sigma_5(2) = 31$, $\sigma_3(3) = 1$.

Bien que cette substitution ait même matrice que σ_2, les préfixes sont cette fois ci ε, 1 et 3, ce qui modifie l'ensemble d'étiquettes : $\mathcal{C}_3 = \{0, 1, -1, \alpha^2 - \alpha - 1, -\alpha^2 + \alpha + 1, \alpha^2 - \alpha - 2, -\alpha^2 + \alpha + 2\}$. L'automate arithmétique a 65 sommets et reconnaît les suites $(c_n)_n$ de $\mathcal{C}_3$ telles que $\sum_{n \geq O} c_n\, \theta^n = 0$, où θ est le nombre de Tribonacci. Il est trop complexe pour être représenté ici.

Exemple 4. Soit σ_6 définie par $\sigma_6(1) = 12$, $\sigma_6(2) = 13$, $\sigma_6(3) = 132$. Cette substitution unimodulaire de type Pisot a pour ensemble d'étiquettes l'ensemble $\mathcal{C}_4 = \{0, -1, 1, \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha, 1 + \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha - 1\}$. L'automate arithmétique a 51 sommets.

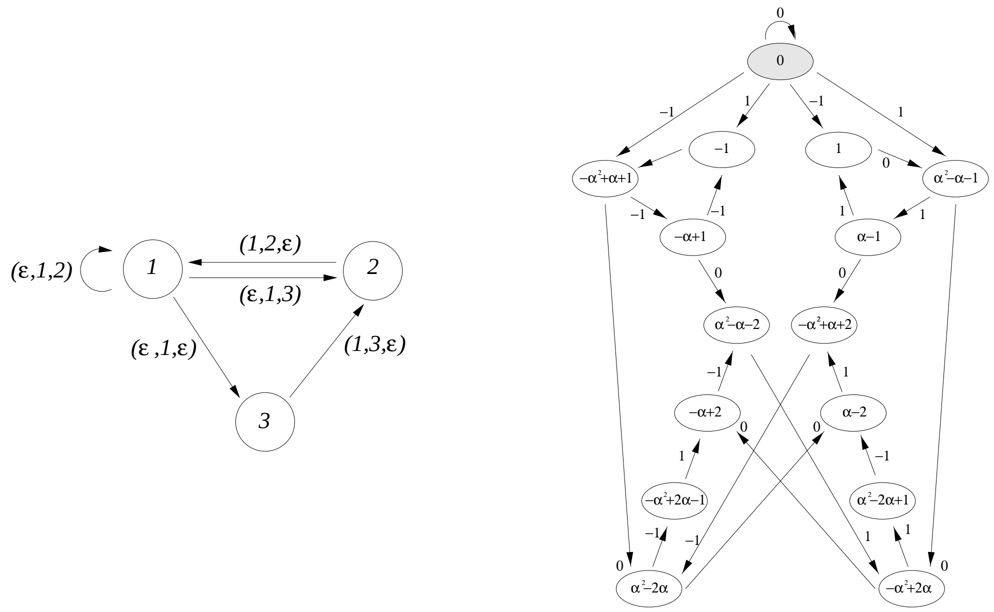

FIG. 4.2 – automates des préfixes-suffixes et arithmétique de σ_3

4.3 Automate de connexité

4.3.1 Définition

La représentation géométrique φ d'un système substitutif Pisot a été définie dans le chapitre 3 à la formule 4.3. On cherche à estimer son degré de non injectivité.

Définition 4.3.1 *Soit $\mathcal{G}_c = \mathcal{V}_a \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On définit un automate sur $\mathcal{G}_c$ étiqueté par $\mathcal{C}$ en disant que $c \in \mathcal{C}$ étiquette une arête allant du sommet (ξ_1, a_1, a_2) vers le sommet (ξ_2, b_1, b_2) si et seulement si :*

- $\alpha\, \xi_2 = \xi_1 + c,$
- *il existe deux couples de mots (p_1, s_1) et (p_2, s_2) tels que $\sigma(b_1) = p_1\, a_1\, s_1$, $\sigma(b_2) = p_2\, a_2\, s_2$ et $c =< \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p_1) - \mathbf{l}(p_2) >$.*

Un élément (ξ, a_1, a_2) de $\mathcal{G}_c$ est un sommet initial *si et seulement si $\xi = 0$.*

On note $\mathcal{V}_c$ l'ensemble des sommets de l'automate qui appartiennent à un chemin infini partant d'un sommet initial. Le sous-automate ayant $\mathcal{V}_c$ pour ensemble de sommets est appelé automate de connexité *associé à σ.*

Proposition 4.3.1 *La suite de nombres $(c_i)_i$ étiquette un chemin $(\xi_i, a_i, b_i)_i$ partant d'un sommet initial dans l'automate de connexité si et seulement s'il existe deux points $w_1, w_2 \in \Omega$ ayant même représentation géométrique : $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$ et tels que*

$$\forall i \geq 0 \quad c_i =< \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p_i) - \mathbf{l}(q_i) >,$$

où w_1 et w_2 ont pour développements en préfixes-suffixes $(p_i, a_i, s_i)_i = \Gamma(w_1)$ et $(q_i, b_i, r_i)_i = \Gamma(w_2)$.

Preuve Soit $(c_i)_i$ l'étiquette d'un chemin $(\xi_i, a_i, b_i)_i \in \mathcal{G}_c = \mathcal{V}_a \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ de l'automate de connexité partant d'un sommet initial. On a donc $\xi_0 = 0$ et, dans l'automate arithmétique $\mathcal{V}_a$, (ξ_i) est un chemin partant de 0 étiqueté par les $(c_i)_i$. Ainsi, selon le théorème 4.2.1, on a pour $k = 2 \ldots d$, $\sum_{i \geq 0} c_i {\alpha_k}^i = 0$.

Par définition de $\mathcal{V}_c$, il existe deux chemins $(p_i, a_i, s_i)_i, (q_i, b_i, r_i)_i \in \mathcal{D}$ dans l'automate des préfixes-suffixes tels que $(c_i)_i =< \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p_i) - \mathbf{l}(q_i) >$. On a donc

$$\forall\, k = 2 \dots d \qquad \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_k > {\alpha_k}^i = \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(q_i), \mathbf{v}_k > {\alpha_k}^i.$$

Mais par surjectivité du développement en préfixes-suffixes Γ, il existe deux éléments w_1 et w_2 dans Ω tels que $(p_i, a_i, s_i)_i = \Gamma(w_1)$ et $(q_i, b_i, r_i)_i = \Gamma(w_2)$. On obtient ainsi $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$.

Réciproquement, si $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, alors, si on pose $\Gamma(w_1) = (p_i, a_i, s_i)_i$ et $\Gamma(w_2) = (q_i, b_i, r_i)_i$, les nombres $c_i =< \mathbf{l}(p_i) - \mathbf{l}(q_i), \mathbf{v}_k >$ étiquettent un chemin partant d'un sommet initial dans l'automate de connexité. ∎

4.3.2 Connexité des fractals de Rauzy

Dans [16], V. Canterini définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$ en prenant la clôture transitive de la relation $\mathcal{R}'$ suivante : "$a_1\, \mathcal{R}'\, a_2$ s'il existe $w_1, w_2 \in \Omega$ tels que $(w_1)_0 = a_1$, $(w_2)_0 = a_2$ et $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$".

Géométriquement, a_1 et a_2 sont en relation par $\mathcal{R}'$ si et seulement les images des cylindres $\varphi[a_1]$ et $\varphi[a_2]$ se rencontrent. V. Canterini a montré qu'une condition nécessaire pour que le fractal de Rauzy associé à une substitution soit connexe est que toutes les paires d'images de cylindres $\varphi[a_1]$ et $\varphi[a_2]$ soient reliés par une chaîne d'images de cylindres qui ont successivement au moins un point commun :

Proposition 4.3.2 (Canterini, [16], proposition 4.2.1) *Si l'image dans l'espace euclidien de la représentation géométrique $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$ est connexe, alors la relation $\mathcal{R}$ n'a qu'une seule classe d'équivalence.*

Cette condition n'est pas suffisante pour assurer la connexité de la représentation géométrique : la relation $\mathcal{R}$ ne donne pas d'information sur les propriétés géométriques des images de cylindres $\varphi[a]$.

Si la condition nécessaire concernant $\mathcal{R}$ est vérifiée, la connexité de chaque $\varphi[a]$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit connexe. A partir de l'autosimilarité de $\mathcal{F}$, V. Canterini exprime la connexité des $\varphi[a]$ en terme de relation d'équivalence.

Plus précisément, une lettre $a_0 \in \mathcal{A}$ étant fixée, on définit la relation $\mathcal{R}_{a_0}$ sur $\{(p, a, s, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{A};\ a = a_0, pas = \sigma(b)\}$ comme la clôture transitive de la relation ${\mathcal{R}_{a_0}}'$ suivante : "(p_1, a_0, s_1, b_1) ${\mathcal{R}_{a_0}}'$ (p_2, a_0, s_2, b_2) s'il existe $w_1, w_2 \in \Omega$ tels que $(w_1)_0 = b_1$, $(w_2)_0 = b_2$ et $\varphi(S^{|p_1|}\sigma(w_1)) = \varphi(S^{|p_2|}\sigma(w_2))$".

Ainsi, (p_1, a_0, s_1, b_1) est en relation avec (p_2, a_0, s_2, b_2) par ${\mathcal{R}_a}'$ si et seulement si les ensembles $\varphi(S^{|p_1|}\sigma[b_1]$ et $\varphi(S^{|p_2|}\sigma[b_2]$, tous deux inclus dans $\varphi[a_0]$, se recontrent en au moins un point.

On obtient alors la condition suffisante suivante pour la connexité de la représentation géométrique :

Proposition 4.3.3 (Canterini, [16], proposition 4.2.2) *L'image dans l'espace euclidien de la représentation géométrique $\mathcal{F} = \varphi(\Omega)$ est connexe dès que les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_a$ ont chacune une seule classe d'équivalence.*

De plus, l'image $\varphi[a]$ de chaque cylindres de Ω est connexe.

La vérification "manuelle" des conditions contenues dans les deux dernières propositions est peu aisée. L'automate de connexité permet de calculer systématiquement les classes d'équivalence :

Lemme 4.3.1 *Soient $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$. Alors $a_1 \mathcal{R}' a_2$ si et seulement si $(0, a_1, a_2)$ est un sommet de l'automate de connexité.*

Pour toute $a \in \mathcal{A}$, soient $((p_1, a, s_1), b_1), ((p_2, a, s_2), b_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{A}$ tels que $p_1 a s_1 = \sigma(b_1)$ et $p_2 a s_2 = \sigma(b_2)$. Alors $(p_1, a, s_1, b_1) \mathcal{R}_a{}' (p_2, a, s_2, b_2)$ si et seulement si $(\frac{< \mathbf{l}(p_1) - \mathbf{l}(p_2), \mathbf{v}_k >}{\alpha}, b_1, b_2)$ est un sommet de l'automate de connexité extrait d'une arête partant de $(0, a, a)$.

Preuve Soit $w \in \Omega$, et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ son développement en préfixes-suffixes. Alors $a_0 = (w)_0$ et w est de la forme $w = S^{|p|}\sigma(w_1)$ avec $(w_1)_0 = b_1$ si et seulement si $p = p_0$ et $a_1 = b_1$. Ces remarques et la proposition 4.3.1 impliquent directement le lemme. ■

4.3.3 Structure de l'automate et exemples

L'automate connexité s'obtient en calculant l'automate d'intersection de l'automate arithmétique et du carré de l'automate des préfixes-suffixes, puis en parcourant cet automate de manière récursive pour en extraire la composante de l'automate contenant 0. L'algorithme de calcul de l'automate arithmétique permet ainsi de calculer aisément l'automate de connexité.

On simplifie ce calcul en utilisant les symétries, que l'on constatera bien dans les exemples donnés : du fait de la définition, (ξ, a_1, a_2) est un état de l'automate si et seulement si $(-\xi, a_2, a_1)$ l'est aussi. Ces deux états sont dits *symétriques*. De plus, deux états sont reliés par une arête d si et seulement si leurs symétriques sont reliés par $-d$.

Enfin, par construction, $(0, a_1, a_1)$ et $(0, b_1, b_1)$ sont reliés si et seulement si a_1 et b_1 sont reliés dans l'automate des préfixes-suffixes. L'arête de l'automate intersection est alors 0. Les états $(0, a_1, a_1)$ sont dits *originaux*. Ils sont leurs propres symétriques. Ainsi, l'automate de connexité contient une copie simplifiée de l'automate des préfixes-suffixes : dans cette copie, on identifie les arêtes de l'automate des préfixes-suffixes ayant même origine et extrémité.

Exemple 1 : substitution de Fibonacci σ_1. L'automate est présenté à la figure 4.3. Un de ses sommets est $(0, 1, 2)$, ce qui implique que la relation $\mathcal{R}$ n'a qu'une seule classe d'équivalence. De plus, $(0, 1, 1)$ est relié à $(0, 1, 2)$. Ainsi, la relation $\mathcal{R}_1$ n'a elle aussi qu'une classe d'équivalence. la relation $\mathcal{R}_2$ étant triviale, on en déduit que $\varphi(\Omega)$ est un intervalle, union des deux intervalles $\varphi[1]$ et$\varphi[1]$.

Exemple 2 : Substitution de Tribonacci σ_3. L'automate est présenté à la figure 4.3. les lettres 1, 2 et 3 sont en relation par $\mathcal{R}$ puisque $(0, 1, 2)$ et $(0, 1, 3)$ sont sommets de l'automate. De plus, $(\varepsilon, 1, 2, 1)$, $(\varepsilon, 1, 3, 2)$ et $((\varepsilon, 1, \varepsilon), 3)$ sont en relation par $\mathcal{R}_a$ puisque $(0, 1, 2)$ et $(0, 1, 3)$ sont reliés à $(0, 1, 1)$. Ainsi, l'image $\varphi(\Omega)$ est connexe, ainsi que ses trois composantes $\varphi[1]$, $\varphi[2]$ et $\varphi[3]$ (voir figure 4.4). On retrouve en partie le résultat de G. Rauzy dans [76], où il est prouvé que le fractal de Rauzy pour la substitution de Tribonacci est simplement connexe.

Exemple 3 : Substitution de Tribonacci renversée σ_5. L'automate de connexité a 117 arêtes sur 69 sommets, parmi lesquels $(0, 1, 2)$ et $(0, 1, 3)$, ce qui assure que $1, 2, 3$ sont en relation par $\mathcal{R}$. Par contre, $(0, 2, 3)$ n'est pas un sommet de l'automate. Ceci signifie graphiquement que $\varphi[2]$ et $\varphi[3]$ ne se recontrent pas, ce qui semble bien être le cas dans la représentation de la figure 4.4.

De plus, l'automate contient des arêtes allant de $(0, 1, 1)$ vers $(0, 1, 3)$ et vers $(2\alpha - \alpha^2, 1, 2)$. Ainsi, $\varphi(\Omega)$ est connexe, ainsi que ses trois composantes $\varphi[1]$, $\varphi[2]$ et $\varphi[3]$ (voir figure 4.4).

Exemple 4 : $\sigma_6(1) = 12$, $\sigma_6(2) = 13$, $\sigma_6(3) = 132$. L'automate de connexité a 55 sommets et 109 arêtes. Parmi ces sommets se trouvent $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$ et $(0, 2, 3)$, ce qui signifie que les images des cylindres se rencontrent deux à deux. De plus, on vérifie que $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_3$ ont une seule classe d'équivalence. La représentation est donc connexe ainsi que ses trois parties (voir figure 4.4).

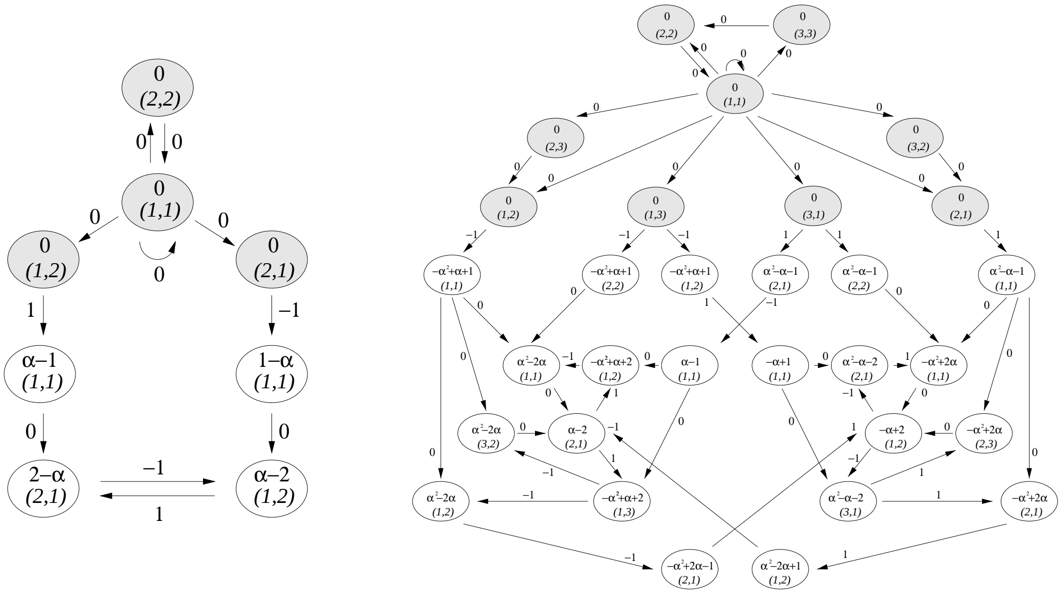

FIG. 4.3 – automates de connexité de σ_1 et σ_3

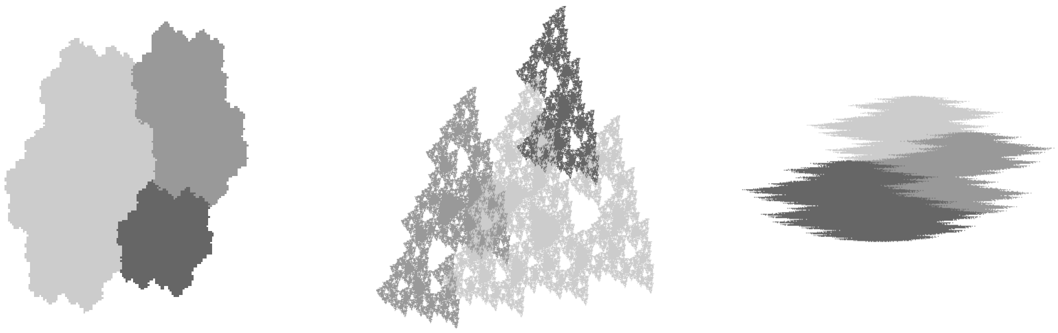

FIG. 4.4 – Fractales de Rauzy pour σ_3, σ_5 et σ_6

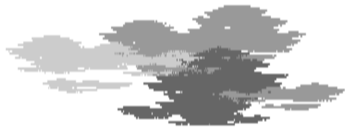

FIG. 4.5 – Fractal de Rauzy de σ_7, non connexe

Exemple 5 : $\sigma_7(1) = 11223$, $\sigma_7(2) = 123$, $\sigma_7(3) = 2$. Cette substitution est de type Pisot et unimodulaire. Par contre, contrairement aux substitutions étudiées jusqu'à maintenant, sa représentation géométrique ne semble pas connexe (voir figure 4.5). Cependant, cette substitution vérifie la condition nécessaire énoncée à la proposition 4.3.2 : l'automate de connexité admet pour sommets les sommets $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$ et $(0, 2, 3)$, ce qui est cohérent dans la mesure où les images des cylindres sont en contact deux à deux. Par contre, la condition suffisante de la proposition 4.3.3 n'est vérifié par aucune des trois lettres 1, 2 et 3.

4.4 Injectivité de la représentation géométrique

Nous avons prouvé au chapitre précédent que la condition combinatoire de coïncidence définie par P. Arnoux et S. Ito est une condition suffisante d'injectivité en mesure de la représentation géométrique φ, faisant pour cela appel à la structure auto-similaire de l'image de φ.

Dans cette section, nous allons aborder le problème de l'injectivité sous l'aspect formel et de théorie des nombres qui a été développé dans ce chapitre. On va ainsi modifier l'automate de connexité pour donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité en mesure de la représentation géométrique φ. Le lien entre cette condition et la condition de coïncidences, dont on a montré qu'elle est suffisante pour l'injectivité en mesure de la représentation, est difficile à mettre en évidence.

On ne connaît pour l'instant aucune substitution de type Pisot dont la représentation géométrique n'est pas injective en mesure.

4.4.1 Automate d'injectivité

Les chemins de l'automate de connexité décrivent les différences des chiffres associés aux développements en préfixes-suffixes des points de Ω qui ont même représentation géométrique. Dans la définition suivante, on modifie cet automate de manière à faire apparaître les développements des points eux-mêmes.

Définition 4.4.1 L'automate d'injectivité *associé à σ a même ensemble de sommets que l'automate de connexité.*

Cet automate est étiqueté par l'ensemble $\mathcal{P}$: (p, a, s) est l'étiquette d'une arête de (ξ_1, a_1, a_2) vers (ξ_2, b_1, b_2) s'il existe $(q, b, r) \in \mathcal{P}$ tels que

- *$c = < \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p) - \mathbf{l}(q) >$ est l'étiquette d'une arête de (ξ_1, a_1, a_2) vers (ξ_2, b_1, b_2) dans l'automate de connexité de la substitution,*
- *$a_1 = a$ avec $pas = \sigma(b_1)$, et $a_2 = b$ avec $qbr = \sigma(b_2)$.*

On appelle arête symétrique *de celle allant de* (ξ_1, a_1, a_2) *vers* (ξ_2, b_1, b_2) *étiquetée par* (p, a, s), *l'arête qui va de* $(-\xi_1, a_2, a_1)$ *vers* $(-\xi_2, b_2, b_1)$ *étiquetée par* (q, b, r).

En particulier, l'étiquette d'un chemin de l'automate d'injectivité appartient toujours au système dynamique symbolique de type fini $\mathcal{D}$. Deux *chemins* de l'automate sont dits *symétriques* si les arêtes qui les constituent sont toutes symétriques.

Proposition 4.4.1 *Deux chemins de l'automate d'injectivité partant d'un sommet initial sont symétriques si et seulement s'ils sont les développements en préfixes-suffixes de deux points de* Ω *qui ont même représentation géométrique.*

Preuve Soient $(p_i, a_i, s_i)_i, (q_i, b_i, r_i)_i \in \mathcal{D}$. Ces deux suites sont deux chemins symétriques partant d'un sommet initial de l'automate d'injectivité, c'est-à-dire de la forme $(\xi_i, a_i, b_i)_i$ et $(-\xi_i, b_i, a_i)_i$ avec $\xi_0 = 0$, si et seulement si la suite de nombres $(< \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p_i) - \mathbf{l}(q_i) >)_i$ étiquette dans l'automate de connexité le chemin $(\xi_i, a_i, b_i)_i$. Soit $w_1, w_2 \in \Omega$ tels que $\Gamma(w_1) = (p_i, a_i, s_i)_i$ et $\Gamma(w_2) = (q_i, a_i, r_i)_i$. Avec une preuve similaire à celle de la proposition 4.3.1, on montre que $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$. La réciproque est une conséquence directe de la proposition 4.3.1. ∎

Exemple 1 : substitution de Fibonacci. L'automate d'injectivité de cette substitution est donné à la figure 4.6. Les chemins $e_1 = (\varepsilon, 1, 2)(\varepsilon, 1, \varepsilon), [(1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, \varepsilon)]^\infty$ et $e_2 = (1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, 2)[(\varepsilon, 1, \varepsilon)$ $(1, 2, \varepsilon)]^\infty$ sont symétriques.

Soit $w_1 \in \Omega$ tel que $\Gamma(w_1) = e_1$ et $w_2 \in \Omega$ tel que $\Gamma(w_2) = e_2$. Soit $\rho = (1 - \sqrt{5})/2 = \rho^2 - 1$ le conjugué algébrique du nombre de Fibonacci $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = -\rho + 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(w_1) &= 0\,\rho^0 + 0\,\rho^1 + \sum_{i \geq 0} (\rho^{2+2i} + 0\,\rho^{2+2i+1}) = \rho^2 \sum_i \rho^{2i} = \rho^2/(1 - \rho^2) = -\rho\,, \\
\varphi(w_2) &= \rho^0 + 0\,\rho^1 + \sum_{i \geq 0} (0\,\rho^{2+2i} + \rho^{2+2i+1}) = 1 + \rho^3/(1 - \rho^2) = 1 - \rho^2 = -\rho \\
&= \varphi(w_1) = \alpha - 1.
\end{aligned}$$

Les deux points w_1 et w_2 ont ainsi même représentation géométrique.

Les arêtes qui sont leur propre symétrique relient des sommets dits *originaux*, de la forme $(0, a, a)$. La restriction de l'automate à l'ensemble des sommets originaux est une copie de l'automate des préfixes-suffixes : en effet, $(p, a, s) \in \mathcal{P}$ étiquette une arête de $(0, a, a)$ vers $(0, b, b)$ si et seulement si $pas = \sigma(b)$, c'est-à-dire si (p, a, s) étiquette une arête de a vers b dans l'automate des préfixes-suffixes.

Ainsi, tout élément de $\mathcal{D}$ étiquette au moins un chemin de l'automate d'injectivité, qui ne passe que par des sommets originaux et est donc son propre symétrique.

Contrairement à l'automate des préfixes-suffixes, certains éléments de $\mathcal{D}$ étiquettent plusieurs chemins de l'automate d'injectivité. Ils constituent le défaut d'injectivité de la représentation géométrique φ :

Corollaire 4.4.1 *Soit* $\mathcal{D}'$ *l'ensemble des chemins de l'automate d'injectivité qui ne sont pas leur propre symétrique. Soit* $\mathcal{N}$ *l'orbite des points périodiques de* Ω. *Alors*

$$\forall\, w \in \Omega, \quad (\,\exists\, w_1 \in \Omega,\ \varphi(w) = \varphi(w_1)\ \textit{et}\ w \neq w_1\,) \implies w \in \mathcal{N} \cup \Gamma^{-1}\mathcal{D}'.$$

Preuve On a $\varphi(w) = \varphi(w_1)$ si et seulement si $\Gamma(w)$ et $\Gamma(w_1)$ sont deux chemins symétriques de l'automate d'injectivité. On suppose que $w \neq w_1$. Si $\Gamma(w) = \Gamma(w_1)$, alors selon le théorème 2.4.2, $w \in \mathcal{N}$. Si $\Gamma(w) \neq \Gamma(w_1)$, alors $\Gamma(w) \in \mathcal{D}'$ et $w \in \Gamma^{-1}\mathcal{D}'$. ∎

L'ensemble $\mathcal{N}$ est dénombrable et donc de mesure nulle dans Ω. On a montré au chapitre 2 que la mesure sur $\mathcal{D}$ invariante par le successeur est équivalente à la mesure d'entropie maximale sur $\mathcal{D}$. On en déduit un critère d'injectivité en mesure de la représentation :

Théorème 4.4.1 *La représentation géométrique φ est injective en mesure si et seulement, dans l'automate d'injectivité, on a :*

1. *toute arête entrant dans un sommet original provient d'un sommet original,*
2. *les étiquettes des chemins de l'automate d'injectivité ne passant jamais par un sommet original forment un sous-ensemble strict de $\mathcal{D}$.*

Preuve. Si la première condition n'est pas vérifiée, une arête relie un sommet S non original à un sommet original S'. Par construction de l'automate d'injectivité, il existe un chemin $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}, S, S'$ de l'automate partant d'un sommet initial S_0, arrivant en S puis allant en S'. Soit $e_0, e_1, \ldots, e_n$ l'étiquette de ce chemin. Alors, le cylindre $[e_0, e_1, \ldots, e_n]$ de $\mathcal{D}$ est non vide, et chacun de ses éléments étiquette un chemin non symétrique de l'automate d'injectivité, qui passe par $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}, S, S'$ puis à partir du rang $n+1$ ne parcourt plus que des sommets originaux. De ce fait, selon le corollaire 4.4.1, la représentation géométrique φ n'est pas injective sur $\Gamma^{-1}[e_0, e_1, \ldots, e_n]$, qui est de mesure non nulle selon la proposition 2.7.2. La représentation géométrique n'est donc pas injective en mesure.

On suppose maintenant que la première condition est vérifiée : un chemin non symétrique ne passe alors, à partir d'un certain rang, que par des états non originaux. Soit $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des étiquettes de chemins qui ne passent jamais par un sommet original. L'ensemble des étiquettes de chemins non symétriques est alors inclus dans l'union dénombrable des $W.\mathcal{D}_1$, pour $W \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Si la seconde condition du théorème n'est pas vérifiée, on a $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$ et chaque $\Gamma^{-1}(W.\mathcal{D}_1)$ est de mesure non nulle. La représentation ne peut donc pas être injective en mesure.

Si par contre la seconde condition est vérifiée, $\mathcal{D}_1$ est un sous-ensemble sofique strict de $\mathcal{D}$. Il existe donc un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ qui n'est facteur d'aucun des éléments de $\mathcal{D}_1$ (sinon, par compacité, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$). De ce fait, $\Gamma^{-1}\mathcal{D}_1$ est de mesure nulle dans Ω et de même pour les $\Gamma^{-1}(W.\mathcal{D}_1)$, lorsque W parcourt $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Finalement, l'ensemble des points de Ω dont le développement en préfixes-suffixes étiquette un chemin non symétrique de l'automate d'injectivité est de mesure nulle. L'orbite des points périodiques de Ω étant aussi de mesure nulle car dénombrable, le corollaire 4.4.1 implique que la représentation φ est injective en mesure. ∎

Interprétation de la première condition. La condition qui dit que toute arête entrant dans un sommet original provient d'un sommet original signifie qu'il n'existe pas de polynôme qui s'annule en la valeur propre dominante et dont les coefficients sont les images par l'application δ_1 des étiquettes d'un chemin fini de l'automate des préfixes-suffixes.

4.4.2 Vérification pratique du critère

L'automate d'injectivité s'obtient à partir de l'automate de connexité en remplaçant chaque arête c entre deux sommets (ξ_1, a_1, a_2) et (ξ_2, b_1, b_2) par tous les préfixes (p, a_1, s) vérifiant $pa_1s = \sigma(b_1)$ tels qu'il existe (q, r) avec $qa_2r = \sigma(b_2)$ et $c = < \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p) - \mathbf{l}(q) >$.

On vérifie alors aisément si les arêtes entrant dans un sommet original proviennent d'un sommet original.

Pour déterminer si la seconde condition du théorème 4.4.1 est vérifiée, on construit l'automate déterministe associé à l'automate d'injectivité privé de ses sommets originaux : chaque état de cet automate consiste en une partie de l'ensemble $\mathcal{V}_c$ et est obtenu récursivement à partir de la définition suivante.

Définition 4.4.2 *Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{V}_c$ est un état de l'*automate déterministe *s'il existe $i \leq d$ tel que $\mathcal{V} = \{(\xi_1, a_1, a_2) \in \mathcal{V}_c,\ a_1 = i,\ a_2 \neq i\}$ ou s'il existe un autre état $\mathcal{V}_1$ de l'automate déterministe et $(p, a, s) \in \mathcal{P}$ tels que $\mathcal{V}$ est égal à l'ensemble des sommets de l'automate d'injectivité qui proviennent d'un élément de $\mathcal{V}_1$ par une arête étiquetée (p, a, s).*

On dit alors que (p, a, s) étiquette dans l'automate déterministe une transition de $\mathcal{V}_1$ vers $\mathcal{V}$.

Les substitutions considérées sont injectives sur les lettres, puisque unimodulaires. En particulier, si $(p, a, s) \in \mathcal{P}$, il existe une seule lettre b telle que $pas = \sigma(b)$. On peut ainsi associer à chaque état $\mathcal{V}$ de l'automate déterministe une lettre b telle que pour tout $(\xi, a_1, a_2) \in \mathcal{V}$, on a $a_1 = b$.

Proposition 4.4.2 *On suppose que dans l'automate d'injectivité, toute arête entrant dans un sommet original provient d'un sommet original. Alors l'ensemble des étiquettes des chemins de cet automate ne passant jamais par un sommet original est égal dans $\mathcal{D}$ si et seulement si pour tout état $\mathcal{V}$ de l'automate déterministe, si a est la lettre qui lui est associée, alors tous les $(p, a_1, s) \in \mathcal{P}$ tels que $a_1 = a$ étiquettent une transition qui part de $\mathcal{V}$.*

Preuve Par construction, les étiquettes des chemins de l'automate déterministe sont des étiquettes de chemins de l'automate d'injectivité qui ne passent pas par un sommet original, puisque les ensembles $\{(\xi_1, a_1, a_2) \in \mathcal{V}_c,\ a_1 = i,\ a_2 \neq i\}$ regroupent les sommets non originaux selon leur première lettre, et qu'à partir de ces sommets on ne peut pas obtenir un sommet original. La réciproque est vrai : étant donné un chemin de l'automate d'injectivité qui ne passe pas par un sommet original, on peut lui faire correspondre un chemin ayant même étiquette dans l'automate déterministe en partant de l'ensemble $\{(\xi_1, a_1, a_2) \in \mathcal{V}_c,\ a_1 = i,\ a_2 \neq i\}$ qui contient l'état de départ du chemin et en suivant ensuite les transitions données par le chemin.

De plus, l'automate déterministe est bien déterministe : pour un état $\mathcal{V}$ et une étiquette (p, a, s) fixés, il existe au plus une transition qui va de $\mathcal{V}$ vers l'ensemble des états de l'automate d'injectivité atteint par (p, a, s) à partir d'un élément de $\mathcal{V}$. En particulier, deux chemins distincts ne sont pas étiquetés de la même manière.

Il en résulte que l'automate déterministe a pour étiquettes de chemins l'ensemble $\mathcal{D}$ si et seulement si pour tous ses états, toutes les transitions autorisées dans $\mathcal{D}$ existent, c'est-à-dire la condition donnée. ∎

Corollaire 4.4.2 *Il existe un algorithme effectif qui étant donné une substitution unimodulaire de type Pisot, décide si la représentation géométrique φ qui lui est associée est injective en mesure.*

Preuve A partir de l'automate d'injectivité dont nous avons déjà expliqué comment on l'obtient en pratique, on construit l'automate déterministe récursivement. On vérifie au fur et à mesure de la construction si toutes les transitions voulues apparaissent dans cet automate. Si une transition n'apparaît pas, la représentation est injective. Si toutes les transitions apparaissent, les sous-ensembles de sommets se stabilisent et la représentation n'est pas injective. ∎

Cet algorithme est effectif. Il a été implémenté dans le langage *mupad* : le programme correspondant se trouve à l'annexe B.

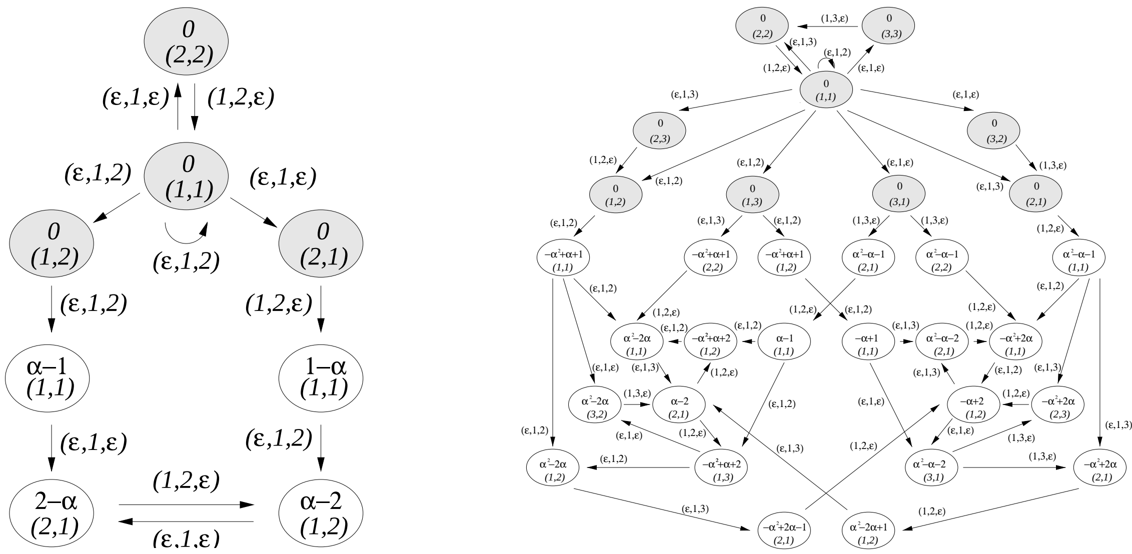

FIG. 4.6 – automates d'injectivité de σ_1 et σ_3

4.4.3 Exemples

Exemple 1 : substitution de Fibonacci. L'automate d'injectivité est présenté à la figure 4.6 avec une symétrie verticale. Il a par construction la même structure que l'automate de connexité. Les sommets originaux sont les deux sommets qui sont leurs propres symétriques, en haut de la figure.

Le critère du théorème 4.4.1 est bien vérifié. On reprouve ainsi le fait que le système substitutif associé à la substitution de Fibonacci est isomorphe en mesure à un échange de 2 intervalles.

Ces deux intervalles sont les images des cylindres [1] et [2]. Leur points d'intersections proviennent des éléments de Ω dont le développement en préfixe-suffixe étiquette un chemin partant d'un sommet de la forme $(0, a, b)$ avec $a \neq b$. Ainsi, le point d'intersection des deux intervalles est le point $\alpha-1$, image des chemins $e_1 = (\varepsilon,1,2)(\varepsilon,1,\varepsilon),[(1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,\varepsilon)]^\infty$ et $e_2 = (1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,2)[(\varepsilon,1,\varepsilon)(1,2,\varepsilon)]^\infty$ que nous avons étudiés précédemment.

On peut remarquer de plus que les chemins non symétriques de l'automate se terminent tous par une boucle infinie sur les deux sommets du bas de l'automate. En particulier, les suffixes de leurs étiquettes sont vides à partir d'un certain rang, et les points de Ω correspondant appartiennent donc à l'orbite négative des points fixes de la substitution. Par contre, on n'obtient pas toute l'orbite négative : par exemple, la représentation est injective en α et -1, qui sont les images des décalés à gauche des points périodiques de la substitution. En effet, les développements en préfixes-suffixes de ces mots n'étiquettent aucun chemin non symétrique de l'automate d'injectivité partant d'un sommet initial :

$$\begin{array}{lll} w_1 = S^{-1}(\lim_n \sigma_1^{2n+1}(1).\sigma_1^\infty(1)) & \Gamma(w_1) = e_3 = [(1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,\varepsilon)]^\infty & \varphi(w_1) = \sum_i \rho^{2i} = 1-\rho = \alpha; \\ w_2 = S^{-1}(\lim_n \sigma_1^{2n}(1).\sigma_1^\infty(1)), & \Gamma(w_2) = e_4 = [(\varepsilon,1,\varepsilon)(1,2,\varepsilon)]^\infty & \varphi(w_2) = \sum_i \rho^{2i+1} = -1. \end{array}$$

Exemple 2 : substitution de Tribonacci. L'automate d'injectivité est présenté à la figure 4.6 avec une symétrie verticale, mis à part pour les trois sommets originaux qui se trouvent en haut de la figure.

Le critère d'injectivité est à nouveau vérifié. On obtient ainsi une nouvelle preuve du fait que le

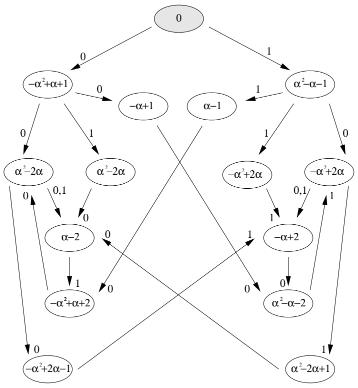

FIG. 4.7 – développement des points doubles du fractal de Rauzy

système substitutif associé à la substitution de Tribonacci est isomorphe en mesure à un échange de morceaux dans le fractal de Rauzy (voir figure 4.4).

D'un point de vue arithmétique, on peut remplacer le nom de chacun des sommets (ξ, a_1, a_2) de l'automate d'injectivité par ξ, et les étiquettes (p, a_1, s) par le nombre $< \overrightarrow{p}, \mathbf{v}_\alpha >$ qui lui correspond. On obtient un automate qui reconnaît les suites de nombres $(c_n =< \overrightarrow{p_n}, \mathbf{v}_\alpha >)_{n\geq 0}$ associées aux chemins $(p_n, a_n, s_n)_n$ de l'automate des préfixes-suffixes tels qu'il existe une autre suite de nombres $(c'_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $\sum_{n\geq 0} c_n\, {\alpha_2}^n = \sum_{n\geq 0} c'_n\, {\alpha_2}^n$, où α_2 est un nombre de Tribonacci. On obtient ainsi un automate qui reconnaît les points du fractal de Rauzy ayant un développement double dans la base de Tribonacci. Si on réunit les doublons dans cet automate, on retrouve précisément l'automate que A. MESSAOUDI construit dans [66] (figure 4.7).

Exemple 3 : substitution de tribonacci renversée. L'automate d'injectivité a la même structure que l'automate de connexité. Le critère d'injectivité est vérifié, et le système substitutif est isomorphe à un échange de morceau dans le fractal présenté à la figure 4.4.

Exemples 4 et 5 : $\sigma_6(1) = 12, \sigma_6(2) = 13, \sigma_6(3) = 132$ et $\sigma_7(1) = 11223, \sigma_7(2) = 123, \sigma_7(3) = 2$ Là encore, le critère est vérifié, et les systèmes substitutifs sont isomorphes à un échange de morceaux.

Pour ces exemples, les résultats obtenus au sujet de l'injectivité ont déjà été prouvé par P. Arnoux et S. Ito dans [7] ou au chapitre 3, puisque les substitutions vérifient toutes la condition combinatoire dite de coïncidence.

Le critère du théorème 4.4.1 montrera tout son intérêt si on arrive à trouver une substitution qui ne vérifie pas la condition de coïncidence. On pourra alors tester si la représentation géométrique associée est encore injective. De plus, ce critère sera important au chapitre 7 pour l'étude des substitutions non unimodulaires : on montrera qu'on peut le généraliser dans cette situation, alors que ce n'est pas le cas des résultats relatifs à la condition de coïncidences.

Nous verrons enfin au chapitre 7, section 7.4, que les idées développés jusque là réside permettent d'étudier plus précisément les fibres de la représentation géométrique. Ainsi, on verra en étudiant précisément le graphe arithmétique que les fibres de la représentation de la substitution de Fibonacci contiennent au plus 2 points. Le même genre d'étude peut se faire pour d'autres substitutions, mais les calculs deviennent vite très complexes. Un algorithme qui détermine le nombre de manière de lire dans l'automate d'injectivité un élément fixé dans $\mathcal{D}$ fait actuellement défaut à l'utilisation de l'automate d'injectivité dans cette direction.

4.5 Injectivité de la représentation sur le tore

Reprenant les notations du chapitre 3, on rappelle que la représentation géométrique φ se projette dans le tore $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s/\mathcal{L}$, où $\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{d-1} \mathbb{Z}(\delta(k) - \delta(d))$, en une application $\varphi_{\mathcal{L}}$ qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur Ω et une translation irrationnelle.

Ainsi, la caractérisation de l'injectivité en mesure de la représentation sur le tore $\varphi_{\mathcal{L}} = p_{\mathcal{L}} \circ \varphi$ est équivalente à la détermination les couples de développements en préfixes-suffixes distincts $(p_i, a_i, s_i)_i$ et $(q_i, a_i, s_i)_i$ tels que

$$\sum_i \mathbf{M}^i_{diag}(\delta(p_i) - \delta(q_i)) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{L} \tag{4.4}$$

L'ensemble $\varphi(\Omega)$ étant borné, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs $\mathbf{v}$ du réseau qui peuvent vérifier une égalité de ce type. Le but de la section 4.5.1 est de déterminer une borne effective pour ces vecteurs.

Pour chaque vecteur de ce type, on définit à la section 4.5.2 un automate d'injectivité qui reconnaît les développements en préfixes-suffixes vérifiant la formule 4.4. Cet automate est obtenu en adaptant les définitions de l'automate d'injectivité de la section précédente.

En regroupant tous ces automates et en vérifiant s'ils sont des systèmes dynamiques symboliques de type fini stricts de $\mathcal{D}$, on obtient une condition nécessaire et suffisante effective d'injectivité en mesure de la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$.

4.5.1 Uplets admissibles

Par définition, la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ n'est pas injective en un point $w_1 \in \Omega$ si et seulement s'il existe $w_2 \in \Omega$ et $n_1, \dots n_{d-1} \in \mathbb{Z}$ tels que $\varphi(w_1) - \varphi(w_2) = \sum_{k=1}^{d-1} n_k(\delta(k) - \delta(d))$. Or $\varphi(\Omega)$ est borné et l'ensemble $\sum_{k=1}^{d-1} \mathbb{Z}(\delta(k) - \delta(d))$ est un réseau. Les entiers n_k sont donc bornés. Le lemme suivant va permettre de déterminer explicitement leurs bornes.

Lemme 4.5.1 *Soient $K_1, \dots, K_{r+s-1}$ des réels positifs et $\mathcal{I}$ le parallélogramme :*

$$\mathcal{I} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots x_{r+s-1}) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s, \ \ \forall j < r+s, \ |x_j| < K_j \ \right\}.$$

Il existe $M_1, \dots M_{d-1} \in \mathbb{N}$ explicites tels que pour tout $(n_1, \dots n_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$, s'il existe i_0 pour lequel $n_{i_0} > M_{i_0}$, alors $\sum_{k=1}^{d-1} n_k(\delta(k) - \delta(d)) \notin \mathcal{I}$.

Preuve En séparant les parties réelles et imaginaires, on plonge $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{R}^{d-1}$, de sorte que l'image de $\mathcal{I}$ par ce plongement est inclus dans le parallélogramme suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}, \qquad & |x_j| < K_j \text{ pour } j = 1 \dots r-1 \\ & |x_{r+2j}| < K_{r+j}, |x_{r+2j+1}| < K_{r+j} \text{ pour } j = 0 \dots s-1\}. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{J}$ l'ensemble des sommets du parallélogramme $\mathcal{I}_1$

$$\mathcal{J} = \left\{ (\pm K_1, \pm K_2, \dots, \pm K_r, \pm K_r, \dots, \pm K_{r+s-1}, \pm K_{r+s-1}) \in \mathbb{R}^{d-1} \right\}.$$

Soit $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{1 \le j,k \le d-1}$ la matrice de taille $d-1$ qui regroupe les coordonnées dans $\mathbb{R}^{d-1}$ des plongements $\mathbf{w}_j$ des vecteurs $\delta(j) - \delta(1)$: les coordonnées complexes sont remplacées par leurs parties réelles et imaginaires. Ainsi :

$$\begin{aligned} j = 2 \dots r, \ k = 1 \dots d-1, \qquad & a_{j-1,k} = < \mathbf{v}_j, \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(d) >, \\ j = 1 \dots s, \ k = 1 \dots d-1, \qquad & a_{r+2j,k} + i\, a_{r+2j+1,k} = < \mathbf{v}_{r+j}, \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(d) > . \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs $\delta(j)-\delta(d)$, forment une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{C}^s$, la matrice $\mathbf{A}$ est inversible.

Pour $j=1\ldots d-1$, M_j désigne le plus petit majorant entier de la j-ième coordonnée des vecteurs $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ lorsque $\mathbf{x}$ parcourt $\mathcal{J}$. Si $(\mathbf{x})_j$ désigne la j-ième coordonnée de $\mathbf{x}$, et $\lceil x\rceil$ est la partie entière supérieure d'un réel x, on a : $M_j=\lceil\max\{\,|(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})_j|,\mathbf{x}\in\mathcal{J}\,\}\,\rceil$.

On fixe un entier j entre 1 et $d-1$. On note $\mathcal{H}$ l' hyperplan affine de $\mathbb{R}^{d-1}$ défini par $\mathcal{H}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{d-1},\ (\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}\,)_j=M_j\}$.

Par construction on a $\forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{J}$, $(\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\,)_j<M_j$. Les sommets de $\mathcal{I}_1$ se trouvent donc tous dans le demi-espace défini par $(\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}\,)_j<M_j$. Par convexité, $\mathcal{I}_1$ est entièrement inclus dans ce demi-espace.

Soit $\mathbf{x}=\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{w}_k$. Alors $(\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}\,)_j=n_j$. En particulier,

$$\text{si } n_j\geq M_j,\ \text{alors } (\,\mathbf{A}^{-1}\sum_{k=1}^{d-1}(n_k\mathbf{w}_k)\,)_j\geq M_j.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{w}_k$ n'est pas dans le même demi-espace que $\mathcal{I}_1$ et ne peut pas appartenir à $\mathcal{I}_1$. Or, $\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{w}_k$ est précisément le plongement de $\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{v}_k$ dans $\mathbb{R}^{d-1}$. Si $\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{v}_k\in\mathcal{I}_1$, on a donc $\sum_{k=1}^{d-1}n_k\mathbf{w}_k\in\mathcal{I}_1$, et $n_j<M_j$. Ceci prouve que les nombres M_j vérifient le lemme. ■

On rappelle que les conjugués algébriques de α sont notés $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_d$.

Définition 4.5.1 *Un $(d-1)$-uplet $(n_1,\ldots,n_{d-1})\in\mathbb{N}^{d-1}$ est dit* admissible *si et seulement si $n_j\leq M_j$ pour $j=1\ldots d-1$, les M_j étant les entiers associés par le lemme 4.5.1 aux nombres $K_1,\ldots,K_{r+s-1}$ suivants :*

$$K_j=\frac{1}{1-\alpha_{j+1}}\max_{(p_1,a_1,s_1),(p_2,a_2,s_2)\in\mathcal{P}}|<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(p_1)-\mathbf{l}(p_2)>|.$$

Cette définition est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 4.5.2 *S'il existe $w_1,w_2\in\Omega$ tels que $\varphi(w_1)-\varphi(w_2)=\sum_{k=1}^{d-1}n_k(\delta(k)-\delta(d))$, alors $n_1,\ldots,n_{d-1}$ est un $(d-1)$-uplet admissible.*

Preuve Soit $\gamma(w_1)=(p_i,a_i,s_i)_i$ et $\gamma(w_2)=(q_i,b_i,r_i)_i$. Alors $\varphi(w_1)-\varphi(w_2)=\sum_{k=1}^{d-1}(\delta(k)-\delta(d))$ si et seulement si pour $j=2\ldots r+s$

$$\textstyle\sum_{i\geq0}<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(p_i)-\mathbf{l}(q_i)>{\alpha_j}^i=\sum_{k=1}^{d-1}n_k<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(k)-\mathbf{l}(d)>.$$

Vu la définition de K_j, ceci implique $|\,\sum_{k=1}^{d-1}n_k<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(k)-\mathbf{l}(d)>\,|\leq K_j$. Ainsi, le vecteur $\sum_{k=1}^{d-1}(\delta(k)-\delta(d))$ appartient au parallélogramme $\mathcal{I}$ défini au lemme 4.5.1 à partir des constantes K_j. Par ce même lemme, $(n_1,\ldots,n_{d-1})$ doit être admissible. ■

4.5.2 Automates $(n_1,\ldots,n_{d-1})$

Soit $\mathcal{U}=(n_1,\ldots,n_{d-1})$ un $d-1$-uplet admissible fixé. On recherche les couples $w_1,w_2\in\Omega$ tels que $\varphi(w_1)-\varphi(w_2)=\sum_{k=1}^{d-1}n_k(\delta(k)-\delta(d))$. Ceci revient à trouver les paires $(p_i,a_i,s_i)_i,(q_i,b_i,r_i)_i$ de $\mathcal{D}$ telles que

$$\forall\,j=2\ldots r+s,\quad\sum_{i\geq0}<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(p_i)-\mathbf{l}(q_i)>{\alpha_j}^i=\sum_{k=1}^{d-1}n_k<\mathbf{v}_j,\mathbf{l}(k)-\mathbf{l}(d)>.\qquad(4.5)$$

Or, l'automate d'injectivité reconnaît les éléments $(p_i, a_i, s_i)_i$ de $\mathcal{D}$ tels qu'il existe $(q_i, b_i, r_i)_i \in \mathcal{D}$ avec

$$\forall j = 2 \ldots r+s, \quad \sum_{i \geq 0} < \mathbf{v}_j, \mathbf{l}(p_i) - \mathbf{l}(q_i) > {\alpha_j}^i = 0.$$

Nous allons donc modifier les automates arithmétique et d'injectivité de manière à reconnaître les $(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}$ qui vérifient la formule 4.5.

On appelle *automate $\mathcal{U}$-arithmétique* la composante connexe de $\xi_0 = -\sum_{j=1}^{d-1} n_j < \mathbf{v}_1, \mathbf{l}(j) - \mathbf{l}(1) >$ dans l'automate suivant :

- les transitions sont étiquetée par l'ensemble $\mathcal{C}$;
- un nombre $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$ est un état si et seulement si $\xi = \frac{1}{\alpha^N}(\xi_0 + \sum_{n<N} c_n \alpha^n)$, où $(c_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}$ telle que pour $k = 2 \ldots d$ on a $\sum_{n \geq 0} \tau_k(c_n) {\alpha_k}^n = \sum_{k=1}^{d-1} n_k < \mathbf{v}_j, \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(d) >$;
- $\gamma = c_N$ étiquette alors une transition entre $\xi = \frac{1}{\alpha^N}(\xi_0 + \sum_{n<N} c_n \alpha^n)$ et $\nu = \frac{1}{\alpha^{N+1}}(\xi_0 + \sum_{n<N+1} c_n \alpha^n)$.

Lemme 4.5.3 *L'automate $\mathcal{U}$-arithmétique est fini. L'ensemble des étiquettes de chemins partant de ξ_0 est l'ensemble des suites $(c_n)_n$ de $\mathcal{C}$ telles que pour $j = 2 \ldots d$ on a $\sum_{n \geq 0} \tau_k(c_n) {\alpha_k}^n = \sum_{k=1}^{d-1} n_k < \mathbf{v}_j, \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(d) >$.*

Preuve La preuve est copiée sur celle du théorème 4.2.1 à partir des remarques suivantes :

- Soit $k \geq 2$ et τ_k l'homomorphisme canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{Q}(\alpha_k)$. Soit $\xi = \frac{1}{\alpha^N}(\xi_0 + \sum_{n<N} c_n \alpha^n)$. Alors $\tau_k(\xi) = \sum_{n \geq 0} c_{n+N} {\alpha_k}^n$ est borné par $\frac{1}{1-|\alpha|_k} \max |\tau_k(\mathcal{C})|$ indépendamment de ξ.
- Si $\xi = \frac{1}{\alpha^N}(\xi_0 + \sum_{n<N} c_n \alpha^n)$, alors $|\xi| \leq |\xi_0| + \frac{1}{|\alpha|-1} \max |\mathcal{C}|$.
- Si $(\xi_n)_n$ est un chemin du graphe partant de ξ_0 étiqueté par une suite $(c_n)_n$, alors pour tout $N > 0$ on a $\xi_N = \frac{\xi_0 + \sum_{0 \leq n < N} \alpha^n c_n}{\alpha^N}$. Puisque les $\tau_k(\xi_N)$ sont bornés pour $k \geq 2$, on a finalement $\sum_{n \geq 0} \tau_k(c_n) {\alpha_k}^n = \sum_{k=1}^{d-1} n_k < \mathbf{v}_j, \mathbf{l}(k) - \mathbf{l}(d) >$ dès que $k \geq 2$.

■

On appelle *automate de $\mathcal{U}$-injectivité* la composante connexe de l'ensemble des états de la forme $(-\sum_{j=1}^{d-1} n_j < \mathbf{v}_1, \mathbf{l}(j) - \mathbf{l}(1) >, a, a)$ dans l'automate suivant :

- Les transitions sont étiquetées par $\mathcal{P} = \{(p, a, s), \exists\, b \in \mathcal{A}, \sigma(b) = pas\}$.
- Les états sont les triplets de la forme (ξ, a_1, a_2), où ξ est un état de l'automate $\mathcal{U}$-arithmétique et $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.
- Il y a une transition de (ξ, a_1, a_2) vers (η, b_1, b_2) si et seulement s'il existe $(p_1, s_1), (p_2, s_2)$ tels que $\sigma(b_1) = p_1 a_1 s_1$, $\sigma(b_2) = p_2 a_2 s_2$, et $\alpha\, \nu - \xi =< \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p_1) - \mathbf{l}(p_2) >$. Cette transition est alors étiquetée par (p_1, a_1, s_1).

Les sommets de la forme $(-\sum_{j=1}^{d-1} n_j < \mathbf{v}_1, \mathbf{l}(j) - \mathbf{l}(1) >, a, a)$ sont dits *$\mathcal{U}$-originaux.* Sauf pour le $(d-1)$-uplet nul, ces automates ne présentent pas de symétrie particulière.

Proposition 4.5.1 *Soit $\mathcal{U} = (n_1, \ldots, n_{d-1}) \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^{d-1}$. Soit $w_1 \in \Omega$. Il existe $w_2 \in \Omega$ tel que $\varphi(w_1) - \varphi(w_2) = \sum_{k=1}^{d-1} n_k(\delta(k) - \delta(d))$ si et seulement si le développement en préfixes-suffixes $\Gamma(w_1)$ étiquette, dans l'automate de $\mathcal{U}$-injectivité, un chemin infini partant d'un sommet $\mathcal{U}$ original.*

Preuve La preuve est copiée sur celles des propositions 4.3.1 et 4.4.1. ■

4.5.3 Condition nécessaire et suffisante d'isomorphisme.

En regroupant les résultats précédents, on obtient le critère suivant. Les deux premières conditions concernent l'injectivité en mesure de la représentation géométrique φ (voir théorème 4.4.1).

La troisième vérifie que les couples de points du fractal de Rauzy qui sont séparés par un vecteur non nul du réseau $\mathcal{L}$ forment un ensemble de mesure nulle.

Théorème 4.5.1 *La représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Dans l'automate d'injectivité, toute transition arrivant en un sommet original provient d'un sommet original.*
2. *Les étiquettes des chemins de l'automate d'injectivité ne passant jamais par un sommet original forment un sous-ensemble strict de $\mathcal{D}$.*
3. *Pour tout $\mathcal{U} = (n_1, \dots, n_{d-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{d-1}$ admissible, l'ensemble des étiquettes de chemins de l'automate de $\mathcal{U}$-injectivité est strictement inclus dans $\mathcal{D}$.*

Preuve La représentation torique est injective en mesure si et seulement si pour tout $(d-1)$-uplet admissible $\mathcal{U} = (n_1, \dots, n_{d-1})$, l'ensemble des points w_1 de Ω pour lesquels il existe $w_2 \neq w_1 \in \Omega$ qui vérifie $\varphi(w_1) - \varphi(w_2) = \sum_{k=1}^{d-1} n_k(\delta(k) - \delta(d))$ est de mesure nulle. Le cas $\mathcal{U} = (0, \dots, 0)$ a été caractérisé par le théorème 4.4.1. Si $\mathcal{U} \neq (0, \dots, 0)$, on obtient la troisième condition avec un raisonnement semblable à celui du théorème 4.4.1. ■

Corollaire 4.5.1 *La condition définie au théorème 4.5.1 est une condition suffisante pour que le système symbolique engendré par une substitution de type Pisot et unimodulaire soit isomorphe à une translation sur une tore.*

Proposition 4.5.2 *Soit σ une substitution de type Pisot et unimodulaire qui vérifie la condition d'injectivité sur le tore définie au théorème 4.5.1. Pour tout vecteur du réseau de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^s$: $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, toutes lettres $i, j \in \mathcal{A}$ et tout sous-ensembles $D_1 \subset [i]$ et $D_2 \subset [j]$ de mesure non nulle, on a :*

$$\textit{Si} \quad \mu_{\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^s}\, (\varphi(D_1) \cap (\varphi(D_2) + \mathbf{x})) \neq 0 \quad \textit{alors} \quad i = j \ \ \textit{et} \ \ \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Preuve Ceci est une conséquence directe du fait que la mesure de Lebesgue et la mesure image de la représentation φ sont proportionnelles (proposition 3.3.1). ■

Corollaire 4.5.2 *Il existe un algorithme effectif qui décide si le fractal de Rauzy $\varphi(\Omega)$ associé à une substitution unimodulaire de type Pisot, est le domaine fondamental de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ par rapport au réseau $\mathcal{L}$, c'est-à-dire qu'il engendre un pavage régulier de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.*

Preuve On sait selon le chapitre 3 que l'application $\varphi_{\mathcal{L}}$ est surjective dans le quotient $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s / (\sum_{i=1}^{d-1} \mathbb{Z}(\delta(i) - \delta(1))$. Ceci implique que

$$\bigcup_{n_1, \dots, n_{d-1} \in \mathbb{Z}} (\varphi(\Omega) + \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta(i) - \delta(1))) = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s.$$

Si deux translatés de $\varphi(\Omega)$ se rencontrent sur une partie de mesure non nulle, l'application $\varphi_{\mathcal{L}}$ n'est pas injective. Le fractal $\varphi(\Omega)$ engendre donc un pavage de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$. ■

4.5.4 Exemples

Exemple 1 : substitution de Fibonacci. Un vecteur propre à gauche de la substitution est $(1, \alpha - 1)$, si bien que les nombre intervenant dans l'échange d'intervalle sont $\delta(1) = 1$ et $\delta(2) = \rho - 1 = \alpha$, où $\rho = (1 - \sqrt{5})/2$ et $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$.

Le réseau par lequel on quotiente $\mathbb{R}$ pour obtenir une translation torique est $\mathbb{Z}(2 - \rho)$. Le facteur de translation est alors l'addition de 1 sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}(2 - \rho)$.

En plus du sommet nul, qui engendre l'automate d'injectivité, seuls deux éléments de $\mathbb{Z}(2-\alpha)$ engendrent un automate de $\mathcal{U}$-injectivité non vide : ce sont les points $\pm(\alpha - 2)$. Les automates de $\mathcal{U}$-injectivité correspondant reconnaissent seulement la suite $[(\varepsilon, 1, \varepsilon)(1, 2, \varepsilon)]^\infty = \Gamma(w_1)$ pour l'un et $[(1, 2, \varepsilon)(\varepsilon, 1, \varepsilon)]^\infty = \Gamma(w_2)$ pour l'autre.

Ainsi, il n'existe que deux points de l'intervalle $\varphi(\Omega)$ qui sont égaux modulo le réseau $\mathbb{Z}(2-\rho)$: les points $\varphi(w_1) = -1$ et $\varphi(w_2) = \rho - 1 = \alpha$. Puisque $\varphi(\Omega)$ est connexe, on en déduit que ces deux points sont les extrémités gauche et droite de cet intervalle. La longueur de $\varphi(\Omega)$ est donc la taille de la maille fondamentale du réseau $\mathbb{Z}(2-\rho)$, c'est-à-dire $2-\rho$.

Exemple 2 : substitution de Tribonacci. Si α est une racine de module inférieur à 1 de $X^3 - X^2 - X - 1$, un vecteur propre à gauche de la substitution est $(1, \alpha - 1, \alpha^2 - \alpha - 1)$. La représentation géométrique est à valeur dans $\mathbb{C}$. Les couples pour lesquels l'automate de $\mathcal{U}$-injectivité est non vide sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$. Les automates de $\mathcal{U}$-injectivité correspondant vérifient tous le critère d'injectivité.

Ainsi, on retrouve que le système substitutif de tribonacci est isomorphe à une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^2$.

De plus, le fractal $\varphi(\Omega)$ pave le plan suivant le réseau $\mathbb{Z}(2+\alpha-\alpha^2)\oplus\mathbb{Z}(2\alpha-\alpha^2)$. Les vecteurs de ce réseau qui relient exactement deux points du fractal de Rauzy $\varphi(\Omega)$ sont les vecteurs $\pm(\alpha - 2)$, $\pm(2\alpha - \alpha^2)$ et $\pm(\alpha^2 - \alpha - 2)$. Les automates de $\mathcal{U}$-injectivité correspondant ont plusieurs boucles, ce qui signifie qu'il y a un nombre non dénombrable de couples de points qui sont séparés par de tels vecteurs.

Exemple 3 : substitution de Tribonacci renversée. Le vecteur propre est le même que pour la substitution de Tribonacci. En particulier, le réseau par lequel on quotiente est le même. Par contre, les vecteurs de ce réseau qui relient deux points du fractal sont 0, $\pm(\alpha^2 - \alpha - 2)$, $\pm(\alpha - 2)$, $\pm(2\alpha - \alpha^2)$, $\pm(\alpha^2 - 4)$, $\pm(2\alpha^2 - 3\alpha - 2)$ et $\pm(\alpha^2 - 3\alpha + 2)$. Les trois premières paires de vecteurs non nuls génèrent un automate de $\mathcal{U}$-injectivité reconnaissant un nombre infini de chemins, mais vérifiant le critère d'injectivité en mesure. Les trois dernières paires d'automates reconnaissent chacunes exactement un chemin. On obtient ainsi le résultat :

Proposition 4.5.3 *Le système substitutif associé à la substitution $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 31$ $\sigma(3) = 1$ est isomorphe en mesure à une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^2$, ainsi qu'au système associé à la substitution de Tribonacci. Le fractal $\varphi(\Omega)$ (figure 4.4) engendre un pavage régulier du plan.*

Exemple 4 : $\sigma_6(1) = 12$, $\sigma_6(2) = 13$, $\sigma_6(3) = 132$. Là encore, le critère d'injectivité sur le tore est vérifié.

Proposition 4.5.4 *Le système substitutif associé à la substitution $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$ $\sigma(3) = 132$ est isomorphe en mesure à une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^2$.*

Tous les exemples traités à ce jour vérifient le critère d'injectivité sur le tore, et engendrent donc tous des pavages périodique de $\mathbb{R}^{d-1}$.

Remarque : extension finie du facteur équicontinu maximal. On a vu à la section 3.5 que les techniques utilisées permettent de prouver que tout système substitutif unimodulaire de type Pisot est une extension finie de son facteur équicontinu maximal. Une telle propriété peut-être exprimée en terme d'automates.

En effet, selon les résultats sur l'étude des fibres de la représentation qui seront explicité au chapitre 7, section 7.4, le système substitutif est isomorphe en mesure à une extension finie de la rotation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ si et seulement si presque tous les éléments de $\mathcal{D}$ sont reconnus un nombre borné de fois par l'ensemble des automates de $\mathcal{U}$-injectivité.

De plus, selon la théorie spectrale des systèmes substitutifs (voir chapitre 1), la partie irrationnelle du spectre d'une substitution unimodulaire de type Pisot est un sous-groupe libre de $\mathbb{R}$ de rang $d-1$. Par ailleurs, la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est surjective, le système substitutif admet pour valeurs propres métriques les $d-1$ coordonnées $t_1, \ldots t_{d-1}$ du vecteur de translation dans $\mathbb{T}^{d-1}$, ces coordonnées étant rationnellement indépendantes. Ainsi, Il existe donc des entiers $n_1, \ldots, n_{d-1}$ tels que les t_i/n_i sont des générateurs de la partie non rationnelle du spectre du système substitutif. Enfin, la partie rationnelle du spectre est fini. On en déduit que le facteur équicontinu maximal du système substitutif est une extension finie de la rotation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$.

En déterminant un algorithme qui dénombre le nombre de chemins des automates de $\mathcal{U}$-injectivité qui reconnaissent une même étiquette, on obtiendrait ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système substitutif unimodulaire de type Pisot soit une extension finie de son facteur équicontinu maximal.

Vu les résultats du chapitre 3, ceci n'a bien entendu pas un grand intérêt pour l'étude des systèmes substitutifs unimodulaires de type Pisot. Par contre, dans le cas non unimodulaire que nous aborderons au chapitre 7, il semble possible de généraliser l'idée ci-dessus d'utiliser des automates pour étudier les fibres qui séparent le système substitutif de son facteur équicontinu maximal, contrairement aux techniques du chapitre 3 qui semblent beaucoup plus difficilement généralisables.

Chapitre 5

Partitions de Markov pour les automorphismes du tore

Dans ce chapitre, nous utilisons la structure combinatoire du développement en préfixes-suffixes (chapitre 2), les propriétés géométriques, algébriques et auto-similaires de la représentation géométrique (chapitre 3) et la caractérisation de l'injectivité de la représentation torique provenant des propriétés de théorie des nombres du système (chapitre 4), pour associer à toute substitution unimodulaire qui vérifie le critère d'injectivité sur tore une partition de Markov explicite pour l'automorphisme du tore associé à la matrice d'incidence de la substitution.

Rappelons que la section 1.5 est entre autre consacrée à la définition des partitions de Markov et à un bref récapitulatif des résultats connus sur ce sujet.

Dans la section 5.1, nous définissons une représentation géométrique sur le système dynamique symbolique bilatéral associé à l'automate des préfixes-suffixes. Cette représentation, liée à la représentation géométrique du système substitutif φ, est définie de telle façon que le décalage sur le système dynamique symbolique de type fini code l'action de la matrice d'incidence de la substitution $\mathbf{M}_\sigma$ sur l'image de la représentation, et que les cylindres du système dynamique symbolique de type fini bilatéral forment une partition de Markov pour cette action.

Le point important à vérifier pour qu'on ait bien une partition de Markov est que l'image de la représentation forme un domaine fondamental de $\mathbb{Z}^d$. Nous montrons ceci en deux étapes : on calcule à la section 5.2 le volume de l'image de la représentation, et on montre à la section 5.3 que les décalés de cette image par $\mathbb{Z}^d$ rencontrent l'image elle-même sur un ensemble de mesure nulle.

Ce point étant prouvé, on vérifie à la section 5.4 que les cylindres du système dynamique symbolique bilatéral associé à l'automate des préfixes-suffixes fournissent une partition de Markov pour l'action de $\mathbf{M}_\sigma$ sur le tore.

On interprète enfin la représentation géométrique du système substitutif comme un premier retour sur la feuille contractante de $\mathbf{M}_\sigma$ de l'action sur le tore du flot linéaire dirigé par la direction dilatante de cette matrice.

5.1 Représentation du système dynamique symbolique de type fini bilatéral associé à l'automate des préfixes-suffixes.

Soit σ une substitution sur d lettres, de type Pisot et unimodulaire. Soit $\mathbf{M}_\sigma$ sa matrice d'incidence. Les valeurs propres $\mathbf{M}_\sigma$ sont toujours notée α_1 (valeur propre dominante), ..., α_r pour les réelles et $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$, $\alpha_{r+s+1} = \overline{\alpha_{r+1}}$, ..., $\alpha_{r+2s} = \overline{\alpha_{r+s}}$ pour les complexes.

On note $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$, une base de vecteurs propres à droite algébriquement normalisée, et $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$, la base de vecteurs propres à gauche algébriquement normalisée correspondante (voir chapitre 1, section 1.3.2).

Soit $\widetilde{\mathcal{D}}$ le *système dynamique symbolique de type fini bilatéral associé à* σ, c'est-à-dire l'ensemble des chemins bi-infinis reconnus par l'automate des préfixes-suffixes. Plus précisément,

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \{(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{Z}};\ \forall\, i \in \mathbb{Z},\ p_i a_i s_i = \sigma(a_{i+1})\}.$$

Le système de type fini bilatéral $\widetilde{\mathcal{D}}$ se projette canoniquement sur le système de type unilatéral $\mathcal{D}$ associé à l'automate des préfixes-suffixes par l'application $(p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

On note T le décalage sur $\widetilde{\mathcal{D}}$.

Au chapitre 3, nous avons défini une représentation géométrique φ du système substitutif associé à σ. Cette représentation faisait intervenir le développement en préfixes-suffixes associé à σ. On peut remarquer que φ ne dépend en fait que du système dynamique symbolique de type fini unilatéral $\mathcal{D}$ engendré par l'automate des préfixes-suffixes. La définition 5.1.1 étend la définition de φ au système dynamique symbolique de type fini bilatéral $\widetilde{\mathcal{D}}$.

Pour cela, on rappelle la définition des applications chiffres sur $\mathcal{A}^*$ (formule (3.1)). La notation $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{v}$ désigne toujours le produit scalaire de $\mathbb{C}^d$.

$$\forall k = 1 \ldots d, \quad \forall\, W \in \mathcal{A}^*, \quad \delta_k(W) =< \mathbf{l}(W), \mathbf{v}_k > .$$

On étend cette définition à $\mathcal{P}$:

$$\forall k = 1 \ldots d, \quad \forall\, e = (p, a, s) \in \mathcal{P}, \quad \delta_k(e) = \delta_k(p) =< \mathbf{l}(p), \mathbf{v}_k > . \tag{5.1}$$

Définition 5.1.1 *On appelle* représentation géométrique de $\widetilde{\mathcal{D}}$ *l'application* $\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{D}} \mapsto \mathbb{C}^d$ *définie comme suit :*

$$\forall\, e = (e_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \widetilde{\mathcal{D}}, \quad \widetilde{\phi}(e) = \sum_{k=1}^{d} \widetilde{\phi}_k(e)\, \mathbf{u}_k \quad avec \quad \widetilde{\phi}_k(e) = \begin{cases} -\sum_{i \leq -1} \delta_k(e_i)\, {\alpha_k}^i & si\ k = 1 \\ \sum_{i \geq 0} \delta_k(e_i)\, {\alpha_k}^i & si\ k = 2 \ldots d \end{cases} .$$

Remarque 5.1.1 *La représentation géométrique* $\widetilde{\phi}$ *de* $\widetilde{\mathcal{D}}$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$.

Preuve Pour $1 \leq k \leq r$, les applications $\widetilde{\phi}_k$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et les vecteurs $\mathbf{u}_k$ sont à coordonnées réelles. Ainsi, $\widetilde{\phi}_k(e)\, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^d$.

Soit $r + 1 \leq k \leq r + s$. Par construction, les coordonnées des vecteurs $\mathbf{v}_k$ et $\mathbf{v}_{k+s}$ d'une part, $\mathbf{u}_k$ et $\mathbf{u}_{k+s}$ d'autre part, sont conjuguées dans le plan complexe. De ce fait, on a pour tout $e \in \mathcal{P}$: $\delta_{k+s}(e) = \overline{\delta_k(e)}$. Les valeurs propres α_k et α_{k+s} étant elle aussi conjuguées, on a $\widetilde{\phi}_{k+s} = \overline{\widetilde{\phi}_k}$.

Ainsi, $\widetilde{\phi}_k\, \mathbf{u}_k + \widetilde{\phi}_{k+s}\, \mathbf{u}_{k+s} = \widetilde{\phi}_k\, \mathbf{u}_k + \overline{\widetilde{\phi}_k \mathbf{u}_k}$ et cette somme de vecteurs est à coordonnées réelles. Finalement $\widetilde{\phi}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. ∎

La proposition suivante signifie que l'action du décalage sur $\widetilde{\mathcal{D}}$ et l'action de l'inverse de la matrice d'incidence ${\mathbf{M}_\sigma}^{-1}$ sont conjugués à un échange de morceaux près.

Proposition 5.1.1 *On a :*

$$\forall\, e = (e_i = (p_i, a_i, s_i))_{i \in \mathbb{Z}} \in \widetilde{\mathcal{D}}, \quad \widetilde{\phi}(T^{-1}e) = \mathbf{M}_\sigma\, \widetilde{\phi}(e) + \mathbf{l}(p_{-1}).$$

Preuve Si $k > 1$, on a $\widetilde{\phi}_k(T^{-1}e) = \sum_{i\geq 0} \delta_k(e_{i-1})\, {\alpha_k}^i = \alpha_k\, \widetilde{\phi}_k(e) + \delta_k(e_{-1})$.
De même, si $k = 1$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_1(T^{-1}e) &= -\sum_{i\leq -1} \delta_1(e_{i-1})\, {\alpha_1}^i = \alpha_1\, (-\sum_{i\leq -2} \delta_1(e_i)\, {\alpha_1}^i) \\ &= \alpha_1\, \left(\widetilde{\phi}_1(e) + {\alpha_1}^{-1}\, \delta_1(e_{-1})\right) = \alpha_1\, \widetilde{\phi}_1(e) + \delta_1(e_{-1}).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\widetilde{\phi}(T^{-1}e) = \sum_{k=1}^d \widetilde{\phi}_k(e)\, \alpha_k\, \mathbf{u}_k + \sum_{k=1}^d \delta_k(e_{-1})\, \mathbf{u}_k$.
Par hypothèse, $\mathbf{u}_k$ est vecteur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ pour α_k. On a donc

$$\sum_{k=1}^d \widetilde{\phi}_k(e)\, \alpha_k\, \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^d \widetilde{\phi}_k(e)\, \mathbf{M}_\sigma \mathbf{u}_k = \mathbf{M}_\sigma \widetilde{\phi}(e).$$

De plus, les vecteurs $\overline{\mathbf{v}_k}$ forment par construction la base duale des vecteurs $\mathbf{u}_k$. On peut ainsi conclure : $\sum_{k=1}^d \delta_k(e_{-1})\, \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^d < \mathbf{l}(p_{-1}), \mathbf{v}_k >\ \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^d < \overline{\mathbf{v}_k}, \mathbf{l}(p_{-1}) >\ \mathbf{u}_k = \mathbf{l}(p_{-1})$. ■

Corollaire 5.1.1 *L'application $\widetilde{\phi}$ réalise une semi-conjugaison enter le décalage T^{-1} sur $\widetilde{\mathcal{D}}$ l'action de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ dans $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$:*

$$\widetilde{\phi} \circ T^{-1} = \mathbf{M}_\sigma \circ \widetilde{\phi} \ mod\ \ \mathbb{Z}^n.$$

5.2 Volume de la représentation

Dans cette section, nous allons voir que 'ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ est une union finie de cylindres dont les bases sont situées sur l'hyperplan contractant de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ et dont la hauteur est dirigée par la direction dilatante de la matrice.

Dans le but de calculer la mesure de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$, nous nous intéressons à la base des cylindres, en regardant son lien avec la représentation géométrique du système substitutif, ce qui permet d'en calculer la mesure. On calcule ensuite la hauteur des cylindres.

On en déduit le calcul proprement dit du volume de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ à la proposition 5.2.3.

Pour tout lettre a, on note $(\,a\,)$ le cylindre de $\widetilde{\mathcal{D}}$ défini par a :

$$(\,a\,) = \{e = (p_i, a_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{\mathcal{D}},\ a_0 = a\}.$$

Proposition 5.2.1 *Soit $p_{\mathcal{H}}$ le plongement canonique de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{R}^d$ défini à la formule (3.7). Soit $q_{\mathcal{H}}$ la projection canonique de $\mathbb{R}^d$ dans le sous-espace contractant $\mathcal{H}$ de $\mathbf{M}_\sigma$.*

Pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$, les images des cylindres $(\,a\,)$ de $\widetilde{\mathcal{D}}$ et $[a]$ de Ω par les représentations $\widetilde{\phi}$ et φ sont liés par la relation suivante :

$$\forall\, a \in \mathcal{A}, \quad q_{\mathcal{H}}\, \widetilde{\phi}\,(\,a\,) = p_{\mathcal{H}}\, \varphi\,[a].$$

Preuve Le sous-espace contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ est engendré par les vecteurs $\mathbf{u}_i$ pour $1 < i \leq r$ et les parties réelles et imaginaires des vecteurs $\mathbf{u}_i$ pour $r < i \leq r + s$.

Pour $r < k \leq r + s$, un simple calcul montre que

$$\widetilde{\phi}_k \mathbf{u}_k + \widetilde{\phi}_{k+s} \mathbf{u}_{k+s} = \widetilde{\phi}_k \mathbf{u}_k + \overline{\widetilde{\phi}_k}\,\overline{\mathbf{u}_k} = 2\,\mathrm{Re}\ (\widetilde{\phi}_k)\ \ \mathrm{Re}\ (\mathbf{u}_k) - 2\,\mathrm{Im}\ (\widetilde{\phi}_k)\ \ \mathrm{Im}\ (\mathbf{u}_k).$$

De ce fait,

$$\forall\, e = (e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \widetilde{\mathcal{D}}, \quad q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}\,(e) = \sum_{k=2}^{d} \widetilde{\phi}_k(e)\,\mathbf{u}_k. \tag{5.2}$$

Soit $i_{\mathcal{D}}$ le plongement de $\mathcal{D}$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}$ qui consiste à prolonger un élément de $\mathcal{D}$ par des éléments de $\mathcal{P}$ dont le préfixe est toujours vide.

La formule 5.2 implique que la fonction $q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}$ ne fait intervenir que les fonctions $\widetilde{\phi}_k$ pour $k > 1$. Or, la valeur de chacune de ces fonctions ne dépend que de la partie positive des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}}$. On en déduit que pour toute lettre a, on a

$$q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\,(\,a\,) = q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\;i_{\mathcal{D}}\,\Gamma\,[a].$$

De plus, les définitions de la représentation géométrique de Ω et des applications $\widetilde{\phi}_k$ impliquent que

$$\varphi = (\widetilde{\phi}_2\,i_{\mathcal{D}}\,\Gamma, \ldots, \widetilde{\phi}_{r+s}\,i_{\mathcal{D}}\,\Gamma).$$

La définition de la projection $p_{\mathcal{H}}$ (formule 3.7) et la formule 5.2 ont ainsi pour conséquence que

$$p_{\mathcal{H}}\,\varphi = q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\;i_{\mathcal{D}}\,\Gamma. \tag{5.3}$$

On obtient ainsi

$$q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\,(\,a\,) = q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\;i_{\mathcal{D}}\,\Gamma\,[a] = p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,[a].$$

■

On a défini au chapitre 4 une condition combinatoire nécessaire et suffisante pour que la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ soit injective en mesure (théorème 4.5.1). **Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons que $\varphi_{\mathcal{L}}$ est effectivement injective**, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition combinatoire du théorème 4.5.1.

Corollaire 5.2.1 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure. Alors les deux compacts de l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ suivants sont égaux :*

$$q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}\,(\widetilde{\mathcal{D}}) = p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,(\Omega).$$

Cet ensemble est un domaine fondamental du réseau engendré par les projections suivantes sur l'hyperplan contractant des vecteurs de $\mathbb{Z}^n$: $q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(k) - q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(1)$.

Preuve On a $\widetilde{\mathcal{D}} = \cup_{i=1}^{d}(\,i\,)$ et $\Omega = \cup_{i=1}^{d}[i]$. La proposition 5.2.1 implique donc :

$$q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \cup_{i=1}^{d} q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}(\,i\,) = \cup_{i=1}^{d} p_{\mathcal{H}}\,\varphi[i] = p_{\mathcal{H}}\,\varphi(\Omega).$$

Selon le lemme 4.5.2, $\varphi(\Omega)$ est un domaine fondamental du réseau $\oplus_{k=1}^{d-1}\mathbb{Z}(\delta(k) - \delta(1))$ dans l'espace $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.

L'application $p_{\mathcal{H}}$ étant un isomorphisme de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$, $p_{\mathcal{H}}\,\varphi(\Omega)$ est dans cet hyperplan un domaine fondamental du réseau $\oplus_{k=1}^{d-1}\mathbb{Z}(\,p_{\mathcal{H}}\delta(k) - p_{\mathcal{H}}\delta(1)\,)$.

On obtient le résultat annoncé en rappelant que, selon le lemme 3.1.3, on a $p_{\mathcal{H}}\delta(k) = q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(k)$. ■

Ainsi, la projection de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ sur l'hyperplan contractant est une copie du fractal de Rauzy associé à la substitution. Le fait que la représentation torique soit injective en mesure signifie que le fractal de Rauzy est un domaine fondamental d'un réseau déterminé (voir chapitre 4). Lorsque cette condition est vérifiée, on en déduit dans le lemme suivant la mesure de la base de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$.

Lemme 5.2.1 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure.*

Soit $\mathcal{R}$ le parallélépipède rectangle ayant pour hauteur le vecteur dilatant $\mathbf{u}_1$ et pour base la maille du réseau de l'hyperplan contractant $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(i) - q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(1)$, $2 \leq i \leq d$. Le volume de $\mathcal{R}$ est égal à la somme des coordonnées de $\mathbf{u}_1$.

Preuve L'application $q_{\mathcal{H}}$ a pour noyau $\mathbb{R}\mathbf{u}_1$. De ce fait

$$\det(\mathbf{u}_1, q_{\mathcal{H}}(\mathbf{l}(2)) - q_{\mathcal{H}}(\mathbf{l}(1)), \ldots, q_{\mathcal{H}}(\mathbf{l}(d)) - q_{\mathcal{H}}(\mathbf{l}(1))) = \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{l}(2) - \mathbf{l}(1), \ldots, \mathbf{l}(d) - \mathbf{l}(1)).$$

En développant ce déterminant, on obtient

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{l}(2) - \mathbf{l}(1), \ldots, \mathbf{l}(d) - \mathbf{l}(1)) \\ &\quad = \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{l}(2), \ldots, \mathbf{l}(d)) \;-\; \textstyle\sum_{k=2}^{d} \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{l}(2), \ldots, \mathbf{l}(k-1),\, \mathbf{l}(1)\,, \mathbf{l}(k+1), \ldots, \mathbf{l}(d)). \\ &\quad = \textstyle\sum_{k=1}^{d} \det(\mathbf{l}(1), \mathbf{l}(2), \ldots \mathbf{l}(k-1),\, \mathbf{u}_1\,, \mathbf{l}(k+1), \ldots, \mathbf{l}(d)) \end{aligned}$$

Soit S la somme des coordonnées de $\mathbf{u}_1$. Le vecteur $\mathbf{u}_1$ se décompose dans la base canonique sous la forme $\mathbf{u}_1 = \sum_{j=1}^{d} z_j \mathbf{l}(j)$ avec $\sum_{j=1}^{d} z_j = S$. En injectant cette égalité dans le déterminant précédent, on obtient le résultat annoncé :

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{l}(2) - \mathbf{l}(1), \ldots, \mathbf{l}(d) - \mathbf{l}(1)) \\ &\quad = \textstyle\sum_{k=1}^{d} \det\Big(\mathbf{l}(1), \mathbf{l}(2), \ldots \mathbf{l}(k-1),\, \Big(\sum_{j=1}^{d} z_j\, \mathbf{l}(j)\Big)\,, \mathbf{l}(k+1), \ldots, \mathbf{l}(d)\Big) \\ &\quad = \textstyle\sum_{k=1}^{d} \det(\mathbf{l}(1), \mathbf{l}(2), \ldots \mathbf{l}(k-1), z_k\, \mathbf{l}(k), \mathbf{l}(k+1), \ldots, \mathbf{l}(d)) = \sum_{k=1}^{d} z_k = S. \end{aligned}$$

■

La substitution étant de type Pisot, le vecteur $\mathbf{u}_1$ dirige la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$. Dans [25] J.-M. Dumont et A. Thomas étudient les chemins de l'*automate des préfixes* associé à la substitution, qui consiste en l'automate des préfixes-suffixes dans lequel les étiquettes (p, a, s) sont remplacées par le préfixe p, et où les flèches sont inversées. Ils construisent à partir de cet automate un système de numération associé à la substitution, basé sur un ordre naturel entre les préfixes dépendant de leur longueur, et un algorithme glouton. Leurs travaux impliquent le résultat suivant sur la représentation $\widetilde{\phi}$ suivant la direction dilatante de la matrice.

Proposition 5.2.2 *Pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$, l'image par $\widetilde{\phi_1}$ du cylindre de $\widetilde{\mathcal{D}}$ engendré par a est un intervalle de $\mathbb{R}$:*

$$\widetilde{\phi_1}(\,a\,) = [- < \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1 >, 0].$$

Preuve Dans [25], étant donné $a_0 \in \mathcal{A}$, J.-M. Dumont et A. Thomas définissent une application ψ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites $(p_i, a_i)_{i>0} \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}$ telles que $p_i a_i$ est un préfixe de $\sigma(a_{i-1})$ pour tout $i > 0$ et telles que $p_i a_i \neq \sigma(a_{i-1})$ pour une infinité de i. Cette application associe à toute suite $(p_i, a_i)_{i>0}$ de $\mathcal{E}$ le réel $\sum_{i \geq 1} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_1 > (\alpha_1)^{-i-1}$. Ils montrent que cette application est injective sur $\mathcal{E}$ et que son image est l'intervalle $[0, < \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1 > [$.

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des éléments $e = (p_i, a_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ du cylindre $(\,a_0\,)$ tels qu'une infinité de s_i est non vide pour $i < 0$. Pour tout $e \in \mathcal{E}_1$, la suite $(p_{-i}, a_{-i})_{i>0}$ appartient à $\mathcal{E}$ et on a $\widetilde{\phi_1}(e) = -\psi((p_{-i}, a_{-i})_{i>0})$. Réciproquement, pour toute suite $(p_i, a_i)_{i>0} \in \mathcal{E}$, il existe $e = (q_i, b_i, s_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$ tel que $q_{-i} = p_i$, $b_{-i} = a_i$ pour tout $i > 0$ et $b_0 = a_0$. De ce fait, $\widetilde{\phi_1}\mathcal{E}_1 =]- < \mathbf{l}(a_0), \mathbf{v}_1 >, 0]$.

Or, $(\,a_0\,)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}_1$ dans $\widetilde{\mathcal{D}}$. Par continuité de $\widetilde{\phi_1}$, on a donc l'égalité $\widetilde{\phi_1}(\,a_0\,) = [- < \mathbf{l}(a_0), \mathbf{v}_1 >, 0]$. ■

Proposition 5.2.3 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure. Alors,*

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\,\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) = 1.$$

Preuve L'application $\widetilde{\phi}_1$ ne dépend que de la partie négative des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}}$, tandis que les $\widetilde{\phi}_k$ pour $k > 1$ ne dépendent que de leur partie positive. Dans l'automate des préfixes-suffixes, l'étiquette d'un chemin unilatéral vers la droite partant d'un sommet a peut être prolongée par n'importe quelle étiquette de chemin unilatéral vers la gauche qui arrive en a. Ajouté à la proposition 5.2.2, on en déduit que chaque $\widetilde{\phi}(\,a\,)$ est un cylindre ayant pour base l'ensemble $\varphi[a]$ plongé dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ croisé avec l'intervalle $[- < \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1 >, 0]$ selon la direction dilatante de la matrice :

$$\widetilde{\phi}(\,a\,) = q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(\,a\,) \oplus [- < \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1 >, 0]\,\mathbf{u}_1 = p_{\mathcal{H}}\varphi[a] \oplus [- < \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1 >, 0]\,\mathbf{u}_1.$$

Selon le lemme 3.3.1, le vecteur des mesures des ensembles $\mu_{\mathcal{F}}\,\varphi[a]$ est un vecteur propre dominant à droite de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$. Il est donc proportionnel au vecteur $\mathbf{u}_1$.

De plus, si la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure, la représentation géométrique φ est elle-aussi injective en mesure et $\sum_{j=1}^{d} \mu_{\mathcal{F}}\,\varphi[j] = \mu_{\mathcal{F}}\,\varphi(\Omega)$.

On note toujours $S = \sum_{j=1}^{d} < \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 >$ la somme des coordonnées $< \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 >$ de $\mathbf{u}_1$ dans la base canonique. On a donc

$$\forall\, 1 \le j \le d, \quad \mu_{\mathcal{F}}\,\varphi[j] = \frac{\mu_{\mathcal{F}}\,\varphi(\Omega)}{S} \; < \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 > .$$

La mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}$ par le plongement $p_{\mathcal{H}}$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $\mu_{\mathcal{H}}$ sur l'hyperplan $\mathcal{H}$. Ainsi, $\mu_{\mathcal{F}}\varphi[j]/\mu_{\mathcal{F}}\varphi(\Omega) = \mu_{\mathcal{H}}p_{\mathcal{H}}\varphi[j]/\mu_{\mathcal{H}}p_{\mathcal{H}}\varphi(\Omega)$. On obtient donc :

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\,\widetilde{\phi}(\,a\,) = \frac{< \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 >< \mathbf{l}(j), \mathbf{v}_1 >}{S}\; \mu_{\mathbb{R}^d}(\,p_{\mathcal{H}}\varphi(\Omega) \oplus [-1, 0]\,\mathbf{u}_1\,).$$

Selon le lemme 5.2.1, $p_{\mathcal{H}}\varphi(\Omega)$ est un domaine fondamental pour le réseau $\oplus_{k=1}^{d-1}\mathbb{Z}(\,q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(k) - q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(1)\,)$ de l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$.

La mesure de $p_{\mathcal{H}}\varphi(\Omega) \oplus [-1, 0]\,\mathbf{u}_1$ est ainsi égale à la mesure du parallélépipède engendré par $\mathbf{u}_1$ et les vecteurs $q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(k) - q_{\mathcal{H}}\mathbf{l}(1)$ pour $k > 1$, c'est-à-dire S selon le lemme 5.2.1.

On a donc

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\,\widetilde{\phi}(\,j\,) = < \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 >< \mathbf{l}(j), \mathbf{v}_1 > .$$

Si la substitution vérifie le critère du théorème 4.5.1, alors φ est injective en mesure, et les ensembles $\varphi[a]$ sont disjoints en mesure. Il en est de même pour leurs projections dans l'hyperplan contractant $p_{\mathcal{H}}\varphi[a] = q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(\,a\,)$. Ainsi, les ensembles les ensembles $\widetilde{\phi}(\,a\,)$ sont disjoints en mesure. Puisque $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ en est l'union, on obtient

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\,\widetilde{\phi}\,\widetilde{\mathcal{D}} \;= \sum_{j=1}^{d} < \mathbf{l}(j), \mathbf{u}_1 >< \mathbf{l}(j), \mathbf{v}_1 > = < \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 > = 1.$$

■

Une illustration de l'ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ est donnée aux figures 5.1 et 5.2 pour les substitutions de Fibonacci et Tribonacci.

On déduit du dernier théorème :

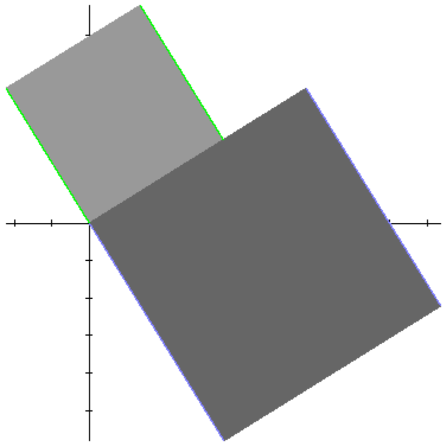

FIG. 5.1 – Ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ pour la substitution de Fibonacci

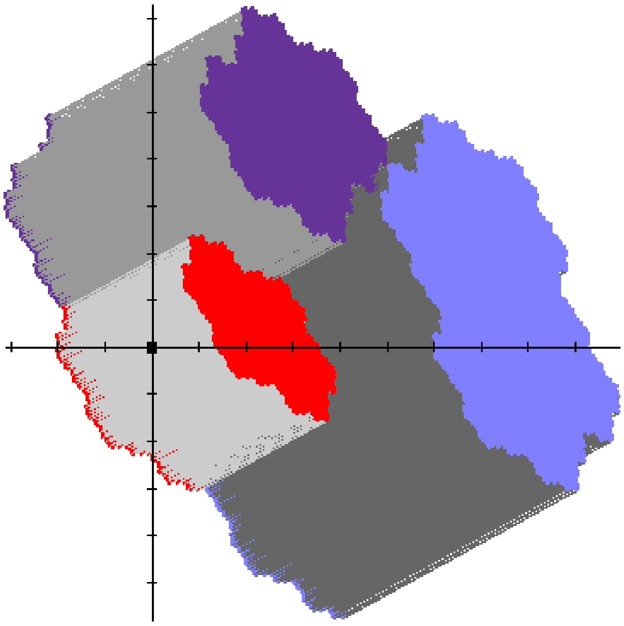

FIG. 5.2 – Ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ pour la substitution de Tribonacci

Proposition 5.2.4 *La mesure image par l'application $\widetilde{\phi}$ de la mesure d'entropie maximale sur $\widetilde{\mathcal{D}}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve Soit $[e_{-m}, \dots e_n]$ un cylindre de $\widetilde{\mathcal{D}}$. Selon la proposition 5.1.1, $\widetilde{\phi}T[e_{-m}, \dots e_n]$ est un décalé de $\mathbf{M}_\sigma^{-1}\widetilde{\phi}[e_{-m}, \dots e_n]$. Puisque cette matrice est de déterminant ± 1, les deux ensembles ont même mesure dans $\mathbb{R}^d$, et plus généralement $\mu_{\mathbb{R}^d}\widetilde{\phi}[e_{-m}, \dots e_n] = \mu_{\mathbb{R}^d}T^m[e_{-m}, \dots e_n]$. Ainsi, on peut supposer que $m = 0$.

On pose $e_0 = (p_0, a_0, s_0), \dots, e_N = (p_N, a_N, s_N)$. La partie négative $[e_0, \dots, e_N] \cap \mathcal{P}^{-\mathbb{N}^*}$ du cylindre $[e_0, \dots, e_N]$ de $\widetilde{\mathcal{D}}$ est l'ensemble des chemins de l'automate des préfixes-suffixes qui arrivent en a_0. De ce fait, $\widetilde{\phi}[e_0, \dots, e_N]$ est un cylindre ayant pour base le fractal $\varphi\Gamma^{-1}[e_0, \dots, e_N]$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ et pour hauteur l'intervalle $[-\delta(a_0), 0]$ selon la direction dilatante de la matrice.

Selon les propositions 2.7.2 et 3.3.1, il existe une constante C non nulle telle que si $e_0, \dots, e_N$ est reconnu par l'automate des préfixes-suffixes, on a

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\,\widetilde{\phi}[e_0, \dots, e_N] = C\,\delta(a_0)\,\mu_\Omega\Gamma^{-1}[e_0, \dots, e_N] = C\,<\mathbf{l}(a_0), \mathbf{v}_1>\,\mu_\Omega[a_N]/\alpha^N.$$

On retrouve ainsi la mesure d'entropie maximale μ_{max} explicitée à la proposition 2.7.1, à une constante près. Mais, $C = \mu_{\mathbb{R}^d}(\widetilde{\phi}\widetilde{D}) = 1$ selon la proposition 5.2.3. Ainsi $\mu_{\mathbb{R}^d}(\widetilde{\phi}(B)) = \mu_{max}\,B$ pour tout borélien de $\widetilde{D}$. Par surjectivité de $\widetilde{\phi}$, on en déduit que $\widetilde{\phi}_\star\mu_{max} = \mu_{\mathbb{R}^d}$. ■

5.3 Domaine fondamental du tore

On a montré que l'image de $\widetilde{\mathcal{D}}$ par $\widetilde{\phi}$ est de mesure 1. Pour qu'il s'agisse d'un domaine fondamental de $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, il est donc suffisant de prouver que cet ensemble rencontre ses décalés par $\mathbb{Z}^d$ sur un ensemble de mesure nulle. Etant donné un vecteur $\mathbf{z}$ de $\mathbb{Z}^d$, deux cas se distinguent.

Si $\mathbf{z}$ a des coordonnées positives strictement et des coordonnées négatives strictement, à la proposition 5.3.1, on montre en les décomposant en petits bouts que les projections sur l'hyperplan contractant de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ des ensembles $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}$ et $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ se recontrent sur un ensemble de mesure nulle dans l'hyperplan contractant. Les ensembles $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}$ et $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ ne peuvent donc pas se rencontrer sur un ensemble de mesure non nulle.

Si $\mathbf{z}$ a des coordonnées de même signe, on étudie à la proposition 5.3.2 les projections des ensembles $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}$ et $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ sur la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$ et on en déduit que ces ensembles ne peuvent se recontrer.

Proposition 5.3.1 *Soit σ une substitution de type Pisot et unimodulaire. Soit σ une substitution de type Pisot dont la représentation $\varphi_\mathcal{L}$ est injective en mesure.*

Pour tout vecteur $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbb{Z}^d$ qui admet des coordonnées strictement positives et strictement négatives, on a :

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)\right) = 0.$$

Preuve Soit $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^d n_i\mathbf{l}(i)$ la décomposition de $\mathbf{z}$ dans la base canonique.

La projection de $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)$ sur l'hyperplan contractant $\mathcal{H}$ est alors incluse dans l'intersection des projections $\varphi(\Omega) \cap (\varphi(\Omega) + \sum_i n_i\delta(i))$. Nous allons montrer que cette dernière intersection est de mesure nulle dans $\mathcal{H}$. L'ensemble $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)$ ne pourra alors qu'être de mesure nulle.

Posons $M^+ = \sum_{n_j>0} n_j$ et $M^- = \sum_{n_j<0} n_j$. Par hypothèse, on a $M^+ \neq 0$ et $M^- \neq 0$.

Soit $W_1, W_2 \in \mathcal{A}^*$ deux mots finis dont les linéarisés sont les parties positives et négatives de $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{l}(W_1) = \sum_{n_i>0} n_i\,\mathbf{l}(i), \qquad \mathbf{l}(W_2) = -\sum_{n_i<0} n_i\,\mathbf{l}(i); \qquad \mathbf{z} = \mathbf{l}(W_1) - \mathbf{l}(W_2).$$

Le vecteur de translation $\sum_i n_i\delta(i)$ se décompose alors sous la forme :

$$\sum_i n_i\,\delta(i) = -\delta(W_2) + \delta(W_1).$$

En particulier, si $\mu_{\mathcal{F}}$ désigne toujours la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$, l'invariance par translation de $\mu_{\mathcal{F}}$ implique que :

$$\mu_{\mathcal{F}}\,(\,\varphi(\Omega)\,\cap\,(\varphi(\Omega) + \textstyle\sum_i n_i\delta(i))\,) = \mu_{\mathcal{F}}\,(\,(\varphi(\Omega) - \delta(W_1))\,\cap\,(\varphi(\Omega) - \delta(W_2))\,)\,.$$

L'ensemble Ω est stable par le décalage et se décompose de manière disjointe sous la forme : $\Omega = S^{M^+}\Omega = \cup_{V\in\mathcal{A}^{M^+}} S^{M^+}[V]$. Si la substitution vérifie le critère du théorème 4.5.1, la représentation φ est injective en mesure, et on a la partition suivante en mesure :

$$\varphi(\Omega) = \varphi(S^{M^+}\Omega) = \bigcup_{V\in\mathcal{A}^{M^+}} \varphi S^{M^+}[V] = \bigcup_{V\in\mathcal{A}^{M^+}} \varphi[V] + \delta(V).$$

En conséquence

$$\varphi(\Omega) - \delta(W_1) = \bigcup_{V\in\mathcal{A}^{M^+}} \varphi[V] + \delta(V) - \delta(W_1).$$

Dans la formule ci-dessus, chaque mot V a pour longueur celle de W_1 et le vecteur $\delta(V) - \delta(W_1)$ appartient au réseau $\mathcal{L} = \oplus_{i<d}\mathbb{Z}\,(\,\delta(i) - \delta(d)\,)$. L'ensemble $\varphi(\Omega) - \delta(W_1)$ est ainsi l'union disjointe de parties de $\varphi(\Omega)$ qui ont chacunes été décalées d'un vecteur du réseau $\mathcal{L}$. En décomposant Ω de la même manière en fonction de la longueur M^- de W_2, on obtient :

$$(\varphi(\Omega) - \delta(W_1)) \cap (\varphi(\Omega) - \delta(W_2)) = \bigcup_{V_1\in\mathcal{A}^{M^+},\, V_2\in\mathcal{A}^{M^-}} (\,\varphi[V_1]+\delta(V_1)-\delta(W_1)\,)\cap(\,\varphi[V_2]+\delta(V_2)-\delta(W_2)\,).$$

Puisque dans cette union, les vecteurs $\delta(V_1) - \delta(W_1)$ et $\delta(V_2) - \delta(W_2)$ appartiennent au réseau $\mathcal{L}$, les résultats du corollaire 4.5.2 implique que si l'intersection $(\,\varphi[V_1] + \delta(V_1) - \delta(W_1)\,) \cap (\,\varphi[V_2] + \delta(V_2) - \delta(W_2)\,)$ est de mesure non nulle, alors d'une part les vecteurs du réseau intervenant dans cette intersection sont identiques, et d'autre part les deux cylindres $[V_1]$ et $[V_2]$ se rencontrent, c'est-à-dire que l'un est inclus dans l'autre. On peut ainsi supposer que

$$[V_1] \cap [V_2] \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \delta(V_1) - \delta(W_1) = \delta(V_2) - \delta(W_2).$$

Or, les vecteurs $\delta(V_1) - \delta(W_1)$ et $\delta(V_2) - \delta(W_2)$ sont égaux si et seulement si $\mathbf{l}(V_1) + \mathbf{l}(W_2) = \mathbf{l}(W_1) + \mathbf{l}(V_2)$.

Puisque les vecteurs $\mathbf{l}(W_1)$ et $\mathbf{l}(W_2)$ n'ont par construction aucune coordonnée non nulle commune, on en déduit que pour tout j tel que $n_j > 0$, la j-ième coordonnée de $\mathbf{l}(V_1)$ est égale à la j-ième coordonnée de $\mathbf{l}(V_2) + \mathbf{l}(W_1)$. Les mots V_1 et W_1 ont même longueur, ceci implique que $\mathbf{l}(V_1) = \mathbf{l}(W_1)$.

De même, $\mathbf{l}(V_2) = \mathbf{l}(W_2)$. Les mots V_1 et V_2 n'ont ainsi aucune lettre en commun, et l'intersection $[V_1] \cap [V_2]$ est vide.

Ainsi, $\varphi(\Omega) \cap (\varphi(\Omega) + \sum_i n_i\delta(i))$ est de mesure nulle. ■

Proposition 5.3.2 *Soit σ une substitution de type Pisot et unimodulaire. Soit σ une substitution de type Pisot dont la représentation $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure.*

Pour tout vecteur $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ appartenant au cône positif de $\mathbb{Z}^n$ ou à son cône négatif, on a :

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)\right) = 0.$$

Preuve Supposons que tous les coefficients n_i du vecteur $\mathbf{z}$ sont négatifs ou nuls, l'un d'entre eux au moins étant non nul. On note $M = -\sum_{n_i}$ la somme de ces coefficients. Il existe alors un mot $W \in \mathcal{A}^*$ de longueur M qui admet $-\mathbf{z}$ pour linéarisé :

$$\mathbf{l}(W) = -\mathbf{z}.$$

Comme dans la preuve de la proposition précédente, on peut décomposer $\varphi(\Omega) - \delta(W)$ en bouts de $\varphi(\Omega)$ décalés chacun d'un vecteur du réseau $\oplus_{i<d}\mathbb{Z}\,(\delta(i) - \delta(d))$:

$$\varphi(\Omega) - \delta(W) = \varphi(S^M\Omega) - \delta(W) = \bigcup_{V \in \mathcal{A}^M} \varphi[V] + \delta(V) - \delta(W).$$

De ce fait,

$$\varphi(\Omega) \cap (\varphi(\Omega) - \delta(W)) = \bigcup_{V \in \mathcal{A}^M} \varphi(\Omega) \cap (\varphi[V] + \delta(V) - \delta(W)).$$

Dans cette union, selon le corollaire 4.5.2, les ensembles de mesure non nulle vérifient $\delta(W) = \delta(V)$. On a ainsi l'égalité suivante en mesure :

$$\varphi(\Omega) \cap (\varphi(\Omega) - \delta(W)) = \bigcup_{V \in \mathcal{A}^M,\, \mathbf{l}(V) = \mathbf{l}(W)} \varphi[V].$$

Pour chaque mot V qui admet même linéarisé que W, la première lettre i de V apparaît dans le mot W, et le i-ème coefficient n_i de $\mathbf{z}$ est non nul. De ce fait,

$$\varphi(\Omega) \cap (\varphi(\Omega) - \delta(W)) \subset \bigcup_{n_i < 0} \varphi[i]. \tag{5.4}$$

L'objectif final de cette preuve est de calculer la mesure de $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap (\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z})$. Pour cela, on décompose l'ensemble $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ en images de cylindre. On obtient ainsi

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right) = \bigcup_{i,j \in \mathcal{A}} \widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right).$$

Fixons deux lettres i et j dans $\mathcal{A}$. Pour une de ces deux lettres notée a, selon la proposition 5.2.3, l'ensemble $\widetilde{\phi}(\,a\,)$ est un cylindre ayant pour base l'ensemble $p_{\mathcal{H}}\varphi[a]$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ et de hauteur dirigée par la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$.

$$a = i, j, \quad \widetilde{\phi}(\,a\,) = [-\delta_1(a), 0]\,\mathbf{u}_1 \oplus p_{\mathcal{H}}\varphi[a].$$

Puisque le vecteur $\mathbf{z} = -\mathbf{l}(W)$ se projette en $-p_{\mathcal{H}}\delta(W)$ dans l'hyperplan contractant et en $- < \mathbf{l}(W), \mathbf{v}_1 > \mathbf{u}_1 = -\delta_1(W)\,\mathbf{u}_1$ sur la direction dilatante, on en déduit :

$$\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z} = [-\delta_1(j) - \delta_1(W), -\delta_1(W)]\,\mathbf{u}_1 \oplus (p_{\mathcal{H}}\varphi[j] - p_{\mathcal{H}}\delta(W)).$$

En particulier, l'intersection $\widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right)$ est égale à :

$$\widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right) = [-\delta_1(i), 0] \cap [-\delta_1(j) - \delta_1(W), -\delta_1(W)]\,\mathbf{u}_1 \oplus p_{\mathcal{H}}(\varphi[i] \cap (\varphi[j] - \delta(W))). \quad (5.5)$$

Selon la formule 5.4, si l'intersection $\varphi[i] \cap (\varphi[j] - \delta(W))$ est de mesure non nulle dans l'hyperplan $\mathcal{H}$ alors le i-ème coefficient n_i de $\mathbf{z}$ est non nul.

Ainsi, si $n_i = 0$, l'ensemble $\widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$ puisque sa projection dans $\mathcal{H}$ est de mesure nulle pour la mesure sur $\mathcal{H}$.

On peut donc supposer que i est tel que $n_i < 0$. La formule 5.5 implique en particulier

$$\widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right) \subset [-\delta_1(i), 0] \cap [-\delta_1(j) - \delta_1(W), -\delta_1(W)]\,\mathbf{u}_1 \oplus p_{\mathcal{H}}\varphi[i].$$

Puisque $n_i < 0$, la lettre i apparaît dans W. Les coefficients de $\mathbf{v}_1$ étant tous positifs, on a $\delta_1(W) =< \mathbf{l}(W), \mathbf{v}_1 > \geq \delta_1(i) =< \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_1 >$. En particulier, l'intervalle $[-\delta_1(i), 0] \cap [-\delta_1(j) - \delta_1(W), -\delta_1(W)]$ contient au plus un point. Ainsi, $\widetilde{\phi}(\,i\,) \cap \left(\widetilde{\phi}(\,j\,) + \mathbf{z}\right)$ est lui aussi de mesure nulle.

Finalement, $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)$ est une union finie d'ensembles qui sont tous de mesure nulle. On a donc bien

$$\mu_{\mathbb{R}^d}\left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)\right) = 0.$$

Pour finir, si le vecteur $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur non nul du cône positif de $\mathbb{Z}^d$, la mesure de $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) \cap \left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) + \mathbf{z}\right)$ est égale à celle de $\left(\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}}) - \mathbf{z}\right) \cap \widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$, et l'étude que nous venons de faire du cône négatif permet de conclure. ■

Corollaire 5.3.1 *L'ensemble $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ est un domaine fondamental du réseau $\mathbb{Z}^n$ et l'application $\widetilde{\phi}$ mod $\mathbb{Z}^n$ est surjective de $\widetilde{\mathcal{D}}$ dans $\mathbb{T}^n$.*

Preuve Selon la proposition 5.2.3, $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ a pour volume le volume de la maille fondamentale de $\mathbb{Z}^n$. En conséquence des travaux de [83], $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ est l'adhérence de son intérieur. Enfin, selon les propositions 5.3.1 et 5.3.2, l'intérieur de $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ ne rencontre par ses décalés par le réseau $\mathbb{Z}^n$. Ceci est suffisant pour conclure que $\widetilde{\phi}(\widetilde{\mathcal{D}})$ est un domaine fondamental. ■

Des illustrations de ces pavages sont données aux figures 5.3 et 5.4 pour les substitutions de Fibonacci et Tribonacci.

Les résultats précédent permettent d'étudier précisément l'action de la représentation $\widetilde{\phi}$ sur la base des cylindres dont est constitué $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$.

Lemme 5.3.1 *Soit $e = (\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément du système bilatéral $\widetilde{\mathcal{D}}$.*

Si $p_i = \varepsilon$ pour tout $i < 0$, alors $\widetilde{\phi}(e)$ appartient à l'hyperplan contractant $\mathcal{H}$ de $\mathbf{M}_\sigma$.

Si $s_i = \varepsilon$ pour tout $i < 0$, alors $\widetilde{\phi}(e)$ appartient à $\mathcal{H} + \mathbb{Z}^d$. Plus précisément, soit $f = (\,(q_i, b_i, r_i)\,)_{i\in\mathbb{Z}}$ l'unique élément de $\widetilde{\mathcal{D}}$ qui vérifie

$$\forall i < 0,\ p_i = \varepsilon, \quad \text{et} \quad (\,(q_i, b_i, r_i)\,)_{i\geq 0} = \tau(\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\geq 0},$$

où τ est le successeur sur le système dynamique symbolique de type fini unilatéral $\mathcal{D}$. On a alors

$$\widetilde{\phi}(e) = \widetilde{\phi}(f) - \mathbf{l}(a_0).$$

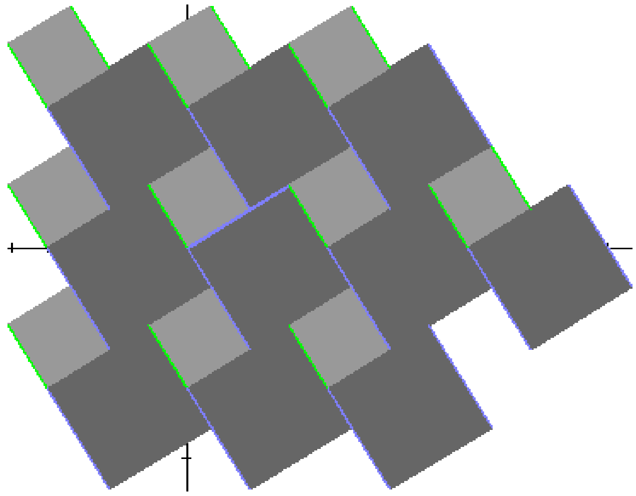

FIG. 5.3 – Pavage engendré par $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ pour la substitution de Fibonacci

Preuve Si $p_i = \varepsilon$ pour tout $i < 0$, alors $\widetilde{\phi}_1(e) = 0$, ce qui est suffisant pour affirmer que $\widetilde{\phi}(e) \in \mathcal{H}$.

Si $s_i = \varepsilon$ pour tout $i < 0$, selon [25], on a $\widetilde{\phi}_1(e) = -\delta_1(a_0)$. Soit f l'élément de $\widetilde{\mathcal{D}}$ défini dans l'énoncé. Par construction, on a $\widetilde{\phi}_1(f) = 0$ et donc $\widetilde{\phi}(f) \in \mathcal{H}$.

De plus, la partie positive de f est le successeur dans $\mathcal{D}$ de la partie positive de e. Or, l'application Γ conjugue l'action du successeur avec celle du décalage S sur Ω, et selon la preuve de la proposition 3.1.1, ce décalage S agit sur la représentation φ comme un pseudo-échange de morceaux. En plongeant les relations de la proposition 3.1.1 dans l'hyperplan $\mathcal{H}$ grâce aux applications $q_{\mathcal{H}}$ et $p_{\mathcal{H}}$ (voir formule 5.3), on obtient:

$$\begin{aligned}
q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(f) &= p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,\Gamma^{-1}\,(\,(q_i, b_i, r_i)\,)_{i\geq 0} \\
&= p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,\Gamma^{-1}\,\tau\,(\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\geq 0} \\
&= p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,S\,\Gamma^{-1}(\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\geq 0} \\
&= p_{\mathcal{H}}\,\left(\varphi\,\Gamma^{-1}(\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\geq 0} + \delta(a_0)\right) \\
&= p_{\mathcal{H}}\,\varphi\,\Gamma^{-1}(\,(p_i, a_i, s_i)\,)_{i\geq 0} + q_{\mathcal{H}}\,\mathbf{l}(a_0) \\
&= q_{\mathcal{H}}\,\widetilde{\phi}(e) + q_{\mathcal{H}}\,\mathbf{l}(a_0).
\end{aligned}$$

Puisque pour tout élément $g \in \mathcal{D}$, on a $\widetilde{\phi}(g) = q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(g) + \widetilde{\phi}_1(g)\mathbf{u}_1$, on obtient la formule annoncée:

$$\widetilde{\phi}(f) - \widetilde{\phi}(e) = \left(q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(f) - 0\,\mathbf{u}_1\right) - \left(q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(e) - \delta_1(a_0)\mathbf{u}_1\right) = q_{\mathcal{H}}\,\mathbf{l}(a_0) + \delta_1(a_0)\mathbf{u}_1 = \mathbf{l}(a_0).$$

■

Ainsi, l'ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ pave le plan par translation selon $\mathbb{Z}^d$ et est constitué des cylindres $\widetilde{\phi}[e]$,

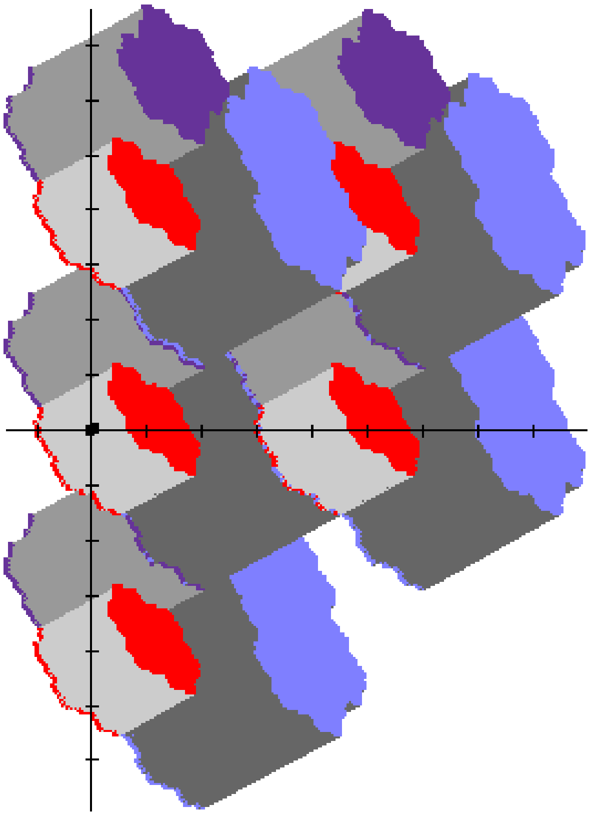

FIG. 5.4 – Pavage engendré par $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ pour la substitution de Tribonacci

où $e \in \mathcal{P}$. Deux cylindres $\widetilde{\phi}[e]$ et $\widetilde{\phi}[f]$ sont adjacents dans le pavage si et seulement s'ils se suivent dans la relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $e = (p, a, s)$ et $f = (q, b, r)$ avec $pas = qbr$ et $|p| < |q|$.

Corollaire 5.3.2 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure. Soit $\mathbf{M}_\sigma$ sa matrice.*

Le décalage sur le système substitutif associé à σ est conjugué en mesure au premier retour modulo $\mathbb{Z}^d$, sur la base de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$, du flot linéaire dirigé par la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$.

Preuve La lemme 5.3.1 signifie que partant d'un point de la base de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ (c'est-à-dire un élément $\widetilde{\phi}(e)$ où tous les préfixes négatifs de e sont vides), si on suit la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$, on arrive sur la frontière supérieure de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$, plus précisément, modulo $\mathbb{Z}^d$, au point $\widetilde{\phi}(f)$ de l'hyperplan contractant, obtenu comme l'image de $\widetilde{\phi}(e)$ par l'échange de morceaux du fractal de Rauzy.

De plus, l'intérieur de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ ne peut rencontrer les décalés par $\mathbb{Z}^d$ de la base de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ dans l'hyperplan contractant sur un ensemble de mesure non nulle dans l'hyperplan, sans quoi l'intérieur de $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ rencontrerait un de ses décalés et $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ ne serait plus un domaine fondamental de $\mathbb{Z}^d$.

Ainsi, $\widetilde{\phi}(f)$ est le premier retour sur $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}} \cap \mathcal{H}$ mod $\mathbb{Z}^d$ de l'action sur $\widetilde{\phi}(e)$ du flot dirigé par la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$. Le système substitutif étant conjugué à l'échange de morceaux dans le fractal de Rauzy, il est aussi conjugué à ce premier retour. ■

5.4 Partition de Markov

On a montré dans la section précécente que l'ensemble $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ est un domaine fondamental de $\mathbb{Z}^d$. Il s'agissait en fait du point essentiel pour obtenir une partition de Markov pour à l'action sur le tore de la matrice d'indidence de la substitution. En effet, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}$ et l'application $\widetilde{\phi}$ ont été définis pour, à partir du moment où on a affaire à un domaine fondamental, toutes les propriétés pour avoir une partition de Markov soient vérifiées. C'est ce que nous allons rapidement vérifier dans cette section.

Corollaire 5.4.1 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure. L'application $\widetilde{\phi}$ mod $\mathbb{Z}^d$ est injective en mesure sur le tore $\mathbb{T}^d$.*

Preuve Ceci provient directement du corollaire 5.3.1 et de la proposition 5.2.4. ■

Proposition 5.4.1 *Pour tout $(p, a, s) \in \mathcal{P}$, l'image par $\mathbf{M}_\sigma$ de l'intersection du cylindre $\widetilde{\phi}[\,(p, a, s)\,]$ avec un hyperplan affine dirigé par l'hyperplan stable de $\mathbf{M}_\sigma$ est incluse dans une intersection du même type.*

Pour tout $(p, a, s) \in \mathcal{P}$, l'image par $\mathbf{M}_\sigma^{-1}$ de l'intersection du cylindre $\widetilde{\phi}[\,(p, a, s)\,]$ avec une affine dirigé par la droite instable de $\mathbf{M}_\sigma$ est incluse dans une intersection du même type.

Preuve Tout hyperplan affine dirigé par $\mathcal{H}$ est de la forme $\mathcal{H} \oplus \rho \mathbf{u}_1$. Pour qu'un tel hyperplan rencontre $\widetilde{\phi}[\,(p, a, s)\,]$, il faut et il suffit qu'il existe un chemin $e = (e_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in [\,(p, a, s)\,]$ tel que $\rho = \widetilde{\phi}_1(e)$. On a alors

$$\widetilde{\phi}[(p, a, s)] \cap (\mathcal{H} \oplus \rho \mathbf{u}_1) = \widetilde{\phi}\{f \in \widetilde{\mathcal{D}};\ \forall\, i \leq 0,\ f_i = e_i\}.$$

L'action de $\mathbf{M}_\sigma$ sur $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ commutant avec l'action de T^{-1} sur $\widetilde{\mathcal{D}}$, on en déduit, si on pose $e' = T^{-1}e$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_\sigma \left(\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] \cap (\mathcal{H} \oplus \rho\mathbf{u}_1)\right) &= \widetilde{\phi}T^{-1}\{f \in \widetilde{\mathcal{D}};\ \forall i \le 0,\ f_i = e_i\} \\
&= \widetilde{\phi}\{f \in \widetilde{\mathcal{D}};\ \forall i \le 1,\ f_i = e_{i-1}\} \\
&\subset \widetilde{\phi}\{f \in \widetilde{\mathcal{D}};\ \forall i \le 0,\ f_i = e'_i\}. \\
&= \left(\widetilde{\phi}[e_{-1}] \cap \left(\mathcal{H} \oplus \widetilde{\phi}_1(T^{-1}e)\mathbf{u}_1\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathbf{M}_\sigma \left(\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] \cap (\mathcal{H} \oplus \rho\mathbf{u}_1)\right)$ est inclus dans l'intersection d'un cylindre avec un hyperplan affine dirigé par l'hyperplan contractant $\mathcal{H}$.

De même, toute droite dirigée par la direction dilatante est de la forme $\mathbf{v} \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{u}_1$, où $\mathbf{v}$ appartient à l'hyperplan contractant $\mathcal{H}$. Pour qu'une tel droite rencontre $\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,]$, il faut et il suffit qu'il existe un chemin $e = (e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in [\,(p,a,s)\,]$ tel que $\mathbf{v} = q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(e)$. On a alors

$$\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] \cap (\mathbf{v} \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{u}_1) = \widetilde{\phi}\{f \in \widetilde{\mathcal{D}};\ \forall i \ge 0,\ f_i = e_i\}.$$

L'action de $\mathbf{M}_\sigma^{-1}$ sur $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ commutant T sur $\widetilde{\mathcal{D}}$, on en déduit comme précédemment :

$$\mathbf{M}_\sigma^{-1} \left(\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] \cap (\mathbf{v} \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{u}_1)\right) \subset \left(\widetilde{\phi}[e_1] \cap \left(q_{\mathcal{H}}\widetilde{\phi}(Te) \oplus \mathbb{R}\,\mathbf{u}_1\right)\right).$$

Ainsi, l'ensemble $\mathbf{M}_\sigma^{-1} \left(\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] \cap (\mathcal{H} \oplus \rho\mathbf{u}_1)\right)$ est inclus dans l'intersection d'un cylindre avec une droite affine dirigée par la direction dilatante de $\mathbf{M}_\sigma$. ∎

Théorème 5.4.1 *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot dont la représentation torique $\varphi_{\mathcal{L}}$ est injective en mesure. Soit $\mathbf{M}_\sigma$ la matrice d'incidence de la σ.*

Soit Ω le système substitutif associé à σ. Soient $\mathbf{u}_1$ le vecteur des mesures des cylindres de Ω et $\mathbf{v}_1$ le vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ pour sa valeur propre dominante telle que $<\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1>= 1$. Soit $p_{\mathcal{H}} \circ \varphi$ la représentation géométrique associé à σ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$.

La partition du tore $\mathbb{T}^n$ suivante est une partition de Markov pour l'action de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ sur le tore :

$$\mathbb{T}^n = \bigcup_{\substack{(p,a,s,b)\in\mathcal{A}^*\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}^*\times\mathcal{A} \\ \sigma(b)=pas}} [-<\mathbf{l}(a), \mathbf{v}_1>, 0]\,\mathbf{u}_1 \,\oplus\, p_{\mathcal{H}}\,\varphi(S^{|p|}\sigma[b]) \ \ mod\ \mathbb{Z}^n.$$

Le système dynamique symbolique de type fini bilatéral de type fini correspondant est l'ensemble

$$\widetilde{\mathcal{D}}' = \{(p_i, a_i, s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in (\mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*)^{\mathbb{Z}}\,;\, \forall i \in \mathbb{Z},\ p_i a_i s_i = \sigma(a_{i-1})\},$$

muni de sa mesure d'entropie maximale.

Preuve Le système $\widetilde{\mathcal{D}}'$ est en fait le système dynamique symbolique de type fini bilatéral $\widetilde{\mathcal{D}}$ sur lequel les transitions ont été inversées.

On a déjà montré que l'application $\widetilde{\phi}$ est surjective sur le tore, injective en mesure, et réalise une conjugaison l'inverse du décalage T^{-1} sur $\widetilde{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire le décalage sur $\widetilde{\mathcal{D}}'$, avec l'action de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ sur le tore. De plus, les feuilles stables et instables sont conservées par $\mathbf{M}_\sigma$.

Enfin, si $[(p,a,s)]$ est un cylindre de longueur 1 de $\widetilde{\mathcal{D}}$, on a par construction $T^{-1}[\,(p,a,s)\,] = \cup_{(p',a',s',),\ p'a's'=\sigma(a)}[\,(p',a',s')\,]$.

De ce fait, $\mathbf{M}_\sigma\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,] = \cup_{(p',a',s'),\; p'a's'=\sigma(a)}\widetilde{\phi}[\,(p',a',s')\,]$, l'union étant disjointe sauf sur la frontière.

Les ensembles $\widetilde{\phi}[\,(p,a,s)\,]$ forment donc bien une partition de Markov associée au système de type fini $\widetilde{\mathcal{D}}'$. ■

Remarque 1. On a ainsi vu que l'action de la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ est conjuguée avec la substitution σ, c'est-à-dire le décalage T^{-1} vers les négatifs sur $\widetilde{\mathcal{D}}$.

L'action de la matrice $(\mathbf{M}_\sigma)^{-1}$ est la désubstitution c'est-à-dire un décalage T vers les positifs sur $\widetilde{\mathcal{D}}$.

L'action du décalage S sur Ω est conjuguée au passage au successeur sur $\mathcal{D}$, ou encore à un échange de morceaux dans l'hyperplan contractant de la partition de Markov, ou bien enfin $\widetilde{\phi}\widetilde{\mathcal{D}}$ mod $\mathbb{Z}^n$ à l'application de premier retour sur l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$ du flot linéaire dirigé par la direction dilatante.

Remarque 2. Si la substitution σ est une substitution sur 2 lettres et sturmiennes, les applications $\widetilde{\phi}_1$ et $\widetilde{\phi}_2$ sont les développements d'Ostrowski propres et duaux associés à l'angle du point fixe de la substitution (voir [88]).

Remarque 3. La définition 5.1.1 peut-être étendue au cas des substitutions primitives unimodulaires dont la matrice d'incidence n'a aucune valeur propre de module 1 et un polynôme caractéristique irréductible sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ sont les valeurs propres de module strictement plus grand que 1 et $\alpha_{l+1},\ldots\alpha_d$ celles de module inférieur à 1, on obtient une représentation géométrique du système dynamique symbolique de type fini bilatéral associé au développement en préfixes-suffixes de la substitution en posant :

$$\forall\, e=(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\widetilde{\mathcal{D}},\quad \widetilde{\phi}(e)=\sum_{k=1}^{d}\widetilde{\phi}_k(e)\,\mathbf{u}_k \;\text{ avec }\; \widetilde{\phi}_k(e)=\left\{\begin{array}{ll} -\sum_{i\leq -1}\delta_k(e_i)\,{\alpha_k}^i & \text{si } k=1\ldots l\\ \sum_{i\geq 0}\delta_k(e_i)\,{\alpha_k}^i & \text{si } k=l+1\ldots d\end{array}\right. .$$

La représentation géométrique vérifie alors à nouveau le corollaire 5.1.1. Par contre, la substitution n'étant pas de type Pisot, on ne possède aucune information sur les images de cylindre $\widetilde{\phi}[e]$, et on ne peut en particulier par calculer leur mesure pour l'instant.

Chapitre 6

Facteurs p-adiques des substitutions non unitaires

Dans ce chapitre, on étudie tout d'abord les facteurs p-adiques de deux systèmes substitutifs non unitaires (section 6.1) . On utilise les outils exhibé dans le cadre de la section 6.1 pour montrer à la section 6.2 que le système dynamique associé à une substitution primitive admet pour facteur topologique une translation sur l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques si et seulement p divise tous les coefficients non dominants du polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution, dès que celui-ci est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Autrement dit, l'existence d'un facteur p-adique est équivalente au fait que la matrice d'incidence de la substitution est nilpotente modulo p.

A la section 6.3 On montre qu'en un certain sens, cette condition sur le polynôme est un analogue p-adique du fait qu'un polynôme irréductible admet pour racine un nombre de Pisot.

On remarquera que selon le corollaire 1.8.2, l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est facteur topologiques si et seulement si elle est facteur métrique. Ainsi, les résultats de ce chapitre sont aussi valable dans le cadre mesurable.

Les deux premières sections et en particulier la caractérisation des facteurs p-adiques, sont indépendantes de la condition Pisot.

6.1 Étude de deux exemples

Dans cette partie, nous allons montrer avec deux exemples simples que les systèmes substitutifs de déterminant non nul peuvent admettre ou non comme facteurs topologiques des translations sur un anneau p-adique. Les deux propositions énoncées sont prouvées de deux manières différentes : tout d'abord avec des arguments combinatoires, ensuite avec des arguments arithmétiques.

On rappelle que la substitution σ_2 est définie sur l'alphabet $\{1, 2\}$ par

$$\sigma_2(1) = 1112 \qquad \sigma_2(2) = 12.$$

La matrice de la substitution σ_2 est $\mathbf{M_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_2(X) = X^2 - 4X + 2$ et la matrice $\mathbf{M_2}$ est de type Pisot On note $\alpha_2 = 2 + \sqrt{2}$ la valeur propre dominante et $\rho_2 = 2 - \sqrt{2}$ l'autre valeur propre. On note Ω_2 le système dynamique associé à σ_2. Rauzy remarque dans [77] que les longueurs des itérés de σ_2 sur les lettres 1 et 2 sont divisibles par des puissances croissantes de 2.

Lemme 6.1.1 *Pour toute entier n, et toute lettre $a \in \{1,2\}$, l'entier $|{\sigma_2}^n(a)|$ est divisible par $2^{[n/2]}$. Les nombres $|{\sigma_2}^n(a)|$ tendent donc vers 0 dans $\mathbb{Z}_2$.*

Preuve Soit $a_n = |{\sigma_2}^n(1)|$ et $b_n = |{\sigma_2}^n(2)|$. Par définition de σ_2 on a $a_{n+2} = 10\,a_n + 4\,b_n$ et $b_{n+2} = 4\,a_n + 2\,b_n$. De plus, $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = 4$ et $b_1 = 2$. On conclut par récurrence. ∎

Proposition 6.1.1 *Le système dynamique associé à σ_2 admet pour facteur topologique l'addition de 1 sur le groupe compact $\mathbb{Z}_2$.*

Preuve Soit w un élément de Ω_2 et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ son développement en préfixes-suffixes. Puisque $|\cdot|_2$ est ultramétrique, selon le lemme 6.1.1, on a pour tout i :

$$|\,(|{\sigma_2}^n(p_i)|)\,|_2 \leq \max\left(|\,(|{\sigma_2}^n(1)|)\,|_2, |\,(|{\sigma_2}^n(2)|)\,|_2\right) \leq 2^{-[n/2]}.$$

Les longueurs $|{\sigma_2}^n(p_i)|$ tendent donc vers 0 dans $\mathbb{Z}_2$ et la série $\sum_{i \geq 0} |{\sigma_2}^i(p_i)|$ converge. On appelle $\psi_2(w)$ sa limite. La majoration ci-dessus implique que ψ_2 est normalement convergente et donc continue sur Ω.

Le nombre $\psi_2(w)$ est en fait la limite des longueurs $|\sigma_2^n(p_n) \ldots \sigma_2^0(p_2)|$.

Supposons que Sw n'est pas périodique pour σ_2. En conséquence de la propriété 2.4.1, si $\Gamma(S\,w) = (q_i, b_i, t_i)_{i \geq 0}$ est le développement de Sw, alors pour n assez grand on a $|\sigma_2^n(q_n) \ldots \sigma_2^0(q_2)| = |\sigma_2^n(p_n) \ldots \sigma_2^0(p_2)| + 1$, et donc $\psi_2(Sw) = \psi_2(w) + 1$.

Si par contre Sw est périodique, la propriété 2.4.1 implique que $\psi_2(Sw) = 0$ tandis que

$$|\sigma_2^n(p_n) \ldots \sigma_2^0(p_2)| = |\sigma_2^n(p_n) \ldots \sigma_2^0(p_2) w_0| - 1 = |\sigma_2^{n+1}(w_0)| - 1,$$

qui tend vers -1 dans $\mathbb{Z}_2$ par le lemme 6.1.1. De ce fait, l'égalité $\psi_2 \circ S = \psi_2 + 1$ est vraie.

Soit w_0 un point périodique de σ_2. Alors $\psi_2(w_0) = 0$ et par minimalité de Ω, l'ensemble $\psi_2(\Omega)$ est l'adhérence dans $\mathbb{Z}_2$ de l'orbite de $0 = \psi_2(w_0)$ par l'addition de 1, c'est-à-dire $\mathbb{Z}_2$. ∎

On peut croire que plus généralement, tout système primitif substitutif admet pour facteur topologique une addition sur $\mathbb{Z}_p$, pour tous les p premiers diviseurs du déterminant de la matrice. L'exemple suivant montre que ceci est faux.

On note σ_8 la substitution sur l'alphabet $\{1,2\}$ définie par

$$\sigma_8(1) = 11222 \qquad \sigma_8(2) = 1222.$$

La matrice de la substitution σ_8 est $\mathbf{M_8} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_8(X) = X^2 - 5X + 3$ et σ_8 est de type Pisot. On note $\alpha_8 = 5/2 + \sqrt{1}3/2$ la valeur propre dominante et $\rho_8 = 5/2 - \sqrt{1}3/2$ l'autre valeur propre. On note Ω_8 le système dynamique associé à σ_8.

Lemme 6.1.2 *Soit p tel qu'il existe une application ψ_8 continue de Ω_8 dans $\mathbb{Z}_p$ qui vérifie $\psi_8 \circ S = \psi_8 + 1$. Alors les entiers $|{\sigma_8}^n(1)|$ et $|{\sigma_8}^n(2)|$ tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$.*

Preuve La substitution σ_8 admet un unique point fixe u défini par :

$$u = \lim_{n \to \infty} {\sigma_8}^n(2).{\sigma_8}^n(1) = \ldots 11222122212221222\,.\,112221122212221222\ldots$$

On remarque que ${\sigma_8}^{n+1}(1)$ se décompose pour tout n sous la forme suivante :

$${\sigma_8}^{n+1}(1) = {\sigma_8}^n(1)\ \ldots \sigma_8(1)\,1\ 1\ 222\,\sigma_8(222)\,{\sigma_8}^2(222)\,{\sigma_8}^3(222) \ldots {\sigma_8}^n(222).$$

De ce fait, si $w_n = S^{|\sigma_8{}^n(1)|+\cdots+|\sigma_8{}^0(1)|}(u)$, la suite de mots (w_n) convergent vers un mot w et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \ldots\sigma_8{}^n(1)\ \ldots\sigma_8(1)1\,.\,1\,222\,\sigma_8(222)\ \ldots\sigma_8{}^n(222)\ldots$$

On note w cette limite. Par construction, $w \in \Omega_8$.

Puisque l'application ψ_8 est continue et est semi-conjugué à l'addition de 1, on a :

$$\begin{aligned}\psi_8(w) &= \lim_{n\to+\infty}\psi_8(w_n) = \lim_{n\to\infty}\psi_8(S^{|\sigma_8{}^n(1)|+\cdots+|\sigma_8{}^0(1)|}(u))\\ &= \psi_8(u) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|\sigma_8{}^k(1)|.\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $|\sigma_8{}^k(1)|$ converge dans $\mathbb{Z}_p$, ce qui est équivalent à dire que son terme général $|\sigma_8{}^k(1)|$ tend vers 0.

Par ailleurs, $\sigma(2)$ s'écrit $\sigma(2) = 12\ 2\ 2$. Par un raisonnement identique, la suite de mots $(S^{-1})^{|\sigma_8{}^n(2)|+\cdots+|\sigma_8{}^0(2)|}(u)$ converge dans Ω et les entiers $|\sigma_8{}^k(2)|$ tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$. ∎

On en déduit comme suit que le système dynamique associé à σ_8 n'admet aucun facteur topologique p-adique :

Proposition 6.1.2 *Pour tout entier p premier et tout $a \neq 0$ de $\mathbb{Q}_p$, l'addition de a sur $\mathbb{Q}_p$ n'est pas facteur topologique du système dynamique associé à σ_8.*

Preuve Supposons qu'il existe une application continue ψ de Ω_8 dans $\mathbb{Q}_p$ telle que $\psi(Sw) = \psi(w) + a$ pour tout $w \in \Omega_8$. Alors, si u est l'unique point fixe de σ_8, l'application ψ_8 définie par $\psi_8(w) = \frac{\psi(w)-\psi(u)}{a}$ est continue, vérifie la relation de commutation $\psi_8(Sw) = \psi(w) + 1$ et est telle que $\psi_8(u) = 0$. L'orbite de u étant dense dans Ω_8, ψ_8 est à valeur dans l'adhérence dans $\mathbb{Q}_p$ de l'orbite de 0 par l'addition de 1, c'est-à-dire $\mathbb{Z}_p$. On peut ainsi appliquer le lemme 6.1.2, et en déduire que la suite $a_n = |\sigma_8{}^n(1)|$ tend vers 0 modulo p.

Or, par définition des matrices de substitutions, la suite a_n vérifie une relation de récurrence de polynôme $\chi_8 : a_{n+2} - 5\,a_{n+1} + 3\,a_n = 0$, tandis que $a_0 = 1$. On en déduit que pour tout n, $a_n = \pm\ 1 \bmod 3$. Ainsi, les nombres a_n sont toujours premiers avec 3 et ne peuvent pas être divisibles par des puissances de plus en plus grande de 3. La proposition est donc prouvée pour $p = 3$.

La relation de récurrence s'exprime aussi comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Si $p \neq 3$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ est de déterminant 3 et donc inversible modulo p. Si $\mathbf{N}$ est son inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \bmod p \\ a_1 \bmod p \end{pmatrix} = \mathbf{N}^n \begin{pmatrix} a_n \bmod p \\ a_{n+1} \bmod p \end{pmatrix}.$$

Mais les a_n tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$, ce qui veut dire que ces entiers sont nuls modulo p à partir d'un certain rang. En particulier, on obtient dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la contradiction : $a_0 \bmod p = 1 = 0$. ∎

Les preuves de ces résultats ont le mérite d'être simples mais sont difficilement généralisables. Nous en donnons ci-dessous deux nouvelles preuves, arithmétiques, qui vont montrer comment la ramification d'idéaux entre en jeu de manière naturelle dans la problématique des facteurs p-adiques.

Preuve arithmétique du lemme 6.1.1 Si $a \in \{1,2\}$, les entiers $a_n = |{\sigma_2}^n(a)|$ vérifient une relation de récurrence de polynôme χ_2. Il existe donc deux nombres A_0 et B_0 tels que $a_n = A_0\,{\alpha_0}^n + B_0\,{\rho_2}^n$.

Soit $\mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ le corps de décomposition de χ_2 et $\mathcal{O}_{K_2}$ son anneau d'entiers. Dans cet anneau, $2\,\mathbb{Z}$ est ramifié : il existe un unique idéal premier de $\mathcal{O}_{K_2}$, noté $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = 2\,\mathbb{Z}$, et on a

$$2\,\mathcal{O}_{K_2} = \mathcal{I}^2.$$

Par définition, on a $\alpha_2\rho_2 = \det \mathbf{M}_2 = 2 \in \mathcal{I}$. Puisque $\mathcal{I}$ est un idéal premier, ceci implique que un des nombres α_2 ou ρ_2 appartient à $\mathcal{I}$. Mais $\alpha_2 + \rho_2 = \operatorname{tr} \mathbf{M}_2 = 4 \in \mathcal{I}$. Ainsi, l'autre valeur propre appartient aussi à $\mathcal{I}$.

Les nombres A_0 et B_0 étant les solutions d'un système à coefficients dans $\mathbb{K}_2$, ils appartiennent eux-mêmes à $\mathbb{K}_2$ et on en déduit que a_n tend vers zéro dans $\mathbb{K}_2$ muni de la topologie $\mathcal{I}$-adique. Mais $a_n \in \mathbb{Z}$ et la topologie $\mathcal{I}$-adique se restreint sur $\mathbb{Z}$ en la topologie 2-adique. De ce fait a_n tend vers zéro dans $\mathbb{Z}_2$ ce qui est équivalent à dire que les a_n sont divisibles par des puissantes croissantes de 2. Ceci est suffisant pour reprendre la preuve de la proposition 6.1.1. ■

Preuve arithmétique de la proposition 6.1.2 La suite d'entier $a_n = |{\sigma_8}^n(1)|$ vérifie une relation de récurrence de polynôme χ_8. Il existe donc deux nombres A_0 et B_0 tels que $a_n = A_1\,{\alpha_8}^n + B_1\,{\rho_8}^n$.

Soit $\mathbb{K}_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ le corps de décomposition de χ_8 et $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_8}$ son anneau d'entiers. Dans cet anneau, $3\,\mathbb{Z}$ est décomposé : puisque 13 est un carré modulo 3, il existe exactement deux idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_8}$ distincts $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ tels que $\mathcal{I}_i \cap \mathbb{Z} = 3\,\mathbb{Z}$, et on a

$$3\,\mathcal{O}_{\mathbb{K}_8} = \mathcal{I}_1\,\mathcal{I}_2.$$

Le produit $\alpha_8\,\rho_8$ vaut $\det \mathbf{M}_8 = 3$ et appartient donc à $3\,\mathbb{Z} \subset \mathcal{I}_1$. Puisque l'idéal est premier, on peut supposer que $\alpha_8 \in \mathcal{I}_1$.

Supposons que l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_3$ est facteur topologique de (Ω, S). Selon le lemme 6.1.2, les entiers $|\sigma^n(1)|$ tendent alors vers 0 dans $\mathbb{Z}_3$, ce qui revient à dire que ces nombres sont divisibles par des puissances de plus en plus grandes de 3, ou encore que ces nombres appartiennent à des puissances de plus en plus grandes de $3\,\mathbb{Z} \subset \mathcal{I}_1$. Ainsi, $B_1\,{\rho_8}^n = |\sigma^n(a)| - A_1\,{\alpha_8}^n$ sont eux aussi dans des puissances croissantes de $\mathcal{I}_1$. Puisque $\mathcal{I}_1$ est premier et B non nul, ceci implique que $\rho_8 \in \mathcal{I}_1$. On aboutit à la contradiction suivante : $5 = \operatorname{tr} \mathbf{M}_8 = \alpha_8 + \rho_8 \in \mathcal{I}_1 \cap \mathbb{Z} = 3\,\mathbb{Z}$. Ainsi, l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_3$ n'est pas facteur topologique de (Ω, S).

Supposons maintenant que l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est facteur topologique de (Ω_8, S), avec $p \neq 3$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}_8}$ au dessus de p, c'est-à-dire tel que $\mathcal{I} \cap p\,\mathcal{O}_{\mathbb{K}_8} = p\mathbb{Z}$.

Comme pour la lettre 1, il existe $C_0, D_0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ tels que les nombres $b_n = |{\sigma_8}^n(2)|$ s'écrivent $b_n = C_1\,{\alpha_8}^n + D_1\,{\rho_8}^n$. Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ étant non proportionnelles, on en déduit que $({\alpha_8}^n)_n$ et $({\rho_8}^n)_n$ sont des combinaisons linéaires de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Selon le lemme 6.1.2, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$, et α_8 et ρ_8 appartiennent ainsi forcément à $\mathcal{I}$. En particulier, $\alpha_8\rho_8 = 3 \in \mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, ce qui est impossible. ■

On voit apparaître ici un lien entre l'existence de facteurs topologiques p-adiques et les ramifications de p dans des corps de nombres. On généralise cette idée dans la section suivante.

6.2 Facteurs p-adiques des substitutions

Dans le paragraphe 6.2.1, nous énonçons le théorème qui a pour conséquence directe le résultat principal de cet article. Ce théorème est démontré au paragraphe 6.2.2. Dans le paragraphe 6.2.3, on s'intéresse aux conséquences de ce résultat dans le cas particulier où la substitution est de type Pisot.

6.2.1 Énoncés et notations.

On démontre au paragraphe 6.2.2 le théorème suivant :

Théorème 6.2.1 *Soit σ une substitution primitive. On suppose que le polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier.*

Le système dynamique associé à σ admet pour facteur topologique une addition sur un sous groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si chacune des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ appartient à chacun des idéaux premiers contenant p dans l'anneau des entiers du corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$.

Dans cette section, σ sera une substitution primitive sur d lettres et (Ω, S) le système dynamique associé à σ. On note $\mathbf{M}_\sigma$ la matrice de σ et $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ son polynôme caractéristique. On supposera que $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ sont les α_i, pour $1 \leq i \leq d$, α_1 étant la valeur propre dominante. On note $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ le corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ sur $\mathbb{Q}$. On fixe p un nombre premier.

Une conséquence directe du théorème 6.2.1 est le résultat annoncé dans l'introduction :

Corollaire 6.2.1 *Soit σ une substitution primitive. On suppose que le polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier.*

Le système dynamique engendré par σ admet pour facteur topologique une addition sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si p divise tous les coefficients non dominants de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$.

Preuve Supposons que Ω admet une addition sur $\mathbb{Q}_p$ pour facteur topologique. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ contenant p. Les coefficients non dominants du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ sont des sommes de produits de valeurs propres qui sont toutes dans $\mathcal{I}$ selon le théorème 6.2.1. Ces coefficients appartiennent donc à $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que p divise tous les coefficients de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ contenant p. Comme p divise le produit des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$, ce produit est dans $\mathcal{I}$ et il existe une valeur propre notée ρ_1 qui appartient à $\mathcal{I}$. Mais p divise aussi le coefficient de degré 1 de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ qui est la somme des produits de $d-1$ valeurs propres. Tous les produits qui contiennent ρ_1 sont dans $\mathcal{I}$, le dernier est donc lui aussi dans $\mathcal{I}$, ce qui implique qu'il existe une autre valeur propre ρ_2 qui appartient à $\mathcal{I}$. De proche en proche, on montre que toutes les valeurs propres sont dans $\mathcal{I}$ et le critère du théorème 6.2.1 est vérifié. ∎

Cette dernière condition s'interprète facilement en terme de nilpotence modulo p. Ajouté au fait que les facteurs métriques et topologiques sont égaux pour les substitutions primitive (voir corollaire 1.8.2) on peut énoncer comme suit le résultat principal de ce chapitre:

Corollaire 6.2.2 *Soit σ une substitution primitive. On suppose que le polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier.*

Le système dynamique engendré par σ admet pour facteur topologique ou métrique une addition sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p, c'est-à-dire

$$\mathbf{M}_\sigma{}^d = 0 \ mod\ p.$$

6.2.2 Preuve du théorème 6.2.1.

Le plan de la preuve est le suivant : au lemme 6.2.1, nous allons supposer qu'une addition sur $\mathbb{Z}_p$ est facteur topologique de (Ω, S) et montrer alors, comme au lemme 6.1.2, que les longueurs des itérés de σ sur certains mots finis q tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$. Il faudra alors exhiber au lemme 6.2.3 suffisamment de mots q pour en déduire, à la proposition 6.2.1, que les puissances des valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ tendent vers 0 modulo tous les idéaux de $\mathbb{K}$ qui contiennent p (comme dans la seconde preuve de la proposition 6.1.1). Ceci permettra de conclure.

On note η la plus petite période commune à tous les points de Ω périodiques pour σ. En particulier, les suites $(\sigma^{n\,\eta}(a).\sigma^{n\,\eta}(b))_n$ convergent vers un mot périodique pour σ pour tout couple de lettres (a,b).

Lemme 6.2.1 *S'il existe une application $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{Z}_p$ continue de Ω dans $\mathbb{Z}_p$ qui vérifie $\rho \circ S = \rho + 1$, alors pour tout multiple l de η et toute lettre a telle que $\sigma^l(a) = qar$ avec $q \neq \varepsilon$ et $r \neq \varepsilon$, on a pour la topologie de $\mathbb{Z}_p$,*

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma^{nl}(q)| = 0.$$

Preuve En itérant la décomposition $\sigma^l(a) = qar$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sigma^{(n+1)l}(a) = \sigma^{nl}(q)\ldots\sigma^l(q)\,q\,a\,r\,\sigma^l(r)\ldots\sigma^{nl}(r).$$

Soit $w = \ldots\sigma^{nl}(q)\ldots\sigma^l(q)\,q\,.\,a\,r\,\sigma^l(r)\ldots\sigma^{nl}(r)\ldots$. Ce mot est bi-infini puisque q et r sont non vides. Il appartient à Ω puisque tous ses facteurs sont dans le langage de Ω. On a par définition

$$\begin{aligned} w_i &= (S^{-1})^{\sum_{n=0}^{i-1}|\sigma^{nl}(q)|}(w) \\ &= \ldots\sigma^{(i+2)l}(q)\sigma^{(i+1)l}(q)\sigma^{il}(q)\,.\,\sigma^{il}(a)\,\sigma^{(i+1)l}(r)\sigma^{(i+2)l}(r)\ldots \end{aligned}$$

Ainsi, chaque w_i a pour partie centrale le mot $\sigma^{il}(q)\,.\,\sigma^{il}(a)$. Par primitivité, les longueurs de $\sigma^{il}(q)$ et $\sigma^{il}(a)$ tendent vers l'infini. Puisque l divise η, on en déduit que w_i converge dans Ω vers un point périodique pour σ, noté u.

Du fait que ρ réalise une semi-conjugaison entre le décalage S et l'addition de 1, on a

$$\rho(w) = \rho\left(S^{\sum_{n=0}^{i-1}|\sigma^{nl}(q)|}(w_i)\right) = \rho(w_i) + \sum_{n=0}^{i-1}|\sigma^{nl}(q)|.$$

Mais ρ est continue et les $\rho(w_i)$ convergent vers $\rho(u)$. On a finalement :

$$\lim_{i\to+\infty}\sum_{n=0}^{i-1}|\sigma^{nl}(q)| = \rho(w) - \lim_{i\to+\infty}\rho(w_i) = \rho(w) - \rho(u).$$

La série $\sum_{n=0}^{i-1}|\sigma^{nl}(q)|$ converge donc dans $\mathbb{Z}_p$ et les entiers $|\sigma^{nl}(q)|$ tendent vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$. ∎

Lemme 6.2.2 *Si $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, pour tout entier k et tout vecteur $\mathbf{l} \in \mathbb{Q}^d$ non nul, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^d$:*

$$\{\mathbf{l},\, {\mathbf{M}_\sigma}^k\,\mathbf{l}, \ldots,\, {\mathbf{M}_\sigma}^{k(d-1)}\,\mathbf{l}\}.$$

Preuve La matrice ${M_\sigma}^k$ admet pour valeurs propres les ${\alpha_i}^k$. S'il existe deux indices i et j tels que ${\alpha_i}^k = {\alpha_j}^k$, soit τ l'automorphisme du corps $\mathbb{K}$ qui envoie α_i sur α_1. On a alors ${\alpha_1}^k = \tau(\alpha_j)^k$. En particulier, les modules de α_1 et $\tau(\alpha_j)$ sont égaux, tandis que $\tau(\alpha_j)$ est valeur propre de M_σ distincte de α_1 par injectivité de τ. Ceci contredit le théorème de Perron-Frobenius. Les valeurs propres de ${M_\sigma}^k$ sont donc toutes simples.

Soit $\mathbf{l} \in \mathbb{Q}^d$ non nul. La matrice M_σ étant diagonalisable, il existe une famille $(\mathbf{u_i})_{1\leq i\leq d}$ de vecteurs propres à droite algébriquement normalisée. Soit $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^d a_i \mathbf{u_i}$ la décomposition de $\mathbf{l}$ dans cette base. Alors, selon la propriété 1.3.1, les a_i sont tous non nuls.

On conclut cette preuve par le raisonnement classique suivant. Si un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est tel que $P({M_\sigma}^k)(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$, alors pour tout i fixé,

$$(\prod_{j\neq i}(X - {\alpha_j}^k)\, P)({M_\sigma}^k)(\mathbf{l}) = (P\, \prod_{j\neq i}(X - {\alpha_j}^k))({M_\sigma}^k)(a_i\mathbf{u_i}) = 0.$$

Ainsi, le polynôme $P\prod_{j\neq i}(X - {\alpha_j}^k)$ appliqué en ${M_\sigma}^k$ annule le vecteur propre $\mathbf{u_i}$. L'ensemble des polynômes annulateurs de $\mathbf{u_i}$ est un idéal principal non trivial de $\mathbb{Z}[X]$ qui contient $X - {\alpha_i}^k$, et est donc égal à $(X - {\alpha_i}^k)\mathbb{Z}[X]$. De ce fait, $(X - {\alpha_i}^k)$ divise $P\prod_{j\neq i}(X - {\alpha_j}^k)$, et donc $(X - {\alpha_i}^k)$ divise P. Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i \leq d$, P est au moins de degré d (en fait $P \in (\chi_{\mathbf{M}_\sigma})^k\mathbb{Z}[X]$).

Soit r le rang dans $\mathbb{R}^d$ de la famille $\{\mathbf{l}, {\mathbf{M}_\sigma}^k\mathbf{l}, \ldots, {\mathbf{M}_\sigma}^{k(d-1)}\mathbf{l}\}$. Puisque ces vecteurs sont rationnels, la famille a même rang sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Il existe donc un polynôme P à coefficients entiers de degré r tel que $P({M_\sigma}^k)(\mathbf{l}) = \mathbf{0}$. Ainsi, r ne peut être que égal à d. ■

Lemme 6.2.3 *Soit a une lettre. Il existe d mots finis q_i, $0 \leq i < d$, vérifiant $\sigma^{L_i}(a) = q_i a r_i$ avec q_i et r_i non vides et L_i multiple de η, ainsi qu'une matrice $\mathbf{M}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, tels que pour tout entier n, on a*

$$({\alpha_1}^n, \ldots, {\alpha_d}^n) = \mathbf{M}\,(|\sigma^n(q_0)|, \ldots, |\sigma^n(q_{d-1})|).$$

Preuve Soit a une lettre fixée. Par primitivité de σ, il existe un multiple l de η tel que a apparaisse au moins trois fois dans $\sigma^l(a)$. Il existe donc q et r non vides tels que $\sigma^l(a) = qar$. Posons $q_i = \sigma^{il}(q)\sigma^{(i-1)l}(q)\ldots q$ pour $0 \leq i < d$. Chaque mot q_i vérifie $\sigma^{il}(a) = q_i a r_i$ avec $r_i \neq \varepsilon$.

Soit $\mathbf{l_i} = \mathbf{l}(q_i) \in \mathbb{Z}^d$ le vecteur associé à q_i. On a $\mathbf{l_i} = \sum_{k=0}^i \mathbf{l}(\sigma^{kl}(q)) = \sum_{k=0}^i {\mathbf{M}_\sigma}^{kl}\,\mathbf{l_0}$. Les familles $\{\mathbf{l_0}, \ldots, \mathbf{l_{d-1}}\}$ et $\{\mathbf{l_0}, {\mathbf{M}_\sigma}^l\mathbf{l_0}, \ldots, {\mathbf{M}_\sigma}^{l(d-1)}\mathbf{l_0}\}$ ont donc même rang, égal à d selon le lemme 6.2.2.

Soit $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_d}\}$ une famille algébriquement normalisée de vecteurs propres à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$. Les coefficients a_i intervenant dans la décomposition du vecteur $(1, \ldots, 1) = \sum_1^d a_i\,\mathbf{v_i}$ sont alors tous non nuls par la propriété 1.3.1.

Si W est un mot fini, la définition du vecteur $\mathbf{l}(W)$ associé à W implique que la longueur de W est égale au produit scalaire ${}^t\mathbf{l}(W)\,(1, \ldots, 1)$. On en déduit pour $j < d$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\sigma^n(q_j)| = {}^t\mathbf{l_j}\,({}^t\mathbf{M}_\sigma)^n\left(\sum_{i=1}^d a_i\,\mathbf{v_i}\right) = {}^t\mathbf{l_j}\left(\sum_{i=1}^d a_i\,{\alpha_i}^n\,\mathbf{v_i}\right).$$

Autrement dit les vecteurs suivants sont égaux dans $\mathbb{K}^d$:

$$(|\sigma^n(q_j)|)_{0\leq j<d} = {}^t(\mathbf{l_0}, \ldots, \mathbf{l_{d-1}})\,(a_1\mathbf{v_1}, \ldots, a_d\mathbf{v_d})\,({\alpha_i}^n)_{1\leq i\leq d}.$$

Or, on a vu que la matrice $(\mathbf{l_0}, \ldots, \mathbf{l_{d-1}})$ est inversible de même que la matrice $(a_1\mathbf{v_1}, \ldots, a_d\mathbf{v_d})$ puisque les $\mathbf{v_1}$ forment une base et les a_i sont non nuls. On conclut en posant

$$\mathbf{M} = \left({}^t(\mathbf{l_0}, \ldots, \mathbf{l_{d-1}})\,(a_1\mathbf{v_1}, \ldots, a_d\mathbf{v_d})\right)^{-1}.$$

■

Proposition 6.2.1 *Soit σ primitive dont la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. S'il existe une application $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{Z}_p$ continue dans Ω dans $\mathbb{Z}_p$ telle que $\rho \circ S = \rho + 1$, alors toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ appartiennent à chacun des idéaux premier contenant p, dans l'anneau des entiers du corps de décomposition $\mathbb{K}$ de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$.*

Preuve Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier contenant p dans l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. La topologie associée à $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}$ se restreint alors sur $\mathbb{Q}$ à celle de $\mathbb{Z}_p$.

Soient $q_1, \ldots, q_d$ les mots définis au lemme 6.2.3 et L_i les entiers qui leur sont associés. Selon le lemme 6.2.1, on a alors $\lim_{n\to\infty} |\sigma^{nL_i}(q_i)| = 0$ pour la topologie de $\mathbb{Z}_p$, et donc pour la topologie associée à $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{K}$.

Les q_i ont été choisis tels que pour toute valeur propre α de $\mathbf{M}_\sigma$, la suite $(\alpha^n)_n$ est une combinaison linéaire des d suites d'entiers $(|\sigma^{nL_i}(q_i)|)_n$. Si A est un multiple commun aux L_i, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} |\alpha^{An}|_{\mathcal{I}} = +\infty.$$

Il existe ainsi N tel que $\alpha^N \in \mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}$ est premier, $\alpha \in \mathcal{I}$. ∎

Preuve du théorème 6.2.1 Soit $\psi : \Omega \mapsto \mathbb{Q}_p$ une application continue telle que $\psi \circ S = \psi + a$. Soit u un point périodique de Ω. Alors l'application $\rho(w) = \frac{\psi(w)-\psi(u)}{a}$ est continue et vérifie $\rho \circ S = \rho + 1$. Cette application est à valeur dans l'adhérence de l'orbite dans $\mathbb{Q}_p$ de $\rho(u) = 0$ par l'addition de 1, c'est-à-dire $\mathbb{Z}_p$. La proposition 6.2.1 implique que toutes les valeurs propres sont dans tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ contenant p.

Réciproquement, soit p qui vérifie les hypothèses du théorème et $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ contenant p. Dès que a est une lettre fixée, les longueurs $|\sigma^n(a)|$ vérifient une relation de récurrence de polynôme $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ et sont donc des combinaisons linéaires des puissances des valeurs propres de la matrice. Ces puissances tendent vers 0 dans $\mathbb{K}$ pour la topologie de $\mathcal{I}$ puisque $\mathcal{I}$ contient les dites valeurs propres, ce qui implique que $|\sigma^n(a)|$ tend vers 0 pour cette topologie. Mais la topologie de $\mathcal{I}$ se restreint à $\mathbb{Z}$ à la topologie p-adique. Ainsi, les valeurs absolues p-adiques $|\,|\sigma^n(a)|\,|_p$ tendent vers 0. On a ainsi montré un équivalent du lemme 6.1.1.

Soit $w \in \Omega$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ son développement en préfixes-suffixes. Les $|\,|\sigma^i(p_i)|\,|_p$ sont majorés par les $|\,|\sigma^n(a)|\,|_p$ qui tendent tous vers 0. De ce fait, la série $\sum_{i\geq 0} |\sigma^i(p_i)|$ converge dans $\mathbb{Z}_p$. On appelle $\rho(w)$ sa limite. Si w_1 et w_2 sont deux points suffisamment proches dans Ω, pour k fixé, la continuité de Γ implique que leurs développement en préfixes-suffixes ont mêmes débuts de longueur k, et le caractère ultramétrique de la valeur absolue implique que $|\psi_0(w_1) - \psi_0(w_2)|_p \leq \max_{n>k} (|\,(|\sigma_2{}^n(1)|)\,|_p, |\,(|\sigma_2{}^n(2)|)\,|_p)$ qui tend vers 0 lorsque k grandit. Ainsi, ψ_0 est continue. Une preuve semblable à la fin de la preuve de la proposition 6.1.1 implique que ρ vérifie $\rho \circ S = \rho + 1$ et est une surjection de Ω dans $\mathbb{Z}_p$. ∎

6.2.3 Cas où la substitution est de type Pisot.

Le théorème 6.2.1 caractérise les facteurs topologiques de translation de (Ω, S) sur une structure adique. Par ailleurs, au chapitre 3, on a montré l'existence, pour les systèmes substitutifs de type Pisot, d'un facteur topologique de translation sur un tore. On montre ci-dessous qu'il est possible de regrouper tous les facteurs topologiques connus. On pense ainsi approcher le facteur équicontinu maximal de (Ω, S), c'est-à-dire le plus grand groupe compact qui, muni d'une translation, est facteur topologique de (Ω, S).

Proposition 6.2.2 *Soit σ une substitution de type Pisot sur d lettres, de matrice $\mathbf{M}_\sigma$. Soient $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers qui divisent tous les coefficients non dominants du polynôme* *caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$. Alors le système dynamique Ω admet pour facteur topologique une translation minimale sur le groupe compact $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$.*

Preuve Ceci est une conséquence directe du chapitre 3 où on a montré que tout système substitutif de type Pisot sur d lettres admet pour facteur topologique une rotation minimale sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$, et du lemme usuel suivant, qui prouve la minimalité des translations sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$. ■

Lemme 6.2.4 *Pour tout p premier, l'ensemble $\mathbb{Z}_p$ muni de l'addition de 1 est un système dynamique minimal.*

Si $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{T}^n$ tel que l'addition de vecteur $\mathbf{a}$ est minimale sur le tore $\mathbb{T}^n$, l'addition de vecteur $(\mathbf{a}, 1, \ldots, 1)$ sur $\mathcal{G} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$ est minimale.

Preuve Soit p un nombre premier, $x \in \mathbb{Z}_p$ et $y + p^k\mathbb{Z}_p$ une boule ouverte de $\mathbb{Q}_p$. Nous allons montrer que l'orbite de x rencontre $y + p^k\mathbb{Z}_p$. Pour cela, on décompose x et y sous la forme $y = \sum_{n=n_0}^{+\infty} y_n p^n$ et $x = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x_n p^n$. Le nombre $r = p^{k+1} + \sum_{n=n_0}^{k} y_n p^n - \sum_{n=n_1}^{k} x_n p^n$ est alors un entier positif tel que $x + r - y$ est de valuation au moins $k+1$. Ainsi, tous les $x + r + n\,p^{k+1}$ sont dans la boule $y + p^k\mathbb{Z}_p$.

En particulier, puisque $y + p^k\mathbb{Z}_p$ forment une base de la topologie de $\mathbb{Z}_p$, l'orbite de x rencontre tous les ouverts de $\mathbb{Z}_p$ et l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est minimale.

Nous allons maintenant montrer que l'addition de $(\mathbf{a}, 1, \ldots, 1)$ est minimale sur $\mathcal{G}$. Soit $z = (\mathbf{b}, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_k$ un pavé de $\mathcal{G}$. On vient de prouver l'existence, pour chaque p_i, d'entiers r_i et l_i tels que $a_i + r_i + n\,{p_i}^{l_i} \in \mathcal{U}_i$ pour tout n. Posons $q = {p_1}^{l_1} \ldots {p_k}^{l_k}$. Le théorème des restes chinois implique l'existence d'un entier m tel que pour tout k, $m + k\,q$ est un élément de chacune des suites $(r_i + n\,p^{l_i})_n$. Ainsi, $a_i + m + k\,q \in \mathcal{U}_i$ pour tout k, i. Par minimalité, l'orbite dans $\mathbb{T}^n$ de $\mathbf{b} + m\,\mathbf{a}$ sous l'action la translation de vecteur $q\,\mathbf{a}$ rencontre $\mathcal{U}$. Il existe donc un entier K tel que $a + (m + Kq)(\mathbf{a}, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{E}$, et la translation de vecteur $(\mathbf{a}, 1, \ldots, 1)$ est minimale sur $\mathcal{G}$. ■

Au chapitre 3, le facteur topologique de translation torique est obtenu comme projection sur le tore d'une représentation de Ω par un échange de morceaux définie dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d-1}$. Dans la section suivante, on donne une interprétation algébrique de cette représentation par échange de morceaux, qui amène à définir une représentation p-adique. Cette représentation joue dans le cadre p-adique un rôle semblable à celui de la représentation géométrique dans le cadre réel.

6.3 Représentation formelle et par un pseudo échange de morceaux des substitutions non unimodulaires

On considère toujours une substitution σ primitive et dont la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ a un le polynôme caractéristique est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit α une valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ et $\mathbf{v}_\alpha$ un vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Soient c_1 et $2c_2$ le nombre de valeurs propres réelles et complexes de $\mathbf{M}_\sigma$ de module inférieur à 1. On note $\beta_1, \ldots \beta_{c_1}$ ces valeurs propres réelles et $\beta_{c_1+1}, \ldots, \beta_{c_1+c_2}, \beta_{c_1+c_2+1} = \overline{\beta_{c_1+1}}, \ldots, \beta_{c_1+2c_2} = \overline{\beta_{c_1+c_2}}$. En particulier, si la substitution est de type Pisot, les β_i parcourent toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ excepté sa valeur propre dominante, et on a $c_1 + 2c_2 = d - 1$.

6.3.1 Définition de la représentation

On a montré au chapitre 4 que la représentation géométrique des systèmes substitutifs de type Pisot était constituée de toutes les valeurs complexes que peut prendre la représentation formelle F_α du système substitutif (définition 4.1.1).

Si la substitution n'est pas de type Pisot, on peut encore définir une représentation géométrique ψ de Ω en regroupant les valeurs des $F_\alpha(w)$ pour $|\alpha| < 1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \beta_k$, avec $k \leq c_1 + 2c_2$.

On définit ainsi la représentation F_{β_k} de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par

$$\text{si } \Gamma(w) = (q_i, a_i, r_i)_i \quad \text{alors } F_{\beta_k}(w) = \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(q_i), \mathbf{v}_{\beta_k} > {\beta_k}^i.$$

On rassemble ci-dessous ces représentations dans une représentation géométrique globale. Les représentations conjuguées dans le plan complexe sont omises, celles-ci n'apportant pas d'information supplémentaire.

$$\forall\, w \in \Omega \qquad \psi(w) = \Big(F_{\beta_1}(w), \ldots F_{\beta_{c_1+c_2}}(w)\Big) \in \mathbb{R}^{c_1} \times \mathbb{C}^{c_2} \simeq \mathbb{R}^{c_1+2c_2}. \tag{6.1}$$

Soit $D_R = c_1 + 2c_2$ la dimension réelle de l'espace de représentation, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres contractantes de $\mathbf{M}_\sigma$. On a $D_R \leq d - 1$.

L'égalité $D_R = d-1$ est vraie si et seulement si la substitution est de type Pisot. Dans ce cas, ψ est bien la fonction définie au chapitre 3 pour représenter les substitutions de type Pisot. On a vu que cette représentation, qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage et un pseudo-échange de morceaux, se factorise sur un tore en une translation. Ceci est possible pour la raison suivante : dans le cas Pisot, D_R est la plus grande dimension possible, et les vecteurs $\delta_1, \ldots, \delta_d$ ont un degré de liberté suffisant, au sens que $\delta_1 - \delta_d, \ldots, \delta_{d-1} - \delta_d$ engendrent un réseau. Le but de cette partie est de montrer qu'un phénomène similaire se produit pour les facteur topologiques p-adiques.

La représentation ψ contient toutes les valeurs finies que prend la série formelle F_α pour les topologies sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui complètent ce corps en un espace vectoriel réel, c'est-à-dire pour les topologies archimédiennes sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Or, le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ peut aussi être muni des topologies non archimédiennes que sont les topologies ultramétriques, associées aux idéaux $\mathcal{I}$ premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. Pour que la série F_α converge pour une telle topologie, il faut et il suffit que α^n tende vers zéro, c'est-à-dire que $\alpha \in \mathcal{I}$. La série est alors à valeur dans le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour la topologie $\mathcal{I}$-adique, c'est-à-dire $\mathbb{Q}_q(\alpha)$, où q est le seul nombre premier contenu dans $\mathcal{I}$.

Définition 6.3.1 *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contient α, on note $F_\mathcal{I}$ la fonction sur Ω égale à la valeur de F dans le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour la topologie $\mathcal{I}$-adique.*

Soit p est un nombre premier fixé. On regroupe dans une seule application les représentations qui correspondent à un même nombre premier p, c'est-à-dire qui sont à valeur dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Définition 6.3.2 *Soit σ une substitution de type Pisot et α une valeur propre de sa matrice d'incidence. Soit p un nombre premier.*

On décompose l'idéal $\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ en idéaux premiers :

$$\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \textstyle\prod_{i=1}^{l} {\mathcal{I}_i}^{n_i}.$$

Soit $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_i}}$ *le complété de* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *pour la topologie* $\mathcal{I}_i$*-adique,* $f(\mathcal{I}_i)$ *le degré résiduel de* $\mathcal{I}_i$ *sur* $\mathbb{Q}(\alpha)$*, et* $e(\mathcal{I}_i) = v_{\mathcal{I}_i}(p)$*. On pose* $D_p = \sum_{i=1}^{k} e(\mathcal{I}_i) f(\mathcal{I}_i)$.

La représentation p-adique *du système dynamique* Ω *est la fonction* F_p *à valeur dans le* $\mathbb{Q}_p$*-espace vectoriel de dimension* D_p $\widetilde{\mathbb{K}_p} = \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_l}}$ *définie par :*

$$F_p = (F_{\mathcal{I}_1}, \ldots, F_{\mathcal{I}_l}) . \tag{6.2}$$

6.3.2 Étude de la dimension D_p

La représentation p-adique existe si et seulement si D_p est non nul, c'est-à-dire si $\alpha\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ est non trivial. De tels entiers p sont déterminés grâce au lemme suivant.

Lemme 6.3.1 *Soit* θ *un entier algébrique de polynôme minimal* π*. Les diviseurs premier de* $\pi(0)$ *sont exactement les nombres premiers* p *pour lesquels il existe un idéal premier* $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ *qui contient simultanément* θ *et* p.

Preuve Les idéaux qui contiennent θ sont ceux qui interviennent dans la décomposition de $\theta\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ sous la forme $\prod {\mathcal{I}_i}^{n_i}$, avec $n_i > 0$, puisque θ est entier algébrique. Soient p_i les nombres premiers tels que $\mathcal{I}_i \cap \mathbb{Z} = p_i\mathbb{Z}$. Le nombre $\pi(0)/\theta$ appartient à $\mathbb{Q}(\theta)$, et est le produit des conjugués de θ, qui sont tous des entiers algébriques. Ainsi, $\pi(0)/\theta \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$, ce qui implique que pour tout i, $\pi(0) \in \theta\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)} = \prod {\mathcal{I}_i}^{n_i} \subset \mathcal{I}_i$. De ce fait, $\pi(0) \in \mathbb{Z} \cap \mathcal{I}_i = p_i\mathbb{Z}$, et tous les p_i divisent $\pi(0)$.

Réciproquement, si p divise $\pi(0)$, la décomposition de p dans le corps de décomposition $\mathbb{K}$ de π s'écrit $p\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \prod {\mathcal{I}_i}^{n_i}$. On a ainsi $\pi(0) \in p\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{I}_1$. Puisque $\mathcal{I}_1$ est premier et $\pi(0)$ le produit de tous les conjugués de θ, un conjugué θ_1 de θ appartient à $\mathcal{I}_1$. Soit τ l'automorphisme de $\mathbb{K}$ qui envoie θ_1 sur θ. L'ensemble $\phi(\mathcal{I}_1)$ est alors un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, et sa trace $\phi(\mathcal{I}_1) \cap \mathbb{Q}(\theta)$ sur $\mathbb{Q}(\theta)$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ qui contient p et θ. ∎

Corollaire 6.3.1 *La représentation* p*-adique de* Ω *est non triviale si et seulement si* p *divise le déterminant de la matrice d'incidence de* σ.

En particulier, si la substitution est unimodulaire, le système substitutif associé n'admet aucun facteur topologique p-adique.

Comme pour D_R, la dimension D_p est limitée en fonction du nombre de lettres de l'alphabet.

Lemme 6.3.2 *L'inégalité suivante est vérifiée :*

$$D_p \leq [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d.$$

Preuve On décompose $p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ en idéaux premiers sous la forme $p\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{i=1}^{k} {\mathcal{J}_i}^{e_i}$. L'idéal $p\mathbb{Z}$ étant premier dans $\mathbb{Z}$, on a $\sum_{i=1}^{n} e(\mathcal{J}_i) f(\mathcal{J}_i) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ (voir par exemple [79]). Mais $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d$ puisque $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Enfin, tout idéal premier $\mathcal{I}_i$ qui contient p et α contient en particulier p. Il s'agit donc d'un des $\mathcal{J}_i$ ci-dessus. En particulier, $\sum_{i=1}^{l} e(\mathcal{I}_i) f(\mathcal{I}_i) \leq \sum_{i=1}^{k} e(\mathcal{J}_i) f(\mathcal{J}_i) = d$. ∎

6.3.3 Analogue p-adique de la condition Pisot

On a montré dans la section 6.2 que le système substitutif (Ω, S) admet une translation sur le groupe $\mathbb{Z}_p$ pour facteur topologique si et seulement si tous les idéaux du corps de décomposition de $\mathbf{M}_\sigma$ qui contiennent p contiennent toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$. Cette condition peut-être reformulée dans le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$:

Lemme 6.3.3 *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathbb{K}$ le corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ et α une valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$. Soit p un nombre premier. Alors tout idéal premier de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ qui contient p contient aussi toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ si et seulement si tout idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contient p contient aussi α.*

Preuve Supposons que tout idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contient p contient aussi α. Soit ρ une valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ et τ l'homomorphisme de corps canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{Q}(\rho)$. Ce morphisme envoie les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\rho)}$. De ce fait, tout idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\rho)}$ qui contient p contient ρ.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ qui contient p. Alors, pour toute valeur propre ρ de $\mathbf{M}_\sigma$, $\mathcal{I}$ rencontre $\mathbb{Q}(\rho)$ selon un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\rho)}$ qui contient p et ρ appartient donc à $\mathcal{I}$. Toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ appartiennent ainsi à tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ qui contiennent p.

Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$ sont dans tous les idéaux premiers de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ qui contiennent p. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contient p. Alors $\mathcal{I}\mathcal{O}_\mathbb{K}$ est un idéal de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ et est donc inclus dans un idéal premier $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_\mathbb{K}$. Puisque $p \in \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, on a $\alpha \in \mathcal{J}$. De ce fait $\alpha \in \mathcal{J} \cap \mathbb{Q}(\alpha) = \mathcal{I}$. ■

On peut ainsi relier la condition d'existence d'un facteur topologique de translation p-adique à la dimension D_p étudiée dans le paragraphe précédent.

Corollaire 6.3.2 *Le système dynamique associé à σ admet pour facteur topologique une addition sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement $D_p = d$, c'est-à-dire que D_p est maximal.*

Preuve Selon le lemme 6.3.3, le système substitutif admet un facteur topologique p-adique si et seulement si tous les idéaux qui interviennent dans la décomposition de $p\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ interviennent aussi dans la décomposition $\alpha\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\,\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. Selon la preuve du lemme 6.3.2, ceci équivaut au fait que $D_p = d$. ■

Si cette condition est vérifiée, le *plongement canonique* de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\widetilde{\mathbb{K}_p}$ est défini par

$$x \in \mathbb{Q}(\alpha) \mapsto \hat{x} = (x, \ldots, x) \in \prod_{i \leq d} \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_i}} = \widetilde{\mathbb{K}_p} \simeq {\mathbb{Q}_p}^d.$$

Lemme 6.3.4 *On suppose que $D_p = d$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_d$ les coordonnées du vecteur propre $\mathbf{v}_\alpha$ intervenant dans la définition 4.1.1. Alors $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_d - \hat{\beta}_1$ forment une $\mathbb{Q}_p$-base de $\widetilde{\mathbb{K}_p}$.*

Preuve Puisque les β_i sont rationnellement indépendants (voir section 1.3), $\beta_1, \beta_2 - \beta_1, \ldots, \beta_d - \beta_1$ forment une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Mais si $x_1, \ldots, x_d$ est une base de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, alors $\hat{x_1}, \ldots, \hat{x_d}$ est une base de $\prod_{i=1}^k \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{J}_i}}$ en tant que $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel (voir [12], chapitre 4, section 2, théorème 1). Le fait que $D_p = d$ signifie justement que $\prod_{i=1}^k \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{J}_i}} = \widetilde{\mathbb{K}_p}$. ■

Ces éléments de $\widetilde{\mathbb{K}_p}$ interviennent dans la description de l'action du décalage S sur Ω :

Proposition 6.3.1 *On a*

$$\forall\, w \in \Omega, \quad F_p(Sw) = F_p(w) + \hat{\beta_{w_0}}.$$

Preuve Si $\mathcal{I}$ est un idéal qui contient p, et donc α, selon une preuve semblable à celle de la proposition 6.1.1, la définition de $F_\mathcal{I}$ implique que pour $w \in \Omega$, on a : $F_\mathcal{I}(S(w)) = F_\mathcal{I}(w) + \beta_{w_0}$. ■

Ainsi, le décalage sur Ω est conjugué en dehors de l'intersection des images des cylindres au pseudo échange de morceaux défini sur $F_p(\Omega) = \cup F_p([i])$ par :

$$x \in F_p[i] \implies \mathcal{T}_p(x) = x + \hat{\beta}_i.$$

Soit $J_{\hat{\beta}_1} : \widetilde{\mathbb{K}_p} \mapsto \mathbb{Q}_p$ la fonction qui associe à tout élément de $\widetilde{\mathbb{K}_p}$ le coefficient selon $\hat{\beta}_1$ de sa décomposition dans la base $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_d - \hat{\beta}_1$.

On peut alors donner une nouvelle écriture de la fonction du théorème 6.2.1 qui réalise le facteur p-adique de (Ω, S) :

Proposition 6.3.2 *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit p un diviseur premier de tous les coefficients non dominants de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$. Si Γ est le développement en préfixes-suffixes, on a*

$$\forall\, w \in \Omega, \quad \text{si } \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \ \text{ alors } \ J_{\hat{\beta}_1} \circ F_p\,(w) = \sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)|.$$

Preuve La projection $J_{\hat{\beta}_1}$ vérifie pour $i \leq d$, $J_{\hat{\beta}_1}(\hat{\beta}_i) = 1$. Une conséquence de la proposition 6.3.1 est ainsi que pour tout $w \in \Omega$, $J_{\hat{\beta}_1} \circ F_p\,(Sw) = J_{\hat{\beta}_1} \circ F_p\,(w) + 1$.

Les fonctions $J_{\hat{\beta}_1} \circ F_p$ et $\sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)|$ sont donc nulles aux points de Ω périodiques pour σ, vérifient la même relation de commutation et ont des ensembles minimaux pour espace de départ et d'arrivée. Elles sont donc égales. ∎

Conclusion. On montre au chapitre 3 qu'un système substitutif de type Pisot admet pour facteur topologique une translation torique qui s'obtient comme quotient d'un pseudo échange de morceaux sur un espace euclidien, ceci parce que la condition Pisot implique que l'espace euclidien en question est de dimension assez grande pour permettre de quotienter.

Similairement, nous venons de montrer qu'un système substitutif vérifiant la condition *p divise tous les coefficients non dominants du polynôme* admet pour facteur topologique une translation p-adique qui s'obtient comme projection d'un pseudo échange de morceaux sur un $\mathbb{Q}_p$ espace vectoriel, Ceci est possible car la condition implique que la dimension de l'espace vectoriel est suffisamment grande pour permettre la projection. On peut ainsi voir la condition *p divise tous les coefficients non dominants du polynôme* ou son équivalent *$\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p* comme un analogue p-adique du fait qu'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ admet pour racine un nombre de Pisot.

Remarque. En conséquence de la proposition 6.3.1, les projections de F_p sur chacune des directions $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_d - \hat{\beta}_1$ parcourent chacunes tout l'ensemble $\mathbb{Z}_p$.

Pour la substitution σ_2 définie par $\sigma_2(1) = 1112$ et $\sigma_2(2) = 12$, la représentation F_2 est à valeur dans $\mathbb{Z}_2\hat{\beta}_1 + \mathbb{Z}_2\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$. En représentant $\mathbb{Z}_2$ par l'intervalle $[0,1[$, on dessine $F_2(\Omega)$ dans dans $[0,1[\times[0,1[$, et on obtient la figure 6.1.

la partie claire est l'image $F_2([1])$ du cylindre $[1] \subset \Omega$, elle semble recouvrir tout $[0,1[\times[0,1[$, la partie foncée est constituée de deux parties (une semble plus foncée que l'autre). Il s'agit de l'image $F_2([2])$ du cylindre $[2] \subset \Omega$. Le fait que cette partie soit incluse dans le rectangle $[1/2,1] \times [0,1[$ est naturel si on remarque que dans le point fixe de σ_2, les 2 apparaissent toujours à un rang pair.

Dans tous les exemples programmés, on obtient un résultat semblable. Ceci fait conjecturer que l'image de la représentation p-adique F_p est en fait le simple produit croisé de ces projections, c'est-à-dire :

Conjecture 6.3.1 *Si p divise tous les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution, on a :*

$$F_p(\Omega) = \mathbb{Z}_p\hat{\beta}_1 + \mathbb{Z}_p(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1) + \cdots + \mathbb{Z}_p(\hat{\beta}_d - \hat{\beta}_1).$$

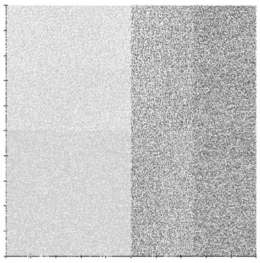

FIG. 6.1 – Image par F_2 du système substitutif de σ_2

Chapitre 7

Représentation globale des substitutions non unitaires

Dans ce chapitre, en guise de conclusion, nous essayons de généraliser aux substitutions non unimodulaires les résultats obtenus aux chapitres 3, 4 et 5 pour les substitutions unimodulaires, en particulier leur représentation par un échange de morceaux sur un ensemble auto-similaire, les conditions suffisante ou nécessaire et suffisante pour l'injectivité de ces représentations, et l'application à la construction de partitions de Markov. Nous exposons en particulier quels sont les nouveaux résultats à prouver pour obtenir une telle généralisation.

Notons que les résultats de ce chapitre sont indépendants des résultats du chapitre 6, en particulier de la caractérisation des facteurs p-adiques des systèmes substitutifs. Par contre, certaines définitions du chapitre 6 seront reprises dans ce chapitre.

On considère une substitution σ primitive de type Pisot, qui n'est pas obligatoirement unimodulaire. Les valeurs propres de sa matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ sont toujours notée α_1 (valeur propre dominante), ..., α_r pour les réelles et $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}$, $\alpha_{r+s+1} = \overline{\alpha_{r+1}}$, ..., $\alpha_{r+2s} = \overline{\alpha_{r+s}}$ pour les complexes.

7.1 Représentation globale

7.1.1 Définition

On regroupe dans une même application la représentation géométrique φ (lemme 3.1.1, formule 4.3), et les représentations p-adiques F_p (définition 6.3.2). On obtient ainsi une application qui rassemble toutes les valeurs que peut prendre la représentation formelle F_α de la substitution (définition 4.1.1) pour les différentes topologies existant sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Définition 7.1.1 *Soit σ une substitution de type Pisot et α une valeur propre de sa matrice d'incidence. Soit Ω le système substitutif associé à σ. Soient p_1, ..., p_k les diviseurs premiers de* $\det \mathbf{M}_\sigma$. *Soit φ la représentation géométrique de Ω. Pour tout p premier, soit F_p sa représentation p-adique.*

On appelle représentation globale *du système dynamique Ω la fonction F_{glob} définie sur Ω par*

$$F_{glob} = (\varphi, F_{p_1}, \ldots F_{p_k}).$$

On décompose comme suit α dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ en idéaux premiers ordonnés par ordre croissant suivant l'unique nombre premier qu'ils contiennent :

$$\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{j=1}^{m} \mathcal{I}_j{}^{n_j}.$$

Comme au chapitre 6, on note $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour la topologie $\mathcal{I}_j$-adique et $\widetilde{\mathbb{K}_p}$ le produit des $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ pour $p \in \mathcal{I}_j$.

La représentation globale F_{glob} est alors à valeur dans l'ensemble suivant :

$$F_{glob}(\Omega) \subset \mathcal{E} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \widetilde{\mathbb{K}_{p_1}} \times \ldots \widetilde{\mathbb{K}_{p_k}} = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_n}}.$$

On note $\mathcal{F}_{glob} = F_{glob}(\Omega)$ l'image de F_{glob}. Pour $i \leq d$, on appelle $\mathcal{F}^i_{glob} = F_{glob}([i])$ l'image du cylindre $[i]$ de Ω.

7.1.2 Dynamique du décalage sur la représentation globale

Selon les propositions 3.1.1 et 6.3.1 la dynamique sur $\mathcal{F}_{glob}$ du décalage S est la suivante :

Proposition 7.1.1 *Il existe $\delta_1, \ldots, \delta_d \in \mathcal{F}_{glob}$ tels que :*

$$\forall\, w \in \Omega, \quad F_{glob}(Sw) = F_{glob}(w) + \delta_{w_0}. \tag{7.1}$$

Ainsi, F_{glob} réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur Ω et le pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}_{glob}$ défini sur $\mathcal{F}_{glob} = \cup_{i \leq d} \mathcal{F}^i_{glob}$ par

$$x \in \mathcal{F}^i_{glob} \implies \mathcal{T}_{glob}(x) = x + \delta_i. \tag{7.2}$$

Le pseudo-échange $\mathcal{T}_{glob}$ n'est pas une application puisque non défini sur les intersections des $\mathcal{F}^i_{glob}$. On a montré au chapitre 3 que, si la substitution est unimodulaire, la condition de coïncidences est une condition suffisante pour que les intersections soient de mesure nulle. Le pseudo-échange $\mathcal{T}_{glob}$ est alors un véritable échange de morceaux, semi-conjugué au décalage S sur Ω, la représentation F_{glob} étant de plus un isomorphisme mesurable.

Le but de la section 7.2 est de voir en quel sens on peut espérer généraliser ces résultats au cadre des substitutions non unimodulaires.

Par ailleurs, selon le théorème 3.2.1 et la proposition 6.3.2, il existe une projection continue de $\mathcal{E}$ dans le groupe compact $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$, où les p_i, pour $i \leq l$, sont les diviseurs premiers communs à tous les coefficients non dominant du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$. Via cette projection, la représentation globale se factorise en le facteur de translation continu défini à la proposition 6.2.2.

Exemple. On reprend la substitution σ_2 définie par $\sigma_2(1) = 1112$ et $\sigma_2(2) = 12$. La représentation globale notée F_2, est à valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. Le décalage S sur Ω_2 devient la translation par morceaux :

$$F_2(Sw) = \begin{cases} F_2(w) + (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) & \text{si } w_0 = 1 \\ F_2(w) + (1, 1) & \text{si } w_0 = 2. \end{cases}$$

Soit Π la surjection de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$ définie par : $\Pi((a, b + c\sqrt{2})) = (a\sqrt{2} \bmod 1, b)$. Alors $\Pi\,(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 1) = \Pi\,(1, 1)$.

De ce fait, $\Pi \circ F_2$ est une application de Ω à valeur dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$, nulle en 0, qui vérifie l'équation fonctionnelle : $f(Sx) = f(x) + (\alpha_2, 1)$.

La minimalité des deux systèmes (Ω, S) et $(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \tau_{(\alpha_2,1)})$ permet de déduire que $\Pi \circ F_2 = (\psi_2, \phi_2)$ est l'application qui factorise Ω en une translation de vecteur $(\alpha_2, 1)$ sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$.

On remarque que de ce fait ϕ_2 est la fonction définie à la proposition 6.1.1 et ψ_2 est la fonction obtenue par G. Rauzy dans [77]. ■

Le but de la section 7.3 est de généraliser les résultats des chapitres 4 et 5 pour obtenir un critère d'injectivité de cette dernière représentation par une translation sur un groupe compact.

7.2 Injectivité en mesure de la représentation globale

On cherche à généraliser les résultats du chapitre 3 ou de [7] et à voir ainsi si la condition de coïncidences est encore une condition suffisante pour l'injectivité de la représentation globale, pour les substitutions de type Pisot non unimodulaires.

Les résultats du chapitre 4 sont principalement basés sur le fait que la mesure induite sur $\mathcal{F}_{glob}$ par celle de Ω est la mesure de Lebesgue. Nous allons voir en quel sens ceci est encore vrai pour la représentation globale.

7.2.1 Mesure induite sur $\mathcal{F}_{glob}$ par celle de Ω.

Pour identifier cette mesure induite, on utilise la structure auto-similaire de l'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$. En effet, par primitivité, on sait que les cylindres de Ω se partitionnent sous la forme $[i] = \cup_{j\leq d,\ \exists p,s,\ pis=\sigma(j)} S^{|p|}\sigma[j]$. Si on applique F_{glob} à cette décomposition, on obtient selon la formule (7.1) :

$$\mathcal{F}_{glob} = \bigcup_{i\leq d} \mathcal{F}^i_{glob} \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}^i_{glob} = \bigcup_{j\leq d,\ \exists p,s,\ pis=\sigma(j)} \left(F_{glob}(\sigma[j]) + \sum_{k<|p|} \delta_{\sigma(j)_k} \right). \tag{7.3}$$

Pour exploiter cette relation, on doit déterminer comment σ agit sur la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$. Une conséquence de la propriété 2.4.1 est que σ est semi-conjugué à une application diagonale de $\mathcal{F}_{glob}$: en effet, définissons h_{glob} sur $\mathcal{F}_{glob}$ par

$$h_{glob}(x_2, \ldots, x_{r+s}, y_1, \ldots, y_l) = (\alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_{r+s} x_{r+s}, \alpha\, y_1, \ldots, \alpha\, y_l),$$

alors la définition de F_{glob} implique

$$\forall\, w \in \Omega, \quad F_{glob}(\sigma w) = h_{glob}\, F_{glob}(w).$$

La manière dont h_{glob} contracte les parties de $\mathcal{F}_{glob}$ est explicitée ci-dessous.

Proposition 7.2.1 *L'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ est muni de la mesure $\mu_{\mathcal{E}}$ produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ et des mesures de Haar sur les $\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}$. Alors, pour tout borélien B de $\mathcal{F}_{glob}$:*

$$\mu_{\mathcal{E}}(h_{glob}(B)) = 1/\alpha\, \mu_{\mathcal{E}}(B). \tag{7.4}$$

Preuve. La formule est vraie si elle est vérifiée pour tous les pavés de $\mathcal{F}_{glob}$. Rappelons que $\mathcal{F}_{glob}$ est le produit d'un espace vectoriel euclidien de dimension $d-1$, et de complétés de corps p-adiques notés $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$, où les $\mathcal{I}_j$, pour $j = 1 \ldots n$, sont les ideaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ qui contiennent

α. Pour tout $j \leq n$, on note π_j un générateur de l'unique idéal premier $\widetilde{\mathcal{I}_j}$ de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}$. Tout pavé de $\mathcal{F}_{glob}$ est alors de la forme :

$$B = \prod_{i=2}^{r+s}[a_i, b_i] \times \prod_{j=1}^{n} \left(c_j + {\pi_j}^{n_j}\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right).$$

l'image de ce pavé par h est le pavé : $h_{glob}(B) = \prod_{i=2}^{r+s}[\alpha_i a_i, \alpha_i b_i] \times \prod_{j=1}^{n} \left(\alpha\, c_j + \alpha\, {\pi_j}^{n_j}\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right)$.

Soit $\mu_{\mathcal{F}}$ la mesure sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{F}}\left(\textstyle\prod_{i=2}^{r+s}[\alpha_i a_i, \alpha_i b_i]\right) &= \left(\textstyle\prod_1^r \alpha_i \prod_{r+1}^{r+s} \alpha_i \bar{\alpha_i}\right) \mu_{\mathcal{F}}\left(\textstyle\prod_{i=2}^{r+s}[a_i, b_i]\right) \\ &= \tfrac{\det \mathbf{M}_\sigma}{\alpha}\, \mu_{\mathcal{F}}\left(\textstyle\prod_{i=2}^{r+s}[a_i, b_i]\right). \end{aligned}$$

De plus, selon la propriété 1.4.1, on a pour tout $j \leq n$

$$\mu_{\mathcal{I}_j}\left(\alpha\, c_j + \alpha\, {\pi_j}^{n_j}\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right) = \left(\operatorname{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}}{\alpha\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}} \right) \right)^{-1} \mu_{\mathcal{I}_j}\left(c_j + {\pi_j}^{n_j}\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} \right).$$

Or, dans le corps de nombre $\mathbb{K}$, si j est fixé, $\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ se décompose sous la forme $\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{K}} = {\mathcal{I}_j}^{n_j}\, \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un idéal premier avec $\mathcal{I}_j$. Cette expression passe au complété $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$ sous la forme $\alpha\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} = \widetilde{\mathcal{I}_j}^{n_j}\ \widetilde{\mathcal{J}}$, où $\widetilde{\mathcal{J}}$ est l'adhérence de $\mathcal{J}$ dans $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}_j}}$, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}$ lui-même puisque $\mathcal{J}$ est premier avec l'idéal qui définit la topologie de $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$. Puisque la complétion ne modifie pas les corps résiduels, ceci implique $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} / \alpha\, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}} / \widetilde{\mathcal{I}_j}^{n_j} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}} / {\mathcal{I}_j}^{n_j}$. Le théorème des restes chinois implique alors :

$$\textstyle\prod_{j=1}^{n} \operatorname{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{{\mathcal{I}_j}^{n_j}} \right) = \operatorname{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\prod_{j=1}^{l} {\mathcal{I}_j}^{n_j}} \right) = \operatorname{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \right).$$

Enfin, le cardinal du quotient $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} / \alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, est la norme de α dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, c'est-à-dire le produit des conjugués de α. Puisque le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ est irréductible, on obtient

$$\operatorname{card}\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{K}}} \right) = \det \mathbf{M}_\sigma.$$

Ce qui permet de conclure :

$$\mu_{\mathcal{E}}(h(B)) = \frac{\det \mathbf{M}_\sigma}{\alpha}\, (\det \mathbf{M}_\sigma)^{-1}\, \mu_{\mathcal{E}}(B) = 1/\alpha\, \mu_{\mathcal{E}}(B).$$

■

Ainsi, la substitution σ agit sur l'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ comme elle agirait sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ si elle était unimodulaire, situation que nous avons déjà étudié en détails. En particulier, on peut reprendre la preuve de la proposition 3.3.1 pour déterminer la mesure induite sur chaque $\mathcal{F}_{glob}^i$ par celle de Ω :

Proposition 7.2.2 *Si σ est une substitution de type Pisot, la mesure image par la représentation globale F_{glob} de la mesure μ_Ω sur les cylindres de Ω est proportionnelle à la mesure produit $\mu_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{F}_{glob}$: la constante $C_{glob} = \mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est telle que pour tout borélien B contenu dans un cylindre $[i]$ de Ω, on a :*

$$\mu_{\mathcal{E}}(F_{glob}(B)) = C_{glob}\, \mu_\Omega(B).$$

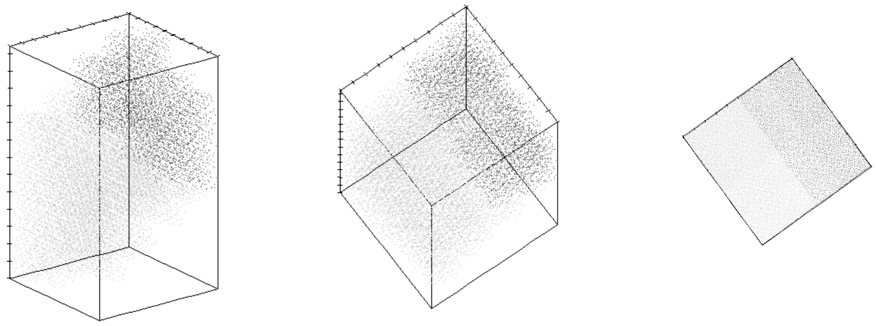

FIG. 7.1 – Image de la représentation globale de σ_2

Preuve On applique la mesure $\mu_{\mathcal{E}}$ aux relations exprimées à la formule (7.3), et on utilise le théorème de Perron-Frobenius pour montrer que les vecteurs ayant pour coordonnées les mesures des cylindres dans Ω et de leurs images par F_{glob} sont tous deux vecteurs propres dominants de la matrice de σ. ∎

Cette proposition n'est pas une exacte généralisation de la proposition 3.3.1 : en effet, dans la proposition 3.3.1, nous avons utilisé le fait que le tore $\mathbb{T}^{d-1}$ est facteur du système substitutif pour en déduire que la mesure de $\varphi(\Omega)$ est non nulle et que la constante de proportionnalité C est elle aussi non nulle.

7.2.2 Conjecture : la mesure de la représentation non nulle.

Nous ne sommes pour l'instant pas parvenus à prouver que la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ est non nulle dans $\mathcal{E}$. Nous pouvons seulement le conjecturer.

Conjecture 7.2.1 *Si tout diviseur premier du déterminant de la matrice d'incidence de la substitution divise tous les coefficients non dominant de son polynôme caractéristique, la mesure $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Pour appuyer cette conjecture, nous avons projeté dans $\mathbb{R}^3$ l'image de la représentation globale de la substitution σ_2. L'ensemble $\mathbb{Z}_2$ est encore représenté par $[0,1[$, comme nous l'avons expliqué à la section 1.4.

On donne plusieurs perspectives de cette projection à la figure 7.1 : en abscisse on trouvera la composante de la représentation globale selon le vecteur $\hat{\beta}_1$ de $\widetilde{\mathbb{K}_2}$, en ordonnée la composante de F_{glob} selon le vecteur $\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1$. La côte contient la composante réelle de F_{glob}.

En particulier, la projection de cette figure sur le plan des abscisses et ordonnées donne bien la figure 6.1.

A la figure 7.2, on trouvera les coupes de $\mathcal{F}_{glob}$ selon les plans $x = 1/2$, $y = 1/2$ et $z = 1/2$. Ceci laisse bien penser que $\mathcal{F}_{glob}$ occupe un volume et est de mesure non nulle.

On notera que les dessins de la figure 7.1 donnent une information sur la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ mais en aucun cas sur leur topologie.

Dans le cas unimodulaire, on prouve que la mesure de l'image de la représentation est non nulle à partir du fait que l'image de la représentation se projette de manière surjective dans le tore. Dans le cas non unimodulaire que nous traitons ici, on voudrait utiliser les résultats sur la projection dans les $\mathbb{Z}_p$ pour obtenir une information sur la mesure de l'image de la représentation.

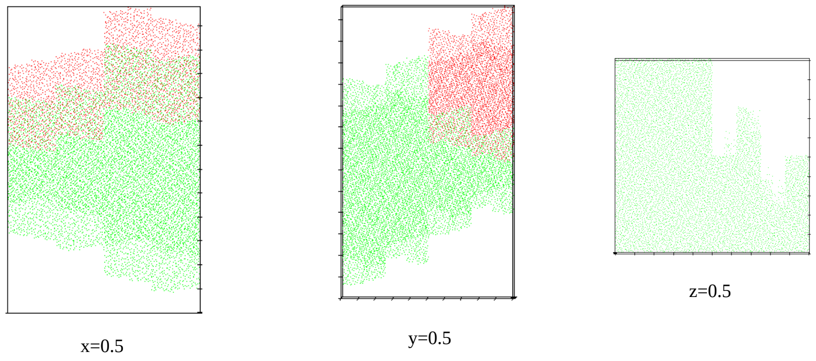

FIG. 7.2 – Coupes de l'image de la représentation globale de σ_2

Hélas, contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, la projection sur $\mathbb{Z}_p$ n'est pas une projection modulo un réseau mais une simple projection sur une coordonnée. Les techniques réelles ne sont donc plus valables ici. Un problème similaire se posera dans la section 7.3.

Par ailleurs, le recours dans le cas unimodulaire à la surjectivité sur la projection sur le tore semble artificiel pour obtenir la non nullité de la mesure de l'image de la représentation globale. En effet, dans le cas non Pisot, on a déjà expliqué en quel sens il est encore possible de construire une représentation réelle du système symbolique par un pseudo-échange de morceaux (chapitre 6, section 6.3.1). La raison pour laquelle ce pseudo-échange de morceaux n'est pas un échange de morceaux en mesure réside dans le fait que cette représentation ne vérifie pas une relation du type de la formule 7.4. Par contre, la mesure de l'image de la représentation dans son espace d'arrivée semble encore non nulle : en fait, le défaut de cette représentation est un manque de précision. Les vecteurs intervenant dans le pseudo-échange sont rationnellement liés, l'image de la représentation est plus dense que dans le cas Pisot, ce qui implique que la représentation est non injective. Par contre, la densité de l'image laisse penser qu'elle est de mesure non nulle.

Il serait intéressant de prouver par un argument général que la mesure de Lebesgue de l'image de la représentation φ dans le cas unimodulaire est non nulle, indépendamment de la condition Pisot. Ceci pourrait impliquer que c'est encore le cas si la substitution n'est pas unimodulaire.

Si les diviseurs du déterminant ne divisent pas les coefficients du polynôme caractéristique, il devient très difficile de représenter graphiquement l'image de la représentation globale, puisqu'on ne connaît pas de base de l'espace de représentation. On ne peut donc pas tester la conjecture dans cette situation. Ceci dit, la formule 7.4 est encore vérifiée dans ce cas là, ce qui laisse penser qu'on se trouve dans le bon espace de représentation, et que la mesure est encore non nulle.

7.2.3 Conjugaison avec un échange de morceaux

Dans cette section, nous montrons que si la mesure de $\mathcal{F}_{glob}$ est non nulle, alors la représentation F_{glob} est injective en mesure et plus généralement que F_{glob} vérifie des résultats semblables à ceux la représentation des systèmes unimodulaires prouvés au chapitre 3.

La proposition 7.2.2 s'interprète en terme d'injectivité sur les cylindres de Ω.

Proposition 7.2.3 *Si σ est une substitution de type Pisot telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle, la représentation globale F_{glob} est injective en mesure sur les cylindres $[i]$ de Ω. En effet, il existe un* *ensemble $N \subset \Omega$ de mesure nulle telle que :*

$$x, y \in [i] \backslash N \qquad F_{glob}(x) = F_{glob}(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Preuve Le théorème de Perron-Frobenius implique que la décomposition des images des cylindres sous la forme $\mathcal{F}^i_{glob} = \bigcup_{j \le d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} F_{glob}(\sigma[j]) + \delta_i$ est une partition en mesure, ce qui, ajouté à l'injectivité en mesure du développement en préfixes-suffixes, permet de conclure. On se référera au chapitre 3 (section 3.3) pour les détails. ■

Ainsi, la condition de coïncidences assure encore que les intersections des images des cylindres sont de mesure nulle :

Proposition 7.2.4 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle. Alors pour tout couple de lettre (i,j),*

$$\mu_{\mathcal{E}}({\mathcal{F}_{glob}}^i \cap {\mathcal{F}_{glob}}^j) = \mu_\Omega(F^{-1}({\mathcal{F}_{glob}}^i \cap {\mathcal{F}_{glob}}^j)) = 0.$$

Preuve La condition de coïncidence sur les préfixes signifie que pour tout couple de lettres i,j, il existe une lettre k et un entier l tels que $F_{glob}(\sigma^l[i]) + \sum_{m<|p|} \delta_{\sigma^l(i)_m}$ et $F_{glob}(\sigma^l[j]) + \sum_{m<|q|} \delta_{\sigma^l(j)_m}$ apparaissent dans la partition de $F_{glob}\sigma^l[k]$ et sont donc disjoints en mesure. On a de plus $\sum_{m<|p|} \delta_{\sigma^l(i)_m} = \sum_{m<|q|} \delta_{\sigma^l(j)_m}$, ce qui implique que l'intersection de $F_{glob}(\sigma^l[i]) = h^l {\mathcal{F}_{glob}}^i$ et $F_{glob}(\sigma^l[j]) = h^l {\mathcal{F}_{glob}}^j$ est de mesure nulle. On se référera au chapitre 3 (section 3.3) pour les détails. ■

Corollaire 7.2.1 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Le compact $\mathcal{F}_{glob}$ est pavé par les ensembles $\mathcal{F}_{glob_i}$, qui sont autosimilaires au sens de [53].

Preuve L'ensemble $\mathcal{F}_{glob}$ est l'union disjointe en mesure des ${\mathcal{F}_{glob}}^i$, qui se décomposent eux-mêmes sous la forme

$${\mathcal{F}_{glob}}^i = \bigcup_{j \le d,\, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} (h {\mathcal{F}_{glob}}^j + \textstyle\sum_{k<|p|} \delta_{\sigma(j)_k}) \qquad \text{presque partout.}$$

■

Corollaire 7.2.2 *Soit σ une substitution de type Pisot qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

La représentation F_{glob} est un isomorphisme mesurable entre (Ω, S) et $\mathcal{F}_{glob}$ muni d'une translation par morceaux définie presque partout par la formule (7.2).

On obtient ainsi :

Théorème 7.2.1 *Soit σ une substitution de type Pisot sur d lettres qui vérifie la condition de coïncidences et telle que $\mu_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}_{glob})$ est non nulle.*

Soit $\mathbf{M}_\sigma$ la matrice d'incidence de σ et α la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$. Pour $p \in \mathbb{N}$ premier, on note $C_p = \sum_{i=1}^k e(\mathcal{J}_i) f(\mathcal{J}_i)$ les $\mathcal{J}_i$ étant les diviseurs premiers dans $\mathbb{Q}(\alpha)$ de l'idéal $\alpha\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

Le système dynamique symbolique (Ω, S) associé à σ est isomorphe en mesure à un échange de morceaux sur une partie autosimilaire compacte de $\mathbb{R}^{d-1} \times {\mathbb{Q}_{p_1}}^{C_{p_1}} \times \cdots \times {\mathbb{Q}_{p_k}}^{C_{p_k}}$, où les p_i sont les diviseurs premiers de $\det \mathbf{M}_\sigma$.

7.3 Critère combinatoire d'injectivité

Nous venons de voir que la généralisation des techniques géométriques du chapitre 3 pour étudier l'injectivité en mesure de la représentation globale ne donne pas de résultats immédiats. Dans cette partie, nous allons montrer que par contre, on peut généraliser les techniques arithmétiques et combinatoires du chapitre 4 pour caractériser les représentations injectives en mesure.

7.3.1 Automate arithmétique

La définition de l'automate arithmétique pour les substitutions unimodulaires de type Pisot donnée au chapitre 4 se généralise comme suit pour les substitutions non unimodulaires. Cette définition a été donnée par G. Rauzy dans [77]. Le théorème 7.3.1 y a été énoncé et prouvé succinctement.

La notation σ désigne une substitution de type Pisot. La valeur propre dominante α_1 de $\mathbf{M}_\sigma$ est aussi notée α. Ses conjugués algébriques sont toujours notés $\alpha_2, \ldots, \alpha_d$.

Le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ peut alors être muni des topologies archimédiennes qui correspondent à chaque α_i ou des topologies ultramétriques qui correspondent aux idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Une valeur absolue sera notée v ou $|\cdot|_v$. Si elle est associée à un idéal $\mathcal{I}$, elle est notée $v_{\mathcal{I}}$.

Une série formelle de $\mathbb{Q}[[\alpha]]$ est dite *nulle pour une valeur absolue sur* $\mathbb{Q}(\alpha)$ si et seulement si elle converge vers 0 dans le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour cette valeur absolue.

On reprend l'ensemble de chiffres défini au chapitre 4 : $\mathcal{C}$ est le sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}(\alpha)$ suivant :

$$\mathcal{C} = \left\{ < \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(p) - \mathbf{l}(q) >,\ (p,a,s),(q,b,r) \in \mathcal{I}^2. \right\}.$$

Définition 7.3.1 *Soit $\mathcal{G}_a$ l'ensemble des nombres $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$ qui s'écrivent $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n$, où $(c_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}$ telle que $\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n$ est nul pour toutes les valeurs absolues de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui valent moins de 1 en α.*

On définit sur $\mathcal{G}_a$ un automate étiqueté par $\mathcal{C}$ en disant que $\gamma \in \mathcal{C}$ étiquette l'arête joignant ξ à ν si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_n$ et un entier N tels que :

$$\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n\, \alpha^n, \quad \nu = \frac{1}{\alpha^{N+1}} \sum_{n<N+1} c_n\, \alpha^n, \quad \gamma = c_N$$

$$\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n \textit{ est nul pour toutes les valeurs absolues telles que } |\alpha| < 1.$$

On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des sommets de l'automate qui appartiennent à un chemin infini partant du sommet 0. Le sous-automate ayant $\mathcal{V}_a$ pour ensemble de sommets est appelé automate arithmétique *associé à σ.*

En particulier, si la substitution est unimodulaire, on retrouve le graphe arithmétique du chapitre 4, puisque d'une part une série formelle $\sum_{n\geq 0} c_n\, \alpha^n$ est nulle pour la topologie associée à la valeur propre α_k si et seulement si $\sum_{n\geq 0} c_n\, {\alpha_k}^n = 0$, et d'autre part il n'y a pas de topologie ultramétrique sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui vérifie $|\alpha| < 1$ (lemme 6.3.1).

Théorème 7.3.1 *L'automate arithmétique associé à la substitution σ est fini. Les étiquettes de ses chemins partant de 0 sont exactement les suites $(c_n)_n$ de $\mathcal{C}$ telles que $\sum_{n\geq 0} c_n \alpha^n$ est nulle pour toutes les valeurs absolues de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui valent moins de 1 en α.*

Preuve Ce théorème est la conséquence des 4 lemmes suivants. Les lemmes 7.3.3 et 7.3.4 ainsi que le corollaire 7.3.1 ne sont pas explicités dans [77]. ∎

Lemme 7.3.1 *Pour toute valeur absolue v sur $\mathbb{Q}(\alpha)$, il existe une constante C_v telle que la valeur absolue de tous les sommets du graphe $\mathcal{G}_a$ est bornée par C_v. Si $C_v \geq 1$, il existe un élément c de $\mathcal{C} \cup \{\alpha\}$ tel que $|c|_v \neq 1$.*

Preuve. Soit v une valeur absolue sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ et M_v la constante $M_c = \max\{|c|_v, \delta \in \mathcal{C}\}$. Considérons un sommet $\xi = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n \alpha^n$ quelconque du graphe $\mathcal{G}$. Trois cas se présentent :

- Si $|\alpha|_v = 1$, alors v est non archimédiennes, sans quoi α admettrait un conjugué de module 1 et la substitution ne serait pas de type Pisot. De ce fait, $C_v = M_v$ répond à la question :

$$|\xi|_v = \frac{|\sum_{0\leq n<N} \alpha^n c_n|_v}{|\alpha|_v{}^N} = |\sum_{0\leq n<N} \alpha^n c_n|_v \leq \max(|c_n|_v\, |\alpha|_v{}^n\,) \leq M_v.$$

- Si $|\alpha|_v < 1$, on sait par hypothèse que $\sum_{n\geq 0} c_n \alpha^n$ est nul pour v. Ceci implique que $\xi = \sum_{n\geq 0} d_{n+N} \alpha^n$. Ainsi, $C_v = \frac{M_v}{1-|\alpha|_v}$ convient :

$$|\xi|_v = |\sum_{n\geq 0} c_{n+N}\alpha^n|_v \leq \frac{M_v}{1-|\alpha|_v}.$$

- Si $|\alpha|_v > 1$, alors $C_v = \frac{M_v}{|\alpha|_v - 1}$ convient par un simple calcul :

$$|\xi|_v \leq \frac{\sum_{0\leq n<N} |\alpha|_v{}^n |c_n|_v}{|\alpha|_v{}^N} \leq \frac{M_v}{|\alpha|_v{}^N}\,\frac{|\alpha|_v{}^N - 1}{|\alpha|_v - 1} \leq \frac{M_v}{|\alpha|_v - 1}.$$

Dans tous les cas, la valeur absolue des sommets est bornée par C_v. Si $|\alpha|_v = 1$, C_v sera supérieure à 1 si et seulement si M_v l'est, c'est à dire s'il existe un élément de $\mathcal{C}$ de valeur absolue distincte de 1. ■

Corollaire 7.3.1 *Si A un nombre entier tel que $A c$ est entier algébrique pour tout c de $\mathcal{C}$, alors $A\xi$ est entier algébrique pour tout sommet ξ du graphe $\mathcal{G}_a$.*

Preuve. Puisque α est un entier algébrique, il n'existe pas de valeur absolue ultramétrique qui vaut plus de 1 en α. Soit v une valeur absolue ultramétrique. Soit ξ un sommet du graphe.

Si $|\alpha|_v = 1$, selon la preuve du lemme précédent on a $|A\xi|_v \leq \max\{|Ac|_v,\, c \in \mathcal{C}\} \leq 1$ par choix de A. Si $|\alpha|_v < 1$, alors $|A\xi|_v = |\sum_{n\geq 0} Ac_{n+N}\alpha^n|_v \leq \max\{|Ac_{n+N}\alpha^n|_v\} \leq 1$. ■

Lemme 7.3.2 *Les étiquettes $(c_n)_{n\geq 0}$ des chemins de $\mathcal{G}_a$ partant de 0 sont exactement les suites telles que $\sum_{n\geq 0} c_n\alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue de $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui vaut moins de 1 en α.*

Preuve. Si $(c_n)_{n\geq 0}$ est telle que $\sum_{n\geq 0} c_n\alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue qui vaut moins de 1 en α, les nombres $\xi_N = \frac{1}{\alpha^N} \sum_{n<N} c_n \alpha^n$ sont des sommets du graphe $\mathcal{G}_a$. Il existe de plus des arêtes étiquetées par c_n joignant les sommets ξ_n et ξ_{n+1}. Comme $\xi_0 = 0$, la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est l'étiquette du chemin du graphe partant de $\xi_0 = 0$ et passant par les ξ_n.

Réciproquement, si $(c_n)_{n\geq 0}$ est l'étiquette d'un chemin partant de 0, il existe des nombres ξ_n tels que $\xi_0 = 0$ et c_n est l'étiquette de l'arête joignant ξ_n et ξ_{n+1}. Ces nombres vérifient donc : $\alpha\,\xi_{n+1} = c_n + \xi_n$. De proche en proche, on obtient :

$$\xi_N = \frac{\xi_0 + \sum_{0\leq n<N} c_n\alpha^n}{\alpha^N} = \frac{\sum_{0\leq n<N} c_n\alpha^n}{\alpha^N}.$$

Soit v une valeur absolue sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ telle que $|\alpha| < 1$. Puisque les $|\xi_n|_v$ sont bornées (lemme 7.3.1), on a alors :

$$|\sum_{n<N} c_n \alpha^n|_v = |\alpha^N \xi_N|_v = |\xi_N|_v \, |\alpha|_v{}^N \leq C_v \, |\alpha|_v{}^N \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0.$$

De ce fait, $\sum_{n\geq 0} c_n \, \alpha^n$ est nul pour toute valeur absolue qui vaut moins de 1 en α. ■

Lemme 7.3.3 *Il existe un élément β de $\mathbb{Q}(\alpha)$ tel que $\beta\xi$ est un entier algébrique pour tout sommet ξ du graphe $\mathcal{G}$.*

Preuve. Un élément de $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un entier algébrique si et seulement sa valeur absolue est inférieure à 1 pour toutes les valeurs absolues ultramétriques sur $\mathbb{Q}(\alpha)$. Nous allons construire un nombre β tel que $|\xi\beta|_{v_\mathcal{I}} \leq 1$ pour tout sommet ξ de $\mathcal{G}_a$ et tout idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

Reprenant les notations du lemme 7.3.1, les valeurs absolues v pour lesquelles $C_v > 1$ sont telles qu'il existe un élément δ de $\mathcal{C} \cup \{\alpha\}$ vérifiant $|\delta|_v \neq 1$. Or, seules un nombre fini de valeurs absolues ultramétriques sont distinctes de 1 en δ fixé. Les v pour lesquelles $C_v > 1$ sont ainsi en nombre fini. On les appelle $v_{\mathcal{I}_1}, \ldots, v_{\mathcal{I}_m}$.

Pour chaque $v_{\mathcal{I}_i}$, soit $q_i \in \mathcal{I}_i$. On a $|q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}} < 1$. Soit n_i un entier $C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq |q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}{}^{-n_i}$.

Posons $\beta = \prod_{i=1}^{n} q_i{}^{n_i}$. Ce nombre est un entier algébrique, toutes les valeurs absolues ultramétriques valent donc moins de 1 en β. De ce fait, on a pour tout $0 \leq i \leq m$: $|\beta|_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq |q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}{}^{n_i}$.

Soit v une valeur absolue ultramétrique telle que $C_v \leq 1$. On a alors pour tout sommet ξ du graphe : $|\beta\,\xi|_v \leq |\beta|_v C_v \leq 1$. Soit maintenant v telle que $C_v > 1$. Alors v est une des $v_{\mathcal{I}_i}$ et on a pour tout sommet ξ du graphe :

$$|\beta\,\xi|_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq |\beta|_{v_{\mathcal{I}_i}} C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq |q_i|_{v_{\mathcal{I}_i}}{}^{n_i} \, C_{v_{\mathcal{I}_i}} \leq 1.$$

Ainsi, $\xi\beta$ est entier algébrique pour tout sommet ξ de $\mathcal{G}_a$. ■

Lemme 7.3.4 *Les sommets du graphe $\mathcal{G}_a$ sont en nombre fini.*

Preuve. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n. Si i est l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{R}^n$, $i(\frac{1}{\beta}\,\mathcal{O}_\mathbb{K})$ est donc un réseau de $\mathbb{R}^n$ (voir [79]).

En fait, i associe à un nombre x l'ensemble de tous ses conjugués, dont les valeurs absolues usuelles sont toutes les valeurs absolues archimédiennes sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ appliquées en α. Selon le lemme 7.3.1, l'image par i de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}_a$ est ainsi bornée. Par définition des réseaux, ces sommets sont donc en nombre fini. ■

Pour obtenir pratiquement l'automate arithmétique, on déterminer le plus petit nombre entier A tel que, pour tout c de $\mathcal{C}$, $A\,c$ est un entier algébrique, en utilisant par exemple le critère – facilement vérifiable ici – selon lequel un nombre algébrique est entier si et seulement si les fonctions symétriques élémentaires de ses conjugués sont des nombres entiers. Des résultats classiques de théorie des nombres assurent l'existence de cet entier A, si bien qu'il suffit de tester les entiers A dans l'ordre croissant jusqu'à obtenir un qui convient.

On peut alors reprendre la construction de l'automate arithmétique comme dans le cas unimodulaire.

7.3.2 Automate d'injectivité

A partir de l'automate arithmétique on utilise les définitions du chapitre 4 pour obtenir un *automate de connexité* et un *automate d'injectivité*.

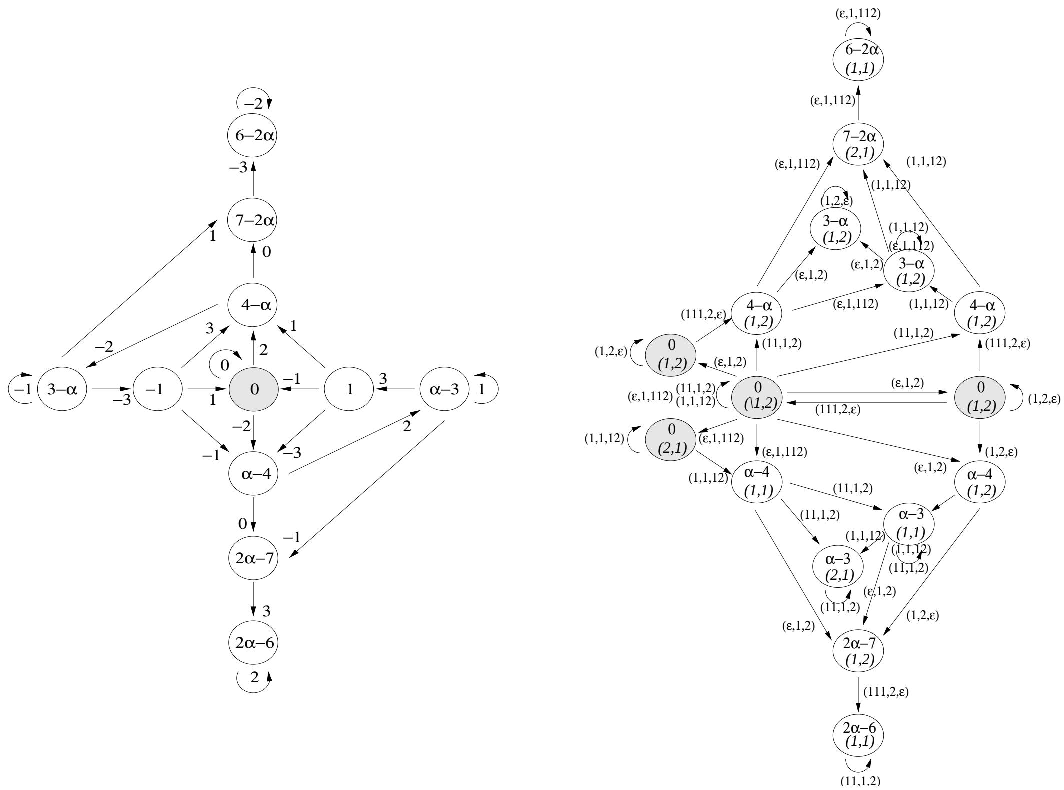

FIG. 7.3 – automates arithmétique et d'injectivité de σ_2

L'automate de connexité ne donne plus de critère de connexité, les travaux de V. Canterini étant basés sur la structure euclidienne de l'espace dans lequel sont représentées les substitutions unimodulaires.

Par contre, l'automate d'injectivité vérifie les mêmes propriétés que dans le cas unimodulaire : les résultats de la section 4.4 n'utilisent pas le caractère unimodulaire de la substitution mais simplement le théorème 4.2.1. On montre ainsi que l'automate d'injectivité mesure l'injectivité de la représentation globale au sens du théorème 4.4.1.

Théorème 7.3.2 *Il existe une condition nécessaire et suffisante explicite qui décide si la représentation globale F_{glob} d'une substitution de type Pisot est injective en mesure.*

Exemple 1. $\sigma_2(12) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$.

Les valeurs propres de la matrice de cette substitution sont toujours $\alpha_2 = 2+\sqrt{2}$ et $\rho_2 = 2-\sqrt{2}$. Un vecteur propre dominant de la matrice est $\mathbf{v}_\alpha = (1, 1/(\alpha-1))$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes (déjà donné à la figure 2.2) sont cette fois-ci ε, a, aa et aaa, ce qui implique que $\mathcal{C} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$.

L'automate arithmétique est alors un graphe à 11 sommets (figure 7.3). De manière semblable à la substitution de Fibonacci, les chemins partant de 0 y sont étiquetés par les suites c_n de $\mathcal{C}$ telles que $\sum_{i \geq O} c_i\, {\rho_2}^i = 0$.

L'automate d'injectivité a 16 états. Il est présenté à la figure 7.3. Il vérifie le critère d'injectivité : il est facile de vérifie qu'aucune arête ne rentre dans un sommets originaux. De plus, les boucles $(b \longrightarrow a)^N$ n'apparaissent que dans les sommets originaux dès que N est assez grand. On obtient ainsi :

Corollaire 7.3.2 *La représentation globale associée à la substitution définie par* $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$ *est injective en mesure.*

Exemple 2. $\sigma_7(1) = 11222$, $\sigma_7(1) = 1222$.

Les valeurs propres de la matrice de cette substitution sont toujours $\alpha_7 = 5/2 + \sqrt{13}/2$ et $\rho_7 = 5/2 - \sqrt{13}/2$. Un vecteur propre dominant de la matrice est $\mathbf{v}_\alpha = (1, (\alpha - 2)/3)$. Les préfixes apparaissant dans l'automate des préfixes-suffixes sont cette fois-ci ε, 1, 11, 112, 1122, 12 et 122. L'ensemble $\mathcal{C}$ contient 21 éléments. L'automate d'injectivité a 30 états et 102 sommets. Il vérifie le critère d'injectivité. On obtient ainsi :

Corollaire 7.3.3 *La représentation globale associée à substitution définie par* $\sigma_7(1) = 11222$, $\sigma_7(1) = 1222$ *est injective en mesure.*

Là encore, toutes les substitutions de type Pisot qui ont été testées vérifient le critère d'injectivité en mesure. En particulier, ce critère semble vérifié indépendamment du fait que les diviseurs premiers du déterminant de leur matrice d'incidence divisent les coefficients non dominants de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire du critère d'existence de facteurs p-adiques.

7.4 Étude des fibres de la représentation globale

On appelle *fibres d'une application* f définie sur un ensemble X les ensembles $f^{-1}(f(x))$ où $x \in X$. On rappelle que Γ désigne le développement en préfixes-suffixes.

Proposition 7.4.1 *Pour tout* $w \in \Omega$, *le cardinal de* $\Gamma({F_{glob}}^{-1}F_{glob}(w))$ *est égal au nombre de chemins différents de l'automate d'injectivité qui ont* $\Gamma(w)$ *pour étiquette.*

Preuve Selon la proposition 4.4.1, deux chemins de l'automate d'injectivité partant d'un sommet initial sont symétriques si et seulement s'ils sont les développements en préfixes-suffixes de deux points de Ω qui ont même représentation globale. Ainsi, pour tout $v \in \Omega$ tel que $F_{glob}(w) = F_{glob}(v)$, il existe un chemin de l'automate qui a $\Gamma(v)$ pour étiquette et dont le chemin symétrique admet $\Gamma(w)$ pour étiquette. De ce fait, $\Gamma({F_{glob}}^{-1}F_{glob}(w))$ est en bijection avec l'ensemble des chemins qui sont étiquetés par $\Gamma(w)$. ∎

On rappelle que Ω_{per} désigne l'ensemble des points périodiques de Ω et $\mathcal{D}_\varepsilon$ les développements en préfixes-suffixes des éléments de Ω appartenant à l'orbite de Ω_{per}.

Corollaire 7.4.1 *Soit* $w \in \Omega$ *tel que* $\Gamma(F_{glob}^{-1}F_{glob}(w))$ *est fini. Soit* C *le cardinal de la fibre selon* w *de la représentation globale. Alors*

$$C \leq card\left((\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon) \cap \Gamma\left({F_{glob}}^{-1}F_{glob}(w)\right)\right) + (card(\Omega_{per}))\left(card\left(\mathcal{D}_\varepsilon \cap \Gamma({F_{glob}}^{-1}F_{glob}(w))\right)\right).$$

Preuve Selon le chapitre 1, tout développement en préfixes-suffixes a au plus card(Ω_{per}) préimages dans Ω. ∎

De ce fait, l'étude de l'automate d'injectivité peut permettre d'étudier précisément le défaut d'injectivité de la représentation globale. On donne deux exemples d'une telle étude.

Exemple 1 : la substitution de Fibonacci. $\sigma_1(1) = 12$, $\sigma_1(2) = 1$.

On redonne l'automate d'injectivité de sa représentation globale à la figure 7.4. Les sommets sont numérotés de 1 à 8 pour faciliter la preuve de la proposition suivante.

Proposition 7.4.2 *La représentation de la substitution de Fibonacci est injective sauf sur l'orbite des points périodiques de la substitution, sur laquelle les fibres sont de cardinal au plus 2.*

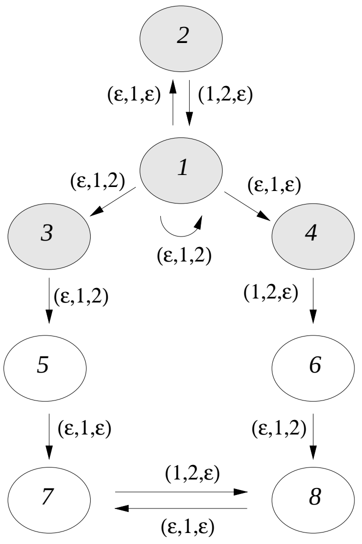

FIG. 7.4 – automate d'injectivité de la substitution de Fibonacci σ_1

Preuve Soient $e = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ l'étiquette identique de deux chemins de l'automate partant d'un sommet initial. Notons $X = (x_i)_{i\geq 0}$ et $Y = (y_i)_{i\geq 0}$ ces chemins, ou les x_i et y_i sont les numéros des sommets correspondants.

La structure de l'automate implique que le chemin doit passer par un des sommets 3 ou 4, et qu'après le passage par ce sommet, il est uniquement déterminé : un chemin passant par 3 est ensuite étiqueté $(\varepsilon,1,2)[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$ tandis que un chemin qui passe par 4 est ensuite étiqueté par $(1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,2)[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$.

Ainsi, en supprimant les débuts de X et Y qui sont égaux et initiaux, on se ramène au cas où $x_1 \neq y_1$, x_1 est un des sommets originaux 1 ou 2, et y_1 est le sommet initial non original correspondant (3 pour 1 et 4 pour 2).

Supposons que $x_1 = 1$ et $y_1 = 3$. On a alors $c = (\varepsilon,1,2)[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$ avec $Y = 3,5,[7,8]^\infty$. De ce fait, $x_2 \in 1,3$. Si $x_2 = 3$, on a $X = 1,3,5,[7,8]^\infty$ et son étiquette n'est pas égale à e. Ainsi, $x_2 = 1$ et $x_3 \in 2,4$. Si $x_3 = 4$, alors $X = 1,1,4,6,[8,7]^\infty$ et son étiquette est différente de e. Ainsi, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ et le chemin $(x_i)_{i\geq 4}$ a pour étiquette $[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$. En particulier, on ne pourra jamais avoir $x_i = 3$ puisque ce sommet est suivi de l'étiquette $(\varepsilon,1,2)(\varepsilon,1,\varepsilon)$, ou $x_i = 4$ puisque ce sommet est suivi de $(1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,2)$. Ainsi, $X = 1,[1,2]^\infty$ est uniquement déterminé.

Supposons que $x_1 = 2$ et $y_1 = 4$. On a alors $x_2 = 1$, $d = (1,2,\varepsilon)(\varepsilon,1,2)[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$ et $Y = 4,6,[8,7]^\infty$. Si $x_3 = 3$, alors $X = 2,1,3,5,[7,8]^\infty$ n'est pas étiqueté par e. De ce fait, $x_3 = 1$. La encore, le chemin $(x_i)_{i\geq 3}$ est étiqueté par $[(\varepsilon,1,\varepsilon),(1,2,\varepsilon)]^\infty$. Comme précédemment, on ne pourra jamais avoir $x_i = 3$ ou $x_i = 4$, et $X = 2,1,[1,2]^\infty$ est uniquement déterminé.

Ainsi, F_{glob} est injective sauf aux points dont le développement en préfixes-suffixes a pour fin $[(\varepsilon,1,\varepsilon),(a,b,\varepsilon)]^\infty$, c'est-à-dire des éléments de l'orbite négative des points périodiques de la substitution. Sur cette orbite négative, l'application Γ est injective puisque la substitution n'admet qu'un seul point fixe à droite. Les fibres sont donc de cardinal au plus 2. ∎

Ce résultat est déjà connu pour la substitution de Fibonacci dans le cadre de l'étude des suites sturmiennes. Le but de cette démonstration est d'illustrer la proposition 7.4.1 sur un exemple simple.

Exemple 2 : la substitution de Rauzy $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(b) = 12$.

Proposition 7.4.3 *Les fibres de la représentation globale de la substitution $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(1) = 12$ sont toutes de cardinal fini.*

Preuve. Cette preuve basée sur les mêmes idées que celles de la proposition 7.4.2, se trouve en Annexe A. ■

On voit avec ces deux exemples comment l'application pratique de la proposition 7.4.2 est restreinte par la complexité des automates considérés. Pour que cette proposition montre tout son intérêt, il faudrait définir un algorithme qui décide si, dans un automate, il existe une infinité de chemins infinis qui ont même étiquette.

7.5 Cas particulier des substitutions de longueur constante

Les substitutions primitive de longueur constante ne sont pas de type Pisot : elles ont pour valeur propre dominante la longueur de la substitution, et le polynôme caractéristique de leur matrice d'incidence est donc réductible sur $\mathbb{Q}$. Malgré tout, nous allons voir que, pour ces substitutions, la définition de la représentation globale trouve un sens et qu'on peut définir un automate d'injectivité.

On retrouve ainsi une partie des résultats déjà connus sur la représentation des systèmes substitutifs primitifs de longueur constante comme extension finie d'un odomètre.

Ainsi, le but de cette section n'est pas d'énoncer des résultats nouveaux, mais d'illustrer comment en un certain sens les idées et résultats intervenant de ce chapitre généralisent le cas bien connu des substitutions de longueur constante.

Soit σ une substitution primitive de longueur constante L. L'entier L est alors valeur propre de la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ de σ, et $\mathbf{v}_L = (1, \ldots, 1)$ est vecteur propre à gauche pour L.

Dans une optique de similarité avec le cas Pisot, on pourrait définir une représentation formelle dans "$\mathbb{Q}[L]$" du système symbolique en posant pour tout $w \in \Omega$ ayant $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ pour développement en préfixes-suffixes :

$$F(w) = \sum_{i \geq 0} < \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_L > L^i = \sum_{i \geq 0} |p_i| L^i = \sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)|.$$

Un topologie sur $\mathbb{Q}$ fait converger cette série si et seulement s'il s'agit d'une topologie p-adique, avec p premier qui divise L.

Définition 7.5.1 *Soit p un diviseur premier de la longueur L d'une substitution primitive de longueur constante. La* représentation p-adique *de la substitution est la fonction F_p à valeur dans $\mathbb{Z}_p$ définie par*

$$\forall w \in \Omega, \quad si\ \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \quad alors \quad F_p(w) = \sum_{i \geq 0} |\sigma^i(p_i)| \in \mathbb{Z}_p.$$

Proposition 7.5.1 *La représentation p-adique F_p est continue et réalise une semi-conjugaison entre le décalage S sur Ω et l'addition de 1 : $F_p \circ S = F_p + 1$.*

Preuve Soit $w \in \Omega$ avec $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$. Puisque $F_p(w) =< \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_L > L^i$, le vecteur $\mathbf{v}_L$ étant un vecteur propre à gauche pour $\mathbb{M}_\sigma$, on a $F_p(w) = \lim < \mathbf{l}(p_0\sigma(p_1) \ldots \sigma^i(p_i)), \mathbf{v}_L >$. On peut ainsi reprendre une preuve du type de celle de la proposition 3.1.1 et utiliser la propriété 2.4.1 pour conclure que $F_p(Sw) = F_p(w)+ < \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_L >$. Or, pour les substitutions de longueur constante, on a toujours $< \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_L >= 1$ indépendamment de w_0. ■

On rappelle que $\mathbb{Z}_L$ désigne le produit direct des $\mathbb{Z}_p$ pour tous les diviseurs premiers p de L.

Si $L = \prod i = 1^k {p_i}^{n_i}$, on appelle *représentation globale* de la substitution l'application F_{glob} : $\Omega \mapsto \mathbb{Z}_L$ définie par $F_{glob} = (F_{p_1}, \dots F_{p_k})$.

On retrouve ainsi la partie adique du facteur équicontinu maximal du système substitutif (voir [20]) :

Corollaire 7.5.1 *Le système substitutif associé à une substitution primitive de longueur constante L admet pour facteur topologique l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_L$.*

De plus, on peut étudier l'injectivité de cette représentation comme dans le cas Pisot.

Définition 7.5.2 *Soit σ une substitution de longueur constante. On appelle automate arithmétique associé à la substitution la composante de 0 dans le graphe suivant :*

- *L'ensemble des étiquettes est $\mathcal{C} = \{-(L-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (L-1)\}$.*
- *Un rationnel q est un état de l'automate si et seulement $q = 1/L^n \sum_{i=1}^{n-1} c_i L^i$, où $c_i \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum_i c_i L^i$ converge vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L.*
- *Un entier c étiquette une arête de q_1 vers q_2 si et seulement s'il existe une suite$c_i \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_i c_i L^i$ converge vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L, qui vérifie : $c = c_n$, $q_1 = 1/L^n \sum_{i=1}^{n-1} c_i L^i$ et $q_2 = 1/L^{n+1} \sum_{i=1}^{n} c_i L^i$.*

Théorème 7.5.1 *L'automate arithmétique associé à une substitution primitive de longueur constante a un nombre fini d'états. Les étiquettes des chemins infinis partant de 0 y sont exactement les suites $\mathcal{C} = \{-(L-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (L-1)\}$ telles que $\sum_i c_i L^i$ vers 0 dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p premier qui divise L.*

Preuve La preuve est identique à celle du théorème 7.3.1 : on prouve que les valeurs absolues p-adiques des états de l'automate sont toutes bornées. Ainsi, il existe un entier A tel que Aq est un entier algébrique pour tout état q tout graphe. de même que leur valeur absolue usuelle. Or, puisque $L > 1$, la valeur absolue usuelle des sommets du graphe est bornée. Ces sommets sont donc en nombre fini. La preuve du lemme 7.3.2 est encore valable pour les substitutions de longueurs constantes. ■

A partir de cet automate, on définit un *automate d'injectivité* pour les substitutions de longueur constante d'une manière identique au cas Pisot. Les propriétés de cet automate sont identiques :

Proposition 7.5.2 *Les étiquettes des chemins non symétriques de l'automate d'injectivité sont exactement les développement en préfixes-suffixes des points de Ω pour lesquels la représentation globale F_{glob} est non injective.*

Corollaire 7.5.2 *Il existe une condition nécessaire et suffisante vérifiable algorithmiquement qui décide si un système substitutif primitif de longueur constante est isomorphe en mesure à l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_L$.*

La condition de coïncidence caractérise les substitutions de longueur constante isomorphes à leur facteur équicontinu maximal, de la forme $\mathbb{Z}_L \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi, pour les substitutions de longueur constante, toute substitution qui vérifie la condition nécessaire et suffisante provenant de l'automate d'injectivité vérifie aussi la condition de coïncidences.

L'étude des fibres de la représentation permet d'étudier plus précisement la relation entre un système substitutif primitif de longueur constante et son facteur p-adique. Par exemple, pour la substitution de Morse définie par $\sigma(1) = 12$ et $\sigma(2) = 21$, l'automate d'injectivité est constitué d'une copie de l'automate des préfixes-suffixes (qui forment les sommets originaux) et d'une autre copie de cet automate, non reliée aux sommets originaux, et constituée de sommets initiaux. On retrouve ainsi que les fibres de la représentation globale de la substitution de Morse contiennent toujours un point et son symétrique, c'est-à-dire le mot dans lequel les 1 ont été remplacés par des 2 et les 2 par des 1.

7.6 Injectivité de la représentation sur un groupe compact

On peut selon des méthodes semblables à celles du chapitre 4 définir des automates de $\mathcal{U}$-injectivité, et donc définir un critère qui décide si l'ensemble des points suivants est de mesure nulle :

$$\left\{ w \in \Omega;\ \exists w' \in \Omega,\ \exists\, n_1, \dots n_{d-1} \in \mathbb{Z},\ F_{glob}(w) - F_{glob}(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta_i - \delta_d) \right\}.$$

Ceci est équivalent au fait que $\varphi(w) - \varphi(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta(i) - \delta(d))$ d'une part et d'autre part $F_p(w) - F_p(w') = \sum_{i=1}^{d-1} n_i(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_1)$ pour tout diviseur p premier du déterminant de $\mathbf{M}_\sigma$.

Si une substitution de type Pisot est telle que tous les diviseurs premiers $p_1 \dots p_k$ du déterminant de $\mathbf{M}_\sigma$ divisent aussi les coefficients non dominants de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$, par exemple la substitution σ_2, on a défini au chapitre précédent une représentation du système substitution par une translation sur le groupe compact $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$. De plus, selon les propositions 6.2.2 et 6.3.2, cette représentation est égale à $(\varphi_{\mathcal{L}}, J_{\hat{\beta}_1}(F_{p_1}), \dots, J_{\hat{\beta}_1}(F_{p_k}))$. En particulier, cette représentation prend la même valeur en deux points $w, w' \in \Omega$ si et seulement si :

$$\exists\, n_1, \dots n_{d-1} \in \mathbb{Z}; \qquad \varphi(w) - \varphi(w') = \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} n_i(\delta(i) - \delta(d))$$

$$\forall\, p \text{ diviseur premier de } \det \mathbf{M}_\sigma,\quad \exists\, n_{p,1}, \dots n_{p,d-1} \in \mathbb{Z}_p;\quad F_p(w) - F_p(w') = \textstyle\sum_{i=1}^{d-1} n_{p,i}(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_1). \tag{7.5}$$

Les automates de $\mathcal{U}$-injectivité ne caractérisent qu'une partie des points w pour lesquels un autre point w' vérifie ces relations, il s'agit des couples (w, w') pour lesquels on a

$$\forall\, p \text{ diviseur premier de } \det \mathbf{M}_\sigma;\ \forall\, i = 1, \dots, d-1;\ \ n_{p,i} = n_i.$$

Ainsi, les techniques arithmétiques du chapitre 4 ne laissent pas assez de liberté aux entiers considérés. De plus, ces techniques ne semblent pas permettre simplement de prendre en compte des entiers p-adiques $n_{p,i}$ plutôt que des nombres relatifs classiques.

Le problème fondamental est en fait posé par le fait qu'un nombre infini de translatés de $\mathbb{Z}_p$ par un vecteur fixé de $\mathbb{Q}_p$ rencontre $\mathbf{Z}_p$, contrairement à un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, où seuls un nombre fini de translatés de $[0,1]^n$, l'équivalent euclidien de $\mathbb{Z}_p$, par un vecteur donné rencontrent $[0,1]^n$.

En fait, alors que $\mathbb{R}^{d-1}$ a été quotienté par un réseau pour obtenir le tore, ce passage au quotient s'exprimant directement en termes de graphes, les parties arithmétiques ${\mathbb{Q}_p}^{d-1}$ ont de leur côté été quotientées par un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, et il devient difficile d'exprimer le défaut d'injectivité de ce passage au quotient en termes de graphes.

On pourrait malgré tout imaginer que la structure très particulière des substitutions de type Pisot implique que seuls un nombre fini d'entiers $n_{p,i}$ peuvent intervenir dans les formules (7.5). Dans ce cas, le critère d'injectivité torique du chapitre 4 serait encore applicable aux substitutions de type Pisot non unimodulaires, et permettrait de caractériser les systèmes substitutifs de type Pisot qui sont une extension finie d'une rotation sur un groupe compact.

Une raison précise laisse penser que ceci n'est en fait pas vrai. En effet, pour la substitution σ_2, on obtient une réponse positive à la programmation du critère d'injectivité torique du chapitre 4 adapté au cas non unimodulaire (Annexe B). Le système substitutif associé serait ainsi isomorphe à une translation minimale sur $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$. Or, cette translation s'obtient comme la projection de la représentation globale dont l'image est présentée à la figure 7.1, sur simplement deux coordonnées. Si cette image est bien comme on le conjecture de mesure non nulle, il semble alors difficile qu'elle se projette de manière injective dans le plan $y = 0$.

Ceci semble être en contradiction avec le cas des substitutions de longueur constante, qui bien que non unimodulaires, sont isomorphes à une extension finie d'une translation p-adique.

En fait, la section 7.5 montre que ces propriétés des substitutions de longueur constante sont à mettre plutôt dans la catégories des résultats sur l'injectivité de la représentation globale que dans ceux sur l'injectivité de la représentation sur un groupe compact. Plus précisément, lorsque la substitution est de longueur constante, on assiste à un phénomène très particulier : la représentation sur un groupe compact est égale à la représentation globale, et n'est pas une projection de cette représentation globale sur un quotient. Les propriétés d'injectivité de la représentation globale se transportent donc directement sur la représentation sur un groupe compact.

Si la substitution est de longueur non constante, alors cette situation semble ne plus se reproduire, et le problème de l'injectivité de la représentation sur un groupe compact devient distinct de l'injectivité de la représentation globale. Cette distinction ne se produit cependant pas pour les substitutions de type Pisot, unimodulaires sur 2 lettres : B. Host a montré que pour de telles substitutions, l'injectivité de la représentation torique est équivalente à l'injectivité sur la représentation géométrique [46].

Ceci ne remet pas en cause l'obtention éventuelle de partition de Markov pour les endomorphismes du tore de type Pisot. En effet, étant donné une substitution de type Pisot et non unimodulaire, si la représentation globale associée est injective en mesure, alors le système substitutif est isomorphe à un échange de morceaux dans un sous-ensemble auto-similaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ croisé avec des extensions finies de corps p-adiques. On peut relever ce sous-ensemble dans $\mathbb{R}^d$ croisé avec les mêmes extensions finies de corps p-adiques en rajoutant une hauteur comme cela a été fait dans le cas unimodulaire au chapitre 5. Un résultat sur la mesure de l'espace obtenu, similaire à celui de la conjecture 7.2.1, permettrait alors de définir une partition du sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ croisé avec les extensions p-adiques, qui serait décrite par le système dynamique symbolique de type fini $\widetilde{\mathcal{D}}$, la projection dans le tore $\mathbb{T}^d$ réalisant une semi-conjugaison entre le décalage et l'endomorphisme associé à la matrice de la substitution.

Annexe A

Exemple de représentation à fibres finies

Dans cette annexe, nous donnons une preuve de la proposition 7.4.3, c'est-à-dire:

Proposition 7.4.3 *Les fibres de la représentation globale de la substitution* $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(1) = 12$ *sont toutes de cardinal fini*

Selon le chapitre 7, cette proposition est équivalente au fait qu'il n'existe pas une infinité de chemin de l'automate d'injectivité associé à σ_2 qui sont étiquetés de la même manière. Si ceci était vrai, il existerait au moins un sommet de cet automate qui serait le départ d'une infinité de chemins distincts ayant même étiquette. Nous allons montrer que ceci est impossible, en prouvant qu'il n'existe pas de triplet de sommets $(\mathbf{\xi_1}, \mathbf{\xi_2}, \mathbf{\xi_3})$ pour lesquels il existe une infinité de chemins qui

1. partent de $bf\xi_1$,
2. ont même étiquette,
3. l'un d'entre eux au moins emprunte l'arête $\mathbf{\xi_1} \to \mathbf{\xi_2}$,
4. l'un d'entre eux au moins emprunte l'arête $\mathbf{\xi_1} \to \mathbf{\xi_3}$.

Un triplet de sommets qui vérifient ces conditions est dit *admissible*.

On redonne à la figure A.1 l'automate d'injectivité de σ, les sommets étant numérotés de 1 à 16 plutôt que désignés par leur nom.

Triplets de sommets vérifiant les conditions 1) et 2). En considérant l'automate d'injectivité de σ_2, on obtient la liste suivante:
- $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{10})$, $(\mathbf{1}, 1, \mathbf{11})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{12})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{12})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{11})$,
- $(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$, $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{12})$,
- $(\mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$, $(\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$, $(\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$,
- $(\mathbf{10}, \mathbf{10}, \mathbf{11})$,
- $(\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{14})$, $(\mathbf{13}, \mathbf{13}, \mathbf{14})$.

Les triplets $(\mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$, $(\mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$ et $(\mathbf{6}, \mathbf{6}, \mathbf{8})$ ne sont pas admissibles.
Preuve Il n'existe qu'un seul chemin qui part du sommet $\mathbf{8}$: il s'agit du chemin $\mathbf{8} - \mathbf{9}^\infty$, dont l'étiquette est $(\varepsilon, 1, 112)^\infty$. Mais du sommet $\mathbf{6}$ ne part qu'un seul chemin qui admet une telle étiquette : le chemin $\mathbf{6}^\infty$. ■

Les triplets $(\mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{14})$ et $(\mathbf{13}, \mathbf{13}, \mathbf{14})$ ne sont pas admissibles.

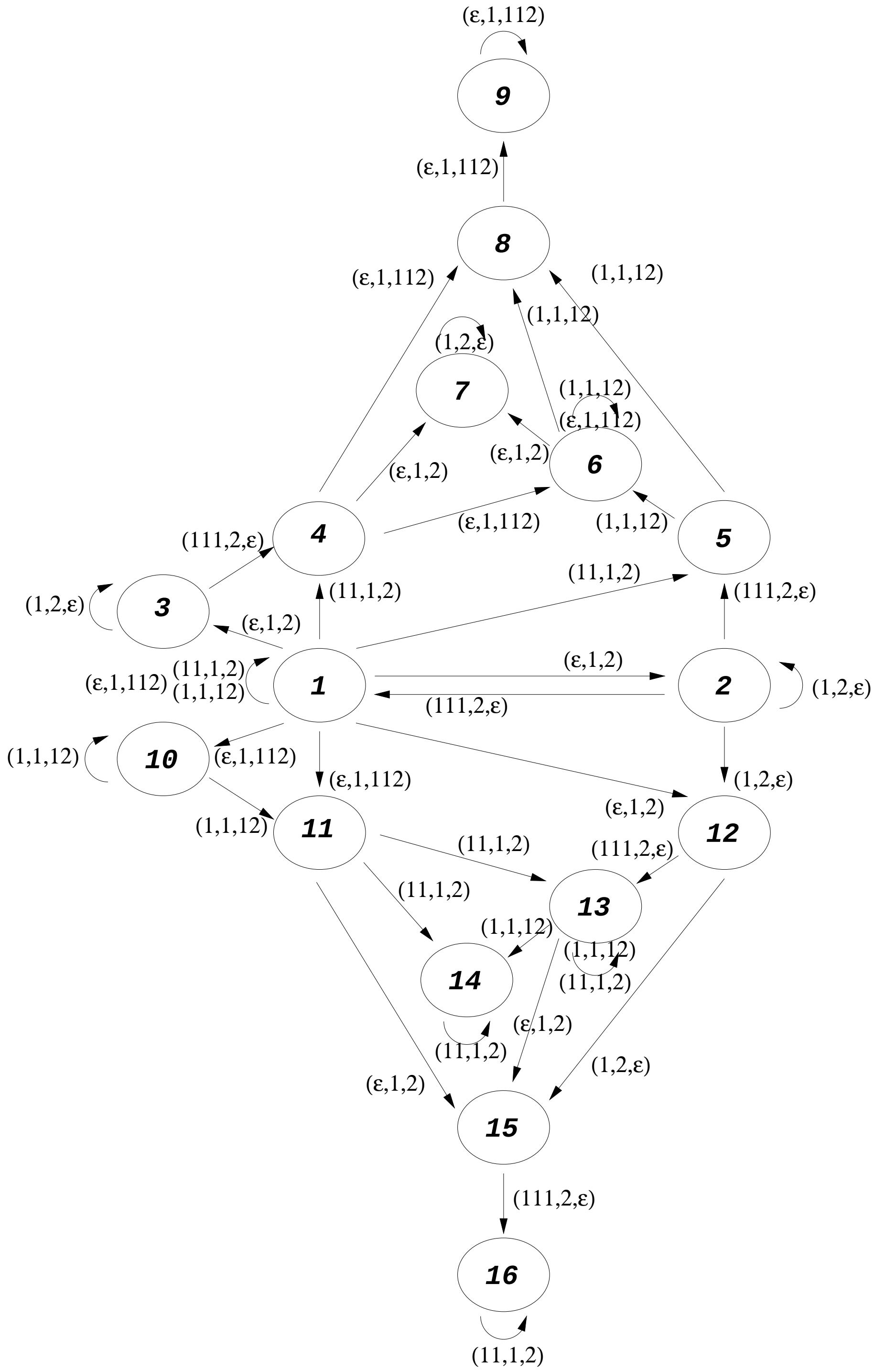

Fig. A.1 – automate d'injectivité de σ_2

Preuve Il n'existe qu'un seul chemin qui part du sommet $\mathbf{14}$: il s'agit du chemin $\mathbf{1}-\mathbf{4}^\infty$, dont l'étiquette est $(\mathbf{11},\mathbf{1},\mathbf{2})^\infty$. Mais du sommet $\mathbf{13}$ ne part qu'un seul chemin qui admet une telle étiquette : le chemin $\mathbf{1}-\mathbf{3}^\infty$. ∎

Les triplets $(\mathbf{1},\mathbf{10},\mathbf{11})$ et $(\mathbf{10},\mathbf{10},\mathbf{11})$ ne sont pas admissibles.

Preuve Tout chemin qui part du sommet $\mathbf{11}$ lit soit l'étiquette $(\varepsilon,1,2)$, soit l'étiquette $(11,1,2)$, tandis que tout chemin qui part du sommet $\mathbf{10}$ lit l'étiquette $(1,1,12)$. ∎

Le triplet $(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{5})$ n'est pas admissible.

Preuve Les chemins qui partent du sommet $\mathbf{5}$ vont soit en $\mathbf{6}$ soit en $\mathbf{8}$, en lisant l'étiquette $(1,1,12)$.

Le seul chemin qui va en $\mathbf{5}$ puis $\mathbf{8}$ est le chemin $\mathbf{5}-\mathbf{8}-\mathbf{9}^\infty$, dont l'étiquette est $(1,1,12)\,(\varepsilon,1,112)^\infty$.

Un chemin qui part du sommet $\mathbf{1}$ avec cette étiquette passe par $\mathbf{1}$ puis va en $\mathbf{1}$, $\mathbf{10}$ ou $\mathbf{11}$. Mais de $\mathbf{10}$ et $\mathbf{11}$ ne part aucune arête dont l'étiquette est $(\varepsilon,1,112)$. Ainsi, le seul chemin partant de $\mathbf{1}$ avec l'étiquette $(1,1,12)\,(\varepsilon,1,112)^\infty$ est le chemin 1^∞.

De même, il n'existe qu'un seul chemin qui part de $\mathbf{5}$, puis va en $\mathbf{6}$, et dont l'étiquette est $(1,1,12)\,(\varepsilon,1,112)^\infty$: il s'agit du chemin $\mathbf{5}-\mathbf{6}^\infty$.

Ainsi, il n'existe qu'un nombre fini de chemin qui partent de $\mathbf{2}$ et sont étiquetés par $(111,1,\varepsilon)\,(1,1,12)\,(\varepsilon,1,112)^\infty$.

Si maintenant un chemin part de $\mathbf{2}$, passe par $\mathbf{5}$ puis va en $\mathbf{6}$, il peut ensuite aller en $\mathbf{6}$, $\mathbf{7}$, ou $\mathbf{8}$. S'il va en $\mathbf{7}$, le chemin boucle alors sur $\mathbf{7}$, et l'étiquette reconnue est $(111,1,\varepsilon)\,(1,1,12)\,(\varepsilon,1,2)\,(1,2,\varepsilon)^\infty$. Seul un chemin commence par $\mathbf{2}-\mathbf{5}-\mathbf{6}$ et admet une telle étiquette.

De même, les seuls chemins commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{1}$ avec cette étiquette débutent par $\mathbf{2}-\mathbf{1}-\mathbf{3}$ ou $\mathbf{2}-\mathbf{1}-\mathbf{12}-\mathbf{15}$. De $\mathbf{3}$ ne part qu'un chemin étiqueté par $(1,2,\varepsilon)^\infty$. De $\mathbf{15}$ ne part aucun chemin avec cette étiquette. Ainsi, il n'existe que 2 chemins qui partent de $\mathbf{2}$ et sont étiquetés par $(111,1,\varepsilon)\,(1,1,12)\,(\varepsilon,1,2)\,(1,2,\varepsilon)^\infty$.

Il reste à considérer les chemins qui commencent par $\mathbf{2}-\mathbf{5}-\mathbf{6}$ et ne passent jamais par $\mathbf{7}$. Si un tel chemin ne boucle pas sur $\mathbf{6}$, il passe par $\mathbf{8}$ à un moment puis boucle sur $\mathbf{9}$. Ainsi, l'étiquette de ce chemin commence par $(111,1,\varepsilon)\,(1,1,12)$, lit k fois les étiquettes $(1,1,12)$ ou $(\varepsilon,1,112)$ puis finit sur $(1,1,12)\,(\varepsilon,1,112)^\infty$.

Il n'existe que deux manières de lire cette étiquette en commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{5}-\mathbf{6}$: en bouclant sur $\mathbf{6}$, ou en passant par $\mathbf{8}$, l'arête $\mathbf{6}-\mathbf{8}$ déterminant le dernier $(1,1,12)$ lu.

Commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{1}$, un chemin avec une telle étiquette passe par $\mathbf{1}$, puis boucle automatiquement sur $\mathbf{1}$: si ce n'était pas le cas, le seul chemin passerait par $\mathbf{10}$ ou $\mathbf{11}$, et il est impossible, à partir de ces sommets, de lire un chemin infini dont les seules étiquettes sont $(1,1,12)$ et $(\varepsilon,1,112)$. ∎

Les triplets $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{12})$ et $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{12})$ n'est pas admissible.

Preuve On donne la preuve pour le triplet $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{12})$, celle pour $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{12})$ étant identique.

Un chemin qui part de $\mathbf{2}$ puis va en $\mathbf{12}$ peut ensuite aller soit en $\mathbf{13}$, soit en $\mathbf{15}$.

Si ce chemin va en $\mathbf{15}$, il s'agit alors du chemin $\mathbf{2}-\mathbf{12}-\mathbf{15}-\mathbf{16}^\infty$, dont l'étiquette est $(1,2,\varepsilon)\,(1,2,\varepsilon)\,(111,2,\varepsilon)\,(11,1,2)^\infty$. Un chemin avec une telle étiquette commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{2}$ peut alors :

- aller en $\mathbf{12}$. Le chemin doit ensuite passer par $\mathbf{13}$ puis boucler sur $\mathbf{13}$. Il n'y en a donc qu'un seul qui commence par $\mathbf{2}-\mathbf{2}-\mathbf{12}$.
- aller en $\mathbf{2}$ puis en $\mathbf{5}$. Il est alors impossible de lire l'étiquette $(\mathbf{11},\mathbf{1},\mathbf{2})$.

– aller en **2**, puis en **1**. Le chemin peut alors boucler un certain temps sur le sommet **1**, et partir éventuellement sur les sommets **4** ou **5**. Mais de **4** et **5** il est impossible de lire l'étiquette $(11, 1, 2)$. Ainsi, seul le chemin $\mathbf{2}-\mathbf{2}-\mathbf{1}-\mathbf{1}^{\infty}$ a l'étiquette voulue et commence par $\mathbf{2}-\mathbf{2}-\mathbf{1}$.

Ainsi, il n'existe qu'un nombre fini de chemins qui partent de **2** en lisant les étiquettes $(1, 2, \varepsilon)\,(1, 2, \varepsilon)\,(111, 2, \varepsilon)$.

Si le triplet $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{12})$ est admissible, il faut donc qu'il existe une infinité de chemins ayant même étiquette, certains commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{2}$, d'autres par $\mathbf{2}-\mathbf{12}-\mathbf{13}$, c'est-à-dire que tous doivent d'abord lire les étiquettes $(1, 2, \varepsilon)\,(111, 2, \varepsilon)$. Un chemin qui passe par $\mathbf{2}-\mathbf{2}$ peut ainsi aller en **5** ou en **1**.

S'il va en **5**, le chemin va à terme boucler sur un des trois sommets **6**, **7** ou **9**. Or, aucun chemins passant par **13** ne peut à terme boucler en lisant les étiquettes $(1, 2, \varepsilon)^{infty}$ ou $(\varepsilon, 1, 112)^{infty}$. Le chemin commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{2}-\mathbf{5}$ va donc boucler sur le sommet **6**, lisant successivement des étiquettes parmi $(1, 1, 12)$ et $(\varepsilon, 1, 112)$. Un autre chemin lisant une étiquette de ce type mais en ayant débuté par les sommets $\mathbf{2}-\mathbf{12}-\mathbf{13}$ est alors forcé de boucler sur le sommet **13**, en lisant $(1, 1, 12)^{\infty}$.

Ainsi, si le le triplet $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{12})$ est admissible, il existe une infinité de chemins ayant la même étiquette, certains commençant par $\mathbf{2}-\mathbf{2}-\mathbf{1}$, d'autres par $\mathbf{2}-\mathbf{12}-\mathbf{13}$. Un chemin qui commence par $\mathbf{2}-\mathbf{12}-\mathbf{13}$ boucle finalement sur **13**, **14** ou **15**.

Si le chemin boucle sur **13**, il n'a pu lire avant cette boucle que les arêtes $(1, 1, 12)$ et $(11, 1, 2)$. Seuls deux chemins partant de **1** lisent un tel chemin : les chemins $\mathbf{1}^{\infty}$ et $\mathbf{1}^{k}-\mathbf{5}-\mathbf{6}^{\infty}$.

Si le chemin boucle sur **13**, il lit l'étiquette $(11, 1, 2)^{\infty}$, et le seul chemin qui part de **1** en lisant cette étiquette est $\mathbf{1}^{\infty}$.

Enfin, si le chemin passe un temps fini en **13** puis part sur le sommet **15**, il lit finalement l'étiquette $(\varepsilon, 1, 2)\,(111, 2, \varepsilon)\,(11, 1, 2)^{\infty}$. Pour qu'un chemin passant par **1** reconnaisse finalement la boucle $(11, 1, 2)^{\infty}$, il faut soit que ce chemin boucle finalement sur **1**, soit à un moment qu'il passe par **11** ou **12**. Pour aller de **1** à **11**, il faut lire l'étiquette $(\varepsilon, 1, 112)$, qui n'est jamais lue par les chemins passant par **13**. A partir de **12**, le chemin est forcé d'aller en **13**, sans quoi il lirait l'étiquette $(1, 2, \varepsilon)$. Le chemin vient ainsi de lire $(111, 2, \varepsilon)$ pour passer de **12** à **13**, et doit alors boucler sur **13**, sans quoi il lirait une seconde fois $(111, 2, \varepsilon)$, ce qui n'est pas autorisé. ∎

Le triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5})$ n'est pas admissible.

Preuve Les étiquettes qui partent de **4** sont $(\varepsilon, 1, 2)$ et $(\varepsilon, 1, 112)$, tandis que la seule étiquette qui part de **5** est $(1, 1, 12)$. ∎

Le triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ n'est pas admissible.

Preuve A partir de **5**, les seules étiquettes qui sont reconnues sont $(1, 1, 12)$ et $(\varepsilon, 1, 112)$. Il est impossible de quitter **1** en ne lisant que ces deux étiquettes. ∎

Le triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$ n'est pas admissible.

Preuve Un chemin partant de **4** peut

– lire $(\varepsilon, 1, 2)$ puis boucler sur **7**, en lisant $(1, 2, \varepsilon)^{\infty}$. Il n'y a que deux chemins partant de **4** qui reconnaissent une telle étiquette : $\mathbf{1}-\mathbf{3}^{\infty}$ et $\mathbf{1}-\mathbf{2}^{\infty}$.
– lire $(\varepsilon, 1, 112)$, puis un certain nombre (éventuellement nul) de $(1, 1, 12)$ et $(\varepsilon, 1, 112)$, puis boucler sur $(\varepsilon, 1, 112)^{\infty}$. Or, partir de **1** en lisant $(\varepsilon, 1, 112)$ signifie aller en **10** ou **11**, sommets desquels il est impossible de finir par boucler sur $(\varepsilon, 1, 112)$, ou rester en **1**, mais alors il est impossible de quitter **1** vers une boucle $(\varepsilon, 1, 112)^{\infty}$ sans lire $(11, 1, 2)$ ou $(111, 2, \varepsilon)$.

∎

Le triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{12})$ n'est pas admissible.

Preuve Tout chemin qui passe par $\mathbf{12}$, après un temps fini, ne lit plus que les étiquettes $(1,1,12)$ et $(11,1,2)$. Les chemins partant de $\mathbf{3}$ et lisant une étiquette de ce type sont de la forme $\mathbf{3}^k - \mathbf{4} - \mathbf{6}^\infty$. Un tel chemin lit exactement une fois l'étiquette $(111,2,\varepsilon)$, il n'en existe donc qu'un seul qui part de $\mathbf{12}$ avec la même étiquette. ■

Le triplet $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ n'est pas admissible.

Preuve S'il existe une infinité de chemins avec la même étiquette qui partent de $\mathbf{1}$, certains passant par $\mathbf{2}$, les autres par $\mathbf{3}$, l'étiquette du chemin ne peut être $(1,2,\varepsilon)^\infty$, puisque seuls $\mathbf{1} - \mathbf{3}^\infty$ et $\mathbf{1} - \mathbf{2}^\infty$ partent de $\mathbf{1}$ avec cette étiquette.

Ainsi, si $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ est admissible

- soit il existe au moins deux chemins avec la même étiquette, l'un passant par $\mathbf{4}$ et l'autre par $\mathbf{5}$, ce qui est impossible : les chemins passant par $\mathbf{5}$ lisent $(1,1,12)$ avant de lire $(\varepsilon,1,112)$ pour la première fois, tandis que les chemin passant par $\mathbf{4}$ lisent $(111,2,\varepsilon)$ ou $(11,1,2)$ avant de lire $(\varepsilon,1,112)$.
- soit $(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{12})$ est admissible, et on a déjà vu que ce n'est pas le cas.

■

Le triplet $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{11})$ n'est pas admissible.

Preuve Les chemins partant de $\mathbf{1},\mathbf{11})$ lisent exactement une fois $(\varepsilon,1,112)$, au plus une fois $(\varepsilon,1,2)$ et $(111,2,\varepsilon)$, et ne lise à part ça que $(1,1,12)$ ou $(11,1,2)$. Commençant par $\mathbf{1},\mathbf{1})$, les chemins qui vérifient ce chemins sont

- $\mathbf{1}^\infty$,
- $\mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1}^k - \mathbf{2} - \mathbf{5} - \mathbf{6}^\infty$,
- $\mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{1}^k - \mathbf{5} - \mathbf{6}^\infty$,
- $\mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{12} - \mathbf{13}^\infty$,
- $\mathbf{1} - \mathbf{1} - \mathbf{12} - \mathbf{13}^k - \mathbf{14}^\infty$.

Pour chacun de ces chemins, il n'en existe qu'un nombre fini qui ont la même étiquette. ■

Le triplet $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{10})$ n'est pas admissible.

Preuve Si ce triplet est admissible, il existe une infinité de chemins avec la même étiquette, les uns passant par $\mathbf{1} - \mathbf{1}$, les autres par $\mathbf{1} - \mathbf{10} - \mathbf{11}$. On en déduit que alors $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{11})$ est un triplet admissible, ce qui est impossible. ■

Annexe B

Vérification algorithmique du critère d'injectivité

Dans cette annexe nous donnons le programmequi décide de l'injectivité en mesure de la représentation globale d'une substitution, et, dans le cas unimodulaire, de l'injectivité de la représentation de la substitution par une translation sur un tore. Avec ce programme, on construit les automates définis au chapitre 4 et leur généralisation au cas non unitaire exposée au chapitre 7. Puis on vérifie ensuite le critère d'injectivité faisant intervenir ces automates.

L'implémentation été faite dans le langage *mupad*.

Les procédures qui apparaissent dans ce programme sont les suivantes :

genere_matrice:=proc(S,d) Calcule la matrice de la substitution.

est_positive:=proc(m :MAT,d) Vérifie que tous les coefficients sont positifs.

est_primitive:=proc(m :MAT,d) Vérifie que la matrice est primitive.

est_Pisot:=proc(m :MAT,d,vp) Vérifie que la matrice est Pisot. vp est la matrice des vecteurs propres donnés par *mupad*.

indice_Pisot:=proc(vp) Donne l'indice de la valeur propre Pisot.

est_admissible:=proc(m :MAT,d,v) Vérifie que la matrice a toutes les propriétés voulues.

alpha:=proc(d,vpa) Donne la liste des valeurs propres sans répétitions. Celle d'indice 0 est la valeur propre Pisot, elle est suivi des réelles et des complexes sans les conjuguées. Des problèmes sont posés par la vérification d'égalités numériques.

entier:=proc(Y,d,alpha) Décide si un nombre algébrique est un entier algébrique, en calculant ses fonctions symétriques élementaires.

chiffres:=proc(m:MAT,d) Donne le vecteur de translation formel. Le premier coefficient est 1.

delta:=proc(p,delt) Donne le poids δ du prefixe p.

mat_auto_chiffres:=proc(m,d,vpa) Calcule la matrice de l'automate des suffixes en remplaçant un préfixe par son poids formel. On verifie aussi que la substitution est de type Pisot. m[i,j] est l'ensemble des aretes de i vers j.

sominit:=proc(matott,d) Est utilisée dans la procédure ssgraphe. Donne une liste initialisée d'arêtes.

auto_produit:=proc(S,d,m,matott) Automate carré de l'automate des chiffres formels. Le coefficient prod[a,b,c,d] est l'étiquette de l'arête qui part de [a,b] et va vers [c,d], c'est-à-dire les differences de [b,d] et [a,c].

mat_auto_produit:=proc(prod,d) Matrice de l'automate produit.

etiquettes :=proc(m,d,matott,K) Liste des étiquettes formelles du graphe arithmétique. La taille maximale est fixée a 30. Cette liste est antisymetrique par rapport au centre.

difer:=proc(m,matott,Y,i,j,i1,j1) Donne la liste des couples de poids de prefixes allant du sommet (i,j) vers le sommet (i1,j1) dont Y est la difference, dans l'automate produit.

bornes:=proc(etiq,alpha) Calcule la borne associée a chaque valeur propre.

bornestore:proc(sup2,alph,born,W) Borne associee a chaque valeur propre pour le poids W fixé. sup2 décide si la vp Pisot est plus grande que 2.

borne_ari:=proc(d,etiq,vp) Plus petit entier qui multiplie par les etiquettes donne des entiers algébriques.

borne_aritore:proc(d,vp,born_ari,W) Entier qui est la borne arithmétique correspondant aux etiquettes et au poids W

reseau:=proc(m,d,alph,born) Calcule des bornes entre lesquelles tester l'automate arithmétique. On obtient un tableau 1..d-1 d'entiers indicé de 1 à $d-1$.

sommets:=proc(gra,alph,etiq,born,born_ari,K,unit,rangi,rangj) Construit une liste grossière de sommets de l'automate arithmétique. Le sommet initial est le premier sur la liste. C'est une procédure r'ecursive. born et born_ari dependent du sommet initial.

graphe_ari:proc(W,S,d,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su) Construit le graphe arithmétique associé au poids de départ W. Pour celà, reparcourt la liste des sommets et élimine ceux qui ne sont pas atteints ou ne sont pas sur un chemin infini. La ligne 0 et la colonne 0 reprennent les valeurs des sommets. Ecrit à l'écran le nombre de sommets finaux.

atteint_ari:=proc(tail,graphe,mauv,i,att) Procédure recursive qui lit dans le graphe précédent les sommets atteints à partir de 0.

atteint:=proc(d,tgra,inter,mauv,i,j,k,att) Procédure récursive qui lit dans le graphe suivant les sommets atteints à partir de 0.

auto_inter:=proc(S,d,prod,gra) Procédure très longue en pratique qui fait l'intersection des automates produit et arithmétique. Puis les parcourt pour supprimer les sommets non atteints ou qui ne sont pas sur un chemin infini. En plus de la nouvelle liste de sommets qu'on affiche, on ressort le tableau de l'automate avec en ligne et colonne 0 la liste des sommets.

auto_proj:proc(m,matott,gra_int) Donne l'automate d'injectivité. En précisant si les sommets sont sommets originaux ou initiaux.

sousgraphe:=proc(d,auto,nvsminit,m) Calcule si un graphe donné sous le format de auto est strict ou non.

sousgraphe_0:=proc(d,auto,nvsminit,m) Regarde si la représentation dans l'espace est injective en vérifiant qu'il n'y a pas d'arêtes entrant dans l'automate des préfixes-suffixes et ensuite en regardant si le graphe privé de l'automate des prefixes-suffixes est strict.

tore:=proc(d,constan,chif,S,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su) Procedure qui calcule tous les graphes d'injectivité entre les bornes du réseau et décide si ces graphes sont stricts.

final:=proc(S,d) Appelle toutes les procédures nécessaires et lance le programme sur la substitution donnee a la fin

```
genere_matrice:=proc(S,d):MAT
local ma,k,i2,j2,z;
begin
        ma:= MAT(d,d,func(0,i,j)):
        for i2 from 1 to d do
        for j2 from 1 to strlen(S[i2]) do
              case substring(S[i2],j2-1)
                     of "1" do z:=1; break; of "2" do z:=2; break; of "3" do z:=3; break;
                     of "4" do z:=4; break; of "5" do z:=5; break; of "6" do z:=6; break;
```

```
                end_case;
                ma[z,i2]:=ma[z,i2]+1;
        end_for;
        end_for:
        return(ma);
end_proc:

est_positive:=proc(m :MAT,d):DOM_BOOL
local i,j;
begin
        for i from 1 to d do
        for j from 1 to d do
                if m[i,j] <= 0 then return(FALSE); end_if;
        end_for;
        end_for;
        return(TRUE);
end_proc:

est_primitive:=proc(m :MAT,d):DOM_BOOL
local i;
begin
        for i from 1 to 10 do
                if est_positive(m^i,d) then return(TRUE); end_if;
        end_for;
        return(FALSE);
end_proc:

est_Pisot:=proc(m :MAT,d,v):DOM_BOOL
local nb_rac_dehors_cerc_1,j;
begin
        nb_rac_dehors_cerc_1:=0:
        for j from 1 to d do
                // on exclut les matrices qui ont des vp de modules 1
               if ( abs(v[1][j]-1) < 0.0000001 ) then return(FALSE): end_if:
               if ( abs(v[1][j]) > 1.0 ) then nb_rac_dehors_cerc_1:=nb_rac_dehors_cerc_1+1: end_if:
        end_for:
        if ( nb_rac_dehors_cerc_1 = 1 ) then return(TRUE): else return(FALSE): end_if:
end_proc:

indice_Pisot:=proc(vp)
local i;
begin
        for i from 1 to (nops(vp[1])) do
                if ( abs(vp[1][i]) > 1 ) then return(i): end_if:
        end_for:
end_proc:

est_admissible:=proc(m :MAT,d,v):DOM_BOOL
local de,c;
begin
        c:=FALSE;
        de:=linalg::det(m):
        if de<>0 and est_Pisot(m,d,v) and est_primitive(m,d) then c:=TRUE:
        else print("non Pisot primitive"):
                return(FALSE);
        end_if:
        return(TRUE);
end_proc:

alpha:=proc(d,vpa)
local r,s,alpha,r1,s1,a,c,b,i,taille;
begin
        s:=0;
        for i from 1 to nops(vpa[1]) do if Im(vpa[1][i]) <> 0.0 then s:=s+1; end_if; end_for;
        s:=s/2; r:=d-2*s; taille:=r-1+s; r1:=1; s1:=1;
        alpha:=array(0..taille); alpha[0]:=float(vpa[1][indice_Pisot(vp)]);
```

```
        for a from 1 to d do
                if ( abs(vpa[1][a])<1 ) then
                if (Im(vpa[1][a])=0.0)
                        then alpha[r1]:=float(vpa[1][a]); r1 :=r1+1;
                else      c:= TRUE;
                                // verifie que le conjugue n'est pas deja inscrit dans la liste des vp
                        if( s1<>1) then
                        for b from 1 to s1-1 do
                        if (abs(I*Im(vpa[1][a])-Re(vpa[1][a])+alpha[r-1+b]) <0.00000001 ) then c:=FALSE;
                        end_if;
                        end_for;
                        end_if;
                        if (c=TRUE) then alpha[r-1+s1]:=float(vpa[1][a]); s1 :=s1+1; end_if;
                        end_if;
                end_if;
        end_for;
        return(alpha);
end_proc:

entier:=proc(Y,d,vp)
local c,e,k,vale,j,b,sigm,inte,i,z;
begin
        c:=TRUE; e:=expr(Y); j:=1;
        for k from 1 to d do vale[k]:=float(subsex(e,a=vp[1][k])); end_for;
        while j<d+1 and c=TRUE do
               for k from 1 to j do b[k]:=k; end_for;
               sigm:=0; k:=1;
               while k<>0 do
                      inte:=1;
                      for k from 1 to j do inte:=inte*vale[b[k]]; end_for;
                      sigm:=sigm+inte;
                      k:=j;
                      while (k>0) and ((b[k]=d) or (b[k]>d-j+k-1)) do k:=k-1; end_while;
                      if k<>0 then
                             b[k]:=b[k]+1;
                             if k<>j then for i from k+1 to j do b[i]:=b[i-1]+1; end_for; end_if;
                      end_if;
               end_while;
               z:=sigm;
               while norm(z) > 1 do
                      if norm(z-1) < norm (z+1) then z:=z-1; else z:=z+1; end_if;
               end_while;
               if (norm(z) > 0.00000001) and (norm(z-1) > 0.00000001) and (norm(z+1) > 0.00000001)
                       then c:=FALSE; end_if;
               j:=j+1;
        end_while;
       return(c);
end_proc:

chiffres:=proc(m:MAT,d)
local a,alpha,b,c,delt,e,i1K,L,n,p,r,r1,s1,taille,v;
begin
        n:=MAT(linalg::transpose(m));
        p:=linalg::charPolynomial(n,a);
        K:=Dom::AlgebraicExtension(Dom::Rational, p, a); //corps Q(a)
        L:=Dom::Matrix(K)(n); // matrice transposée dans le corps K
        v:=linalg::eigenVectors(L); // vecteur propre à gauche formel
        delt:=array(0..d);
        for i1 from 1 to d do delt[i1]:=v[1][3][1][i1]/v[1][3][1][1]; end_for:
        delt[0]:=delt[1]-delt[1]; // Pour que le zéro soit formel et pas numérique
        return(delt);
end_proc:


delta:=proc(p,delt)
local k,j,vect,z;
begin
```

```
        vect:=delt[0]; j:=0;
        while (j < strlen(p)) do
                case substring(p,j)
                      of "1" do z:=1; break; of "2" do z:=2; break; of "3" do z:=3; break;
                       of "4" do z:=4; break; of "5" do z:=5; break; of "6" do z:=6; break;
               end_case;
                vect:=vect+delt[z]; j:=j+1;
        end_while;
        return(vect);
end_proc:


mat_auto_chiffres:=proc(m,d,vpa)
local bon,delt,ind, i,i2,j, j2,matott,s;
begin
        bon:=est_admissible(m,d,vpa);
        if bon=FALSE then return("Non Pisot");
        else
                delt:=chiffres(m,d);
               matott:=array(1..d,1..d); // matott est un tableau et il faut le lire en ligne
               ind:=array(1..d,1..d); //gère la taille de chaque arete
               for i from 1 to d do for j from 1 to d do
                       ind[i,j]:=1 ;
                       if m[i,j]=0 then matott[i,j]:=_; else matott[i,j]:=array(1..m[i,j]); end_if;
               end_for; end_for;
               for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to strlen(S[i2]) do
                       case substring(S[i2],j2-1)
                       of "1" do z:=1; break; of "2" do z:=2; break; of "3" do z:=3; break;
                       of "4" do z:=4; break; of "5" do z:=5; break; of "6" do z:=6; break;
                       end_case;
                       matott[z,i2][ind[z,i2]]:=delta(substring(S[i2],0..j2-2),delt);
                       ind[z,i2]:=ind[z,i2]+1;
                end_for; end_for:
                return(matott);
        end_if;
end_proc:

sominit:=proc(matott,d)
local nvsminit,i,j,k;
begin
        for j from 1 to d do for i from 1 to d do
               if matott[i,j] <> _ then
              for k from 1 to nops(matott[i,j]) do
nvsminit[j,matott[i,j][k]][1]:=j; nvsminit[j,matott[i,j][k]][2]:=0; end_for;
               end_if;
               end_for; end_for;
        return(nvsminit);
end_proc:

auto_produit:=proc(S,d,m,matott)
local i, i2,j, j2,l,prod,z1,z2,b,c,k,prod1;
begin
        prod:=array(1..d,1..d,1..d,1..d); l:=array(1..d,1..d,1..d,1..d);
        for i from 1 to d do for j from 1 to d do for i1 from 1 to d do for j1 from 1 to d do
               if (m[i,j]=0) or (m[i1,j1] = 0)                then prod[i,i1,j,j1] := _;
               else
                       l[i,i1,j,j1]:=1; prod[i,i1,j,j1]:=array(1..m[i,j]*m[i1,j1]);
                       for z1 from 1 to m[i,j] do for z2 from 1 to m[i1,j1] do
                               b:= - matott[i,j][z1] + matott[i1,j1][z2]; c:=TRUE; k:=1;
                               while (k<l[i,i1,j,j1]) and (c=TRUE) do
                                       if b=prod[i,i1,j,j1][k] then c:=FALSE; end_if;
                                       k:=k+1;
                               end_while;
                               if c=TRUE
                               then prod[i,i1,j,j1][l[i,i1,j,j1]]:=b; l[i,i1,j,j1]:=l[i,i1,j,j1]+1;
                               end_if;
```

```
                      end_for; end_for;
// On retrouve parfois la meme difference et on reduit le sommet
                      if l[i,i1,j,j1]<>(m[i,j]*m[i1,j1]+1) then
                              prod1:=prod[i,i1,j,j1]; prod[i,i1,j,j1]:=array(1..(l[i,i1,j,j1]-1));
                              for k from 1 to l[i,i1,j,j1]-1 do prod[i,i1,j,j1][k]:=prod1[k]; end_for;
                      end_if;
               end_if;
        end_for; end_for; end_for; end_for;
        return(prod);
end_proc:

mat_auto_produit:=proc(prod,d)
local i, i2,j, j2,rep;
begin
        rep:=array(0..(d*d),0..(d*d)); rep[0,0]:=_;
        for i from 1 to d do for j from 1 to d do
                rep[0,i+(j-1)*d]:=[i,j]; rep[i+(j-1)*d,0]:=[i,j];
                for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to d do
                        rep[i+(j-1)*d,i2+(j2-1)*d]:=prod[i,j,i2,j2];
                end_for; end_for;
        end_for; end_for;
        return(rep);
end_proc:

etiquettes:=proc(m,d,matott,K)
local etiq, etiqint,i, i1, j, j1,k,tail,t,b;
begin
        tail:=0; etiqint:=array(0..30);
        for i from 1 to d do for j from 1 to d do for i1 from 1 to d do for j1 from 1 to d do
                if (m[i,j]<>0) and ( m[i1,j1] <> 0) then
                for z1 from 1 to m[i,j] do for z2 from 1 to m[i1,j1] do
                        if (tail=0) then etiqint[0]:=matott[i,j][z1]-matott[i,j][z1]; tail:=1; end_if;
                        t:=TRUE; b:=matott[i,j][z1] - matott[i1,j1][z2];
                        for k from 0 to (tail-1) do
                                if (etiqint[k]=b) or (etiqint[k]=-b) then t:=FALSE; end_if;
                        end_for;
                        if t=TRUE then etiqint[tail]:=b; tail:=tail+1; end_if;
                        if tail>30 then return("trop d'etiquettes"); end_if;
                end_for; end_for;
        end_if;
        end_for; end_for; end_for; end_for;
        etiq:=array(1..(2*tail-1)); etiq[tail]:=etiqint[0];
        for i from 1 to (tail-1) do etiq[i]:=etiqint[i]; etiq[2*tail-i]:=-etiq[i]; end_for;
        return(etiq);
end_proc:

difer:=proc(m,matott,Y,i,j,i1,j1)
local tail, diff2,z1,z2,k,diff1;
begin
        if (m[i,i1]<>0) and ( m[j,j1] <> 0) then
                k:=0;
                for z1 from 1 to m[i,i1] do for z2 from 1 to m[j,j1] do
                        if Y = - matott[i,i1][z1] + matott[j,j1][z2] then
                                k:=k+1; diff1[k]:=array(1..2);
                                diff1[k][1]:=matott[i,i1][z1]; diff1[k][2]:=matott[j,j1][z2];
                        end_if;
                end_for; end_for;
                diff2:=array(1..k);
                for z1 from 1 to k do diff2[z1]:=diff1[z1]; end_for;
                return(diff2);
        else print(342); return( _ );
        end_if;
end_proc:

bornes:=proc(etiq,alpha)
local borne,e,i,i0,j,ma,long,tail ;
```

```
begin
        long:=(nops(alpha)-1); tail:=(nops(etiq)-1)/2; ma:=array(0..long); e:=array(1..tail);
        for i from 1 to tail do e[i]:=expr(etiq[i]); end_for:
                      // transforme les composantes de etiq en expressions
        for i from 0 to long do
                ma[i]:=0;
                for j from 1 to tail do
                        if (norm(subsex(e[j],a=alpha[i])) > ma[i])
                                then ma[i]:=norm(subsex(e[j],a=alpha[i])); end_if;
                end_for;
        end_for;
        borne:=array(0..long); borne[0]:= (ma[0])/(abs(alpha[0])-1);
        for i from 1 to long do borne[i]:= (ma[i])/(1-abs(alpha[i])); end_for;
        return(borne);
end_proc:

bornestore:=proc(sup2,alph,born,W)
local bornetore,e,y;
begin
        bornetore:=born; e:=expr(W); // transforme le formel en expressions y:=subsex(e,a=alph[0]);
        if ( sup2 = TRUE )
                then bornetore[0]:=born[0]+norm(y)/(abs(alph[0])-1);
                else bornetore[0]:=born[0] + norm(y);
        end_if;
        return(bornetore);
end_proc:

borne_ari:=proc(d,etiq,vp)
local ent,c,j,z;
begin
        ent:=0; c:=FALSE;
        while c=FALSE do
               ent:=ent+1; z:=TRUE; j:=1;
                while (j<nops(etiq)+1) and (z=TRUE) do
                      if entier(ent*etiq[j],d,vp)=FALSE then z:=FALSE; end_if;
                        j:=j+1;
                end_while;
                c:=z;
        end_while;
        return(ent);
end_proc:

borne_aritore:=proc(d,vp,born_ari,W)
local ent;
begin
        ent:=1;
        while entier(ent*born_ari*W,d,vp)=FALSE do ent:=ent+1 ; end_while;
        return(ent*born_ari);
end_proc:

reseau:=proc(m,d,alph,born)
local t,chif,i,j,i1,z,u,k,C,si,consta,v;
begin
        t:=MAT(d-1,d-1); consta:=array(1..d-1); C:=MAT(d-1,1);
        si:=array(1..d-1); chif:=chiffres(m,d); i1:=1;
        for j from 1 to d-1 do
               e:=expr(chif[j+1]-chif[1]); i1:=1;
               for i from 1 to nops(alph)-1 do
                       z:= subsex(e,a=alph[i]);
                      if ( Im(alph[i]) <> 0.0 )
                       then t[i1,j]:=Re(z); t[i1+1,j]:=Im(z); consta[i1]:=0;
                              consta[i1+1]:=0; C[i1,1]:=born[i]; C[i1+1,1]:=born[i];
                              si[i1]:=1; si[i1+1]:=1; i1:=i1+2;
                       else t[i1,j]:=z; consta[i1]:=0;
                              C[i1,1]:=born[i]; si[i1]:=1; i1:=i1+1;
                       end_if;
```

```
                end_for;
                if (i1<>d) then print("probleme dans la procedure reseau"); end_if;
        end_for;
        u:=t^(-1); k:=d-1;
        while k<>0 do
                v:=u*C;
                for i from 1 to d-1 do
                        if abs(v[i,1]) > consta[i] then consta[i]:=abs(v[i,1]); end_if;
                end_for;
                k:=d-1;
                while (k<>0) and (si[k]=-1) do k:=k-1; end_while;
                if k<>0 then
                        si[k]:=-1; C[k,1]:=-C[k,1]; i:=k+1;
                        while i < d do
                                si[i]:=1;C[i,1]:=abs(C[i,1]); i:=i+1;
                        end_while;
                end_if;
        end_while;
        for j from 1 to d-1 do
                i:=0;
               while i< consta[j] do i:=i+1; end_while;
               consta[j]:=i;
        end_for;
        return(consta);
end_proc:

sommets:=proc(gra,alph,etiq,born,born_ari,K,unit,rangi,rangj)
local nbr,i0,S,j0,k,Y,z, gra1,graf,c,e,long;
begin
        nbr:= (nops(gra)); long:=nops(etiq); z:=array(0..(nops(born)-1));
        for i0 from rangi to nbr do
               S:=gra[i0];
               for j0 from 1 to long do
                        if (i0 > rangi) or (j0 > rangj) then
                                Y:=(S+etiq[j0])/(K::convert(a)); c:=TRUE;
                                for k from 1 to nbr do
                                        if (Y=gra[k]) then c:=FALSE; end_if;
                                end_for;
                                if c=TRUE then
                                        k:=0; e:=expr(Y); z[0]:=subsex(e,a=alph[k]);
                                        if (norm(z[0]) > born[k])
                                        or ((abs(norm(z[0]) - born[k]))<0.00000001) then c:=FALSE end_if;
                                        for k from 1 to (nops(born)-1) do
                                                z[k]:=subsex(e,a=alph[k]);
                                                if (norm(z[k]) > born[k]) then c:=FALSE; end_if;
                                        end_for;
                                end_if;
                                if (unit=FALSE) and (c=TRUE) then c:=entier((born_ari)*Y,d,vp); end_if;
                                if c=TRUE then
                                        gra1:=array(1..(nbr +1));
                                        for k from 1 to (nbr) do gra1[k]:=gra[k]; end_for;
                                        gra1[nbr+1]:=Y;
                                        graf:=sommets(gra1,alph,etiq,born,born_ari,K,unit,i0,j0);
                                        return(graf);
                                end_if;
                        end_if;
                end_for;
        end_for;
        if c=FALSE then return(gra); end_if;
end_proc:

graphe_ari:=proc(W,S,d,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su)
local born_ari,born,gra,som,graph,graph1,ind, c,
mauv, att, i1,i2,c1,c2,indz,k,i,j,som1,tail,graphe,moit,l,z,e,y,c3;
begin
        born:=bornestore(su,alph,borne,W);
        born_ari:=borne_aritore(d,vp,born_arinorm,W);
```

```
if abs(de)=1 then unit:=TRUE; else unit:=FALSE; end_if;
gra:=array(1..1); gra[1]:=-W; e:=expr(-W);
k:=0; c3:=TRUE;
while ( c3 = TRUE ) and ( k < (nops(born)-1) ) do
       k:=k+1; y:=subsex(e,a=alph[k]);
       if (norm(y) > born[k]) then c3:=FALSE; end_if;
end_while;
if c3=FALSE then return(FALSE); end_if;
som:=sommets(gra,alph,etiq,born,born_ari,K,unit,1,0);
tail:=nops(som); graphe:=array(0..tail,0..tail); graphe[0,0]:=_;
for i from 1 to tail do
       graphe[0,i]:=som[i]; graphe[i,0]:=graphe[0,i];
end_for;
for i from 1 to tail do for j from 1 to tail do
        z:=(K::convert(a))*graphe[0,j] - graphe[i,0]; l:=1; c:=FALSE;
        while (l < (nops(etiq)+3)/2 ) and (c=FALSE) do
               e:=etiq[l];
               if z=e
              then graphe[i,j]:= z; c:=TRUE;
               else
                      if z=-e then graphe[i,j]:= z; c:=TRUE;
                      else l:=l+1;
                      end_if;
               end_if;
        end_while;
        if c=FALSE then graphe[i,j]:= _; end_if;
end_for; end_for;
graph:=graphe;
c:=TRUE; mauv:=array(1..tail); att:=array(1..tail);
for i1 from 1 to tail do mauv[i1]:=TRUE; att[i1]:=FALSE; end_for;
indz:=1;
while (c=TRUE) do
        c:=FALSE;
        for i1 from 1 to tail do
        if mauv[i1]=TRUE then
                c1:=FALSE; c2:=FALSE;
                for i2 from 1 to tail do
                if (mauv[i2]=TRUE) and (graph[i1,i2] <> _ ) then c1:=TRUE; end_if;
                if (mauv[i2]=TRUE) and (graph[i2,i1] <> _ ) then c2:=TRUE; end_if;
                end_for;
                if (c2=FALSE)
                then if (i1<>indz) or (c1=FALSE) then mauv[i1]:=FALSE; c:=TRUE; end_if;
                else if (c1=FALSE) then mauv[i1]:=FALSE; c:=TRUE; end_if;
                end_if;
        end_if;
        end_for;
end_while;
if mauv[indz]=FALSE then return(FALSE); end_if;
att[indz]:=TRUE; att:=atteint_ari(tail,graph,mauv,indz,att);
k:=0;
for i from 1 to tail do
        if att[i]=TRUE then k:=k+1; ind[k]:=i; end_if;
end_for;
l:=0; graph1:=array(0..k,0..k); graph1[0,0]:=graph[0,0];
for i from 1 to k do
        graph1[0,i]:=graph[0,ind[i]]; graph1[i,0]:=graph[0,ind[i]];
        for j from 1 to k do graph1[i,j]:=graph[ind[i],ind[j]]; end_for;
end_for;
for i from 1 to k do for j from 1 to k do
        if graph1[i,j]<>_ then
                l:=l+1; som1[l]:=[i,graph1[0,i]],_,[j,graph1[0,j]],_,graph1[i,j];
                end_if;
end_for; end_for;
if l=0 then return(FALSE); end_if;
som2:=array(1..l);
for i from 1 to l do som2[i]:=som1[i]; end_for;
return(graph1);
```

```
end_proc:

atteint_ari:=proc(tail,graphe,mauv,i,att)
local i2;
begin
        for i2 from 1 to tail do
        if (graphe[i,i2] <> _) and (att[i2]=FALSE) and (mauv[i2]=TRUE) then
                att[i2]:=TRUE; att:=atteint_ari(tail,graphe,mauv,i2,att);
                end_if;
        end_for;
        return(att);
end_proc:

atteint:=proc(d,tgra,inter,mauv,i,j,k,att)
local i2,j2,k2;
begin
        for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to d do for k2 from 1 to tgra do
                if (inter[i,j,k,i2,j2,k2] <> _) and (att[i2,j2,k2]=FALSE) and (mauv[i2,j2,k2]=TRUE) then
                       att[i2,j2,k2]:=TRUE; att:=atteint(d,tgra,inter,mauv,i2,j2,k2,att);
               end_if;
        end_for; end_for; end_for;
        return(att);
end_proc:

auto_inter:=proc(S,d,prod,gra)
local i1,i2,j1,j2,k1,k2, l,z1,z2,tgra,inter,b,mauv,c1,c2,att,
indz,att1,gra_int, som_int, gra_lisible,aretes,p,aretes1,x;
begin
        tgra:=sqrt(nops(gra))-1; inter:=array(1..d,1..d,1..tgra,1..d,1..d,1..tgra);
        for i1 from 1 to d do for i2 from 1 to d do for j1 from 1 to d do
        for j2 from 1 to d do for k1 from 1 to tgra do for k2 from 1 to tgra do
                b:=gra[k1,k2];
                if (b=_) or (prod[i1,j1,i2,j2]=_)
                then inter[i1,j1,k1,i2,j2,k2]:=_;
               else c:=FALSE; l:=1;
                        while (l < nops(prod[i1,j1,i2,j2])+1 ) and (c=FALSE) do
                                if b =prod[i1,j1,i2,j2][l]
                                then c:=TRUE; inter[i1,j1,k1,i2,j2,k2]:=b;
                                else l:=l+1;
                                end_if;
                        end_while;
                        if c=FALSE then inter[i1,j1,k1,i2,j2,k2]:=_; end_if;
                end_if;
        end_for; end_for; end_for; end_for; end_for; end_for;
        c:=TRUE; nbr:=d*d*tgra; mauv := array(1..d,1..d,1..tgra); att:=array(1..d,1..d,1..tgra);
        for i1 from 1 to d do for j1 from 1 to d do for k1 from 1 to tgra do
               mauv[i1,j1,k1]:=TRUE; att[i1,j1,k1]:=FALSE;
        end_for; end_for; end_for;
        indz:=1;
        while (c=TRUE) do
                c:=FALSE;
                for i1 from 1 to d do for j1 from 1 to d do for k1 from 1 to tgra do
                        if mauv[i1,j1,k1]=TRUE then
                                c1:=FALSE; c2:=FALSE;
                                for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to d do for k2 from 1 to tgra do
                                if (mauv[i2,j2,k2]=TRUE) and (inter[i1,j1,k1,i2,j2,k2] <> _ )
                                        then c1:=TRUE; end_if;
                                if (mauv[i2,j2,k2]=TRUE) and (inter[i2,j2,k2,i1,j1,k1] <> _ )
                                        then c2:=TRUE; end_if;
                                end_for; end_for; end_for;
                                if (c2=FALSE)
                                then if (k1<>indz) or (c1=FALSE)
                                                then mauv[i1,j1,k1]:=FALSE; c:=TRUE; end_if;
                                else if (c1=FALSE) then mauv[i1,j1,k1]:=FALSE; c:=TRUE; end_if;
                        end_if;
                end_if;
```

```
            end_for; end_for; end_for;
    end_while;
    for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to d do
           if (att[i2,j2,indz]=FALSE) and (mauv[i2,j2,indz]=TRUE) then
                    att[i2,j2,indz]:=TRUE; att:=atteint(d,tgra,inter,mauv,i2,j2,indz,att);
           end_if;
    end_for; end_for;
    k:=0;
    for i1 from 1 to d do
            if att[i1,i1,indz]=TRUE then
                    k:=k+1; som_int[k]:=array(1..3); som_int[k][1]:=i1;
                    som_int[k][2]:=i1; som_int[k][3]:=indz;
            end_if;
    end_for;
    for k2 from 1 to tgra do for i2 from 1 to d do for j2 from 1 to d do
            if (k2<>indz) or (i2<>j2) then
                    if att[i2,j2,k2]=TRUE then
                            k:=k+1; som_int[k]:=array(1..3);
                            som_int[k][1]:=i2; som_int[k][2]:=j2; som_int[k][3]:=k2;
                    end_if;
            end_if;
    end_for; end_for; end_for;
    if k=0 then return(FALSE); end_if;
    att1:=array(1..k);
    for i2 from 1 to k do att1[i2]:=[som_int[i2][1],som_int[i2][2],gra[0,som_int[i2][3]]]; end_for;
    p:=0; gra_int:=array(0..k,0..k); gra_lisible:=array(0..k,1..k); gra_int[0,0]:=_;
    for i2 from 1 to k do
            gra_int[0,i2]:=array(1..3); gra_int[0,i2][1]:=som_int[i2][1];
            gra_int[0,i2][2]:=som_int[i2][2]; gra_int[0,i2][3]:=gra[0,som_int[i2][3]];
            gra_int[i2,0]:=gra_int[0,i2];
            gra_lisible[0,i2]:=[som_int[i2][1],som_int[i2][2],gra[0,som_int[i2][3]]];
    end_for;
    for i2 from 1 to k do for j2 from 1 to k do
            gra_int[i2,j2]:=inter[som_int[i2][1],som_int[i2][2],
            som_int[i2][3],som_int[j2][1],som_int[j2][2],som_int[j2][3]];
            gra_lisible[i2,j2]:=gra_lisible[0,i2],gra_lisible[0,j2],gra_int[i2,j2];
            if gra_int[i2,j2] <> _ then p:=p+1; aretes1[p]:=gra_lisible[i2,j2]; end_if;
    end_for; end_for;
    if (p=0)
    then print("pas d'aretes dans l'automate intersection:probleme"); return(FALSE);
    else
           aretes:=array(1..p);
            for x from 1 to p do aretes[x]:=aretes1[x]; end_for;
            print(k, " sommets dans l'automate intersection :");
    end_if;
    return(gra_int);
end_proc:

auto_proj:=proc(m,matott,gra_int)
local tail, auto, som, i,j,Y,i1,i2,j1,j2,dife,l,p,aret,aret1;
begin
    tail:= sqrt(nops(gra_int))-1; auto:=array(0..tail,0..tail); som:=array(1..tail); p:=0;
    if gra_int[0,1][3]= -gra_int[0,1][3] then
            for i from 1 to tail do
                    auto[0,i][1]:=gra_int[0,i][2];
                    if gra_int[0,i][3]= -gra_int[0,i][3] then
                            if gra_int[0,i][2]=gra_int[0,i][1] then auto[0,i][2]:=0;
                            else auto[0,i][2]:=I;
                            end_if;
                    else auto[0,i][2]:=N;
                    end_if;
                    if auto[0,i][1]=1 then som[i]:= [i,"a",auto[0,i][2]];
                    elif auto[0,i][1]=2 then som[i]:= [i,"b",auto[0,i][2]];
                    elif auto[0,i][1]=3 then som[i]:= [i,"c",auto[0,i][2]];
                    elif auto[0,i][1]=4 then som[i]:= [i,"d",auto[0,i][2]];
                    elif auto[0,i][1]=5 then som[i]:= [i,"e",auto[0,i][2]];
                    end_if;
```

```
                end_for;
        else
              for i from 1 to tail do
                       auto[0,i][1]:=gra_int[0,i][2];
                       if gra_int[0,i][3]= gra_int[0,1][3] then auto[0,i][2]:=I;
                       else auto[0,i][2]:=N;
                       end_if;
                       if auto[0,i][1]=1 then
                               som[i]:= [i,"a",auto[0,i][2]];
                       elif auto[0,i][1]=2 then som[i]:= [i,"b",auto[0,i][2]];
                       elif auto[0,i][1]=3 then som[i]:= [i,"c",auto[0,i][2]];
                       elif auto[0,i][1]=4 then som[i]:= [i,"d",auto[0,i][2]];
                       elif auto[0,i][1]=5 then som[i]:= [i,"e",auto[0,i][2]];
                       end_if;
                end_for;
        end_if;
        for i from 1 to tail do for j from 1 to tail do
                Y:=gra_int[i,j];
                if Y<> _ then
                       i1:=gra_int[0,i][1]; j1:=gra_int[0,i][2];
                       i2:=gra_int[0,j][1]; j2:=gra_int[0,j][2];
                       dife:=difer(m,matott,Y,i1,j1,i2,j2); auto[i,j]:=array(1..nops(dife)); l:=;
                       for k from 1 to nops(dife) do
                               auto[i,j][k]:=dife[k][2]; l:=l union auto[i,j][k];
                       end_for;
                       p:=p+1; aret[p]:=som[i] ,_, som[j], _, l;
                else auto[i,j]:=_;
                end_if;
        end_for; end_for;
        aret1:=array(1..p);
        for i from 1 to p do aret1[i]:=aret[i]; end_for;
        print(p, "aretes dans l'automate de non injectivite");
        return(auto);
end_proc:

sousgraphe:=proc(d,auto,nvsminit,m)
local k,tail,ssens,x,i,indx,j,som,nvsm,y,z,nvlar,ajou,tail_ajou,
egali, nvliste;
begin
        k:=sqrt(nops(auto))-1; // nombre de sommets dans le graphe d'inj.
        for i from 1 to d do ssens[i][1]:=i; ssens[i][2]:=0; end_for;
        tail:=d;
        for i from 1 to k do
                ssens[ auto[0,i][1] ][2]:=ssens[ auto[0,i][1] ][2]+1;
              ssens[ auto[0,i][1] ][ ssens[auto[0,i][1]][2] + 2 ]:=i;
        end_for;
        for i from 1 to d do
              if ssens[i][2]=0 then return(FALSE); end_if;
        end_for;
        indx:=0;
        while indx < tail do
                indx:=indx+1; j:=ssens[indx][1]; nvsm:=nvsminit; tail_ajou:=0;
                for x from 1 to k do for i from 3 to (ssens[indx][2]+2) do
                      if auto[ssens[indx][i],x] <> _ then
                       for z from 1 to nops( auto[ ssens[indx][i] , x ] ) do
                               nvlar:= auto[ssens[indx][i],x][z];
                               if nvsm[ auto[0,x][1] , nvlar ][2]=0 then
                                       tail_ajou:=tail_ajou + 1;
                                       ajou[tail_ajou][1]:=auto[0,x][1]; ajou[tail_ajou][2]:= nvlar ;
                                end_if;
                                if nvsm[auto[0,x][1],nvlar][nvsm[auto[0,x][1],nvlar][2]+2 <>x then
                                       nvsm[auto[0,x][1],nvlar ][2]:=nvsm[auto[0,x][1],nvlar][2]+1;
                                       y:=nvsm[auto[0,x][1], nvlar ][2];
                                       nvsm[auto[0,x][1], nvlar ][y+2]:=x;
                                end_if;
                       end_for;
                       end_if;
```

```
              end_for; end_for;
             z:=0;
             for x from 1 to d do z := z + m[j,x]; end_for;
             if tail_ajou <> z then return(FALSE); end_if;
              for x from 1 to tail_ajou do
                     nvsm[ajou[x][1],ajou[x][2]][1]:=ajou[x][1];
                     nvliste := nvsm[ajou[x][1],ajou[x][2]]; egali:=FALSE;
                     for z from 1 to tail do
                            if nvliste = ssens[z] then egali:=TRUE; end_if;
                     end_for;
                     if egali=FALSE
                     then tail:=tail+1: ssens[tail]:=nvliste;
                     end_if;
              end_for;
       end_while;
       return(TRUE);
end_proc:

sousgraphe_0:=proc(d,auto,nvsminit,m)
local i,j,k,somm,nvlauto,ssgrp,p;
begin
       k:=sqrt(nops(auto))-1; p:=0;
       for i from 1 to k do
              if (auto[0,i][2] = 0)
              then for j from 1 to k do
                      if (auto[0,i][2] <> 0) and (auto[j,i]<> _)
                            then print("retour sur l'automate initial");
                            return(TRUE);
                     end_if;
                     end_for;
             else p:=p+1; somm[p]:=i;
             end_if;
       end_for;
       nvlauto:=array(0..p,0..p); nvlauto[0,0]:= _;
       for i from 1 to p do
             nvlauto[0,i]:=auto[0,somm[i]];
              for j from 1 to p do nvlauto[i,j]:= auto[ somm[i], somm[j] ]; end_for;
       end_for;
       ssgrp:= sousgraphe(d,nvlauto,nvsminit,m);
       return(ssgrp);
end_proc:

tore:=proc(d,constan,chif,S,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su,prod,nvsminit,m)
local valeu,i,x,j,l,ze,gra,inter,som,y,ssgphe,auto,fina;
begin
       valeu:=array(1..d-1);
       for i from 1 to d-2 do valeu[i]:=0; end_for;
       x:=d-1; valeu[d-1]:=0; l:=1; fina:=TRUE;
       while (x<>0) do
              ze:=etiq[1]-etiq[1];
              for i from 1 to d-1 do ze:=ze + (valeu[i])*(chif[i+1]-chif[1]); end_for;
              gra:=graphe_ari(ze,S,d,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su);
              if (gra <> FALSE)
              then
                     inter:=auto_inter(S,d,prod,gra);
                     if (inter <> FALSE)
                    then auto:=auto_proj(m,matott,inter);
                            som[l]:=ze; l:=l+1;
                           print("vecteur dont le graphe est non vide",ze);
                            print("point du reseau correspondant :",valeu);
                            if (ze=etiq[1]-etiq[1])
                            then ssgphe := sousgraphe_0(d,auto,nvsminit,m);
                            else ssgphe:=sousgraphe(d,auto,nvsminit,m);
                            end_if;
                            if ssgphe = FALSE then
                                   print("le sous graphe est strict");
                            else if ssgphe = TRUE then
```

```
                                    print("le sous graphe n'est pas strict");
                                    fina:=FALSE;
                                    end_if;
                              end_if;
                              print("______________________________");
                        end_if;
                end_if;
                x:=d-1;
                while (x<>0) and (valeu[x] = constan[x]) do x:=x-1; end_while;
                if x<>0 then
                      valeu[x]:=valeu[x]+1; i:=x+1;
                      while i<d do valeu[i]:=-constan[i]; i:=i+1; end_while;
                end_if;
        end_while;
       print(l-1,"sommets non nuls dont le graphe est non vide");
        print(som);
        if fina=FALSE
        then print("la representation n'est pas injective");
        else print("la representation sur le tore est injective");
        end_if;
        return(fina);
end_proc:

final:=proc(S,d)
local m,vp,p,K,alph,matott,etiq,borne,born_arinorm,de,su,
chif,constan,prod,tor,nvsminit;
begin
        m:=genere_matrice(S,d):
        de:=linalg::det(m); print("determinant :", de);
        vp:=numeric::eigenvectors(m):
        p:=linalg::charPolynomial(m,a);
        K:=Dom::AlgebraicExtension(Dom::Rational, p, a);
        alph:=alpha(d,vp); print("valeurs propres",alph);
        matott:=mat_auto_chiffres(m,d,vp);
        nvsminit:=sominit(matott,d);
        etiq:= etiquettes(m,d,matott,K); print("etiquettes :",etiq);
        borne:=bornes(etiq,alph);
        born_arinorm:= borne_ari(d,etiq,vp);
        if alph[0]<2 then su:=FALSE; else su:=TRUE; end_if;
        chif:=chiffres(m,d); print("vecteur propre formel :",chif);
        constan:=reseau(m,d,alph,borne); print("constantes",constan);
        prod:=auto_produit(S,d,m,matott); // print(prod);
        print("________________________");
        tor:=tore(d,constan,chif,S,alph,K,de,etiq,matott,borne,born_arinorm,su,prod,nvsminit,m);
end_proc:
```

// Le programme est lancé ci-dessous sur la substitution S qui n'est pas commentée

```
MAT:=Dom::Matrix( ): MAXDEPTH:=10000:
// S:= ["12","122"]; d:=2:
// S:= ["12","1"]; d:=2: // fibonacci
// S:= ["1112","12"]; d:=2: // non unitaire
// S:=["12122","1221122"]; d:=2:
// S:=["12122","122112"]; d:=2:
S:=["11222","1222"]; d:=2:
// S:= ["12","13","132"]; d:=3: // matrice réelle
// S:= ["2","123","23"]; d:=3:
// S:= ["12","31","1"]; d:=3: //flip
// S:= ["2","123","121"]; d:=3: // matrice complexe non unitaire
// S:= ["12","13","1"]; d:=3: // tribonacci
// S:= ["11223","231","2"]; d:=3: // bien éclatée
// S:= ["12","13","14","1"]; d:=4: // quatribonacci s=1
// S:= ["124","123","141","1"]; d:=4: // compliquée s=1
prod:=final(S,d):
```

Bibliographie

[1] R. L. Adler et B. Weiss. *Similarity of automorphisms of the torus.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 98.

[2] P. Alessandri et V. Berthé. Three distance theorems and combinatorics on words. *Enseign. Math. (2)*, 44(1-2):103–132, 1998.

[3] J.-P. Allouche et M. Mendès France. Automata and automatic sequences. Dans *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, pages 293–367. Springer, Berlin, 1995.

[4] Y. Amice. *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaires de France, Paris, 1975. Préface de Ch. Pisot, Collection SUP: Le Mathématicien, No. 14.

[5] P. Arnoux. Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore. *Bull. Soc. Math. France*, 116(4):489–500 (1989), 1988.

[6] P. Arnoux. Recoding sturmian sequences on a subshift of finite type. Chaos from order, a worked out example. Dans *1998 FIESTA summer school*, december 1998. Chili.

[7] P. Arnoux et S. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. Preprint 98-18, Institut de Mathématiques de Luminy, 1998.

[8] P. Arnoux et G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$. *Bull. Soc. Math. France*, 119(2):199–215, 1991.

[9] F. Axel et D. Gratias, editors. *Beyond quasicrystals.* Springer-Verlag, Berlin, 1995. Papers from the Winter School held in Les Houches, March 7–18, 1994.

[10] T. Bedford. Generating special Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms using fractals. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 6(3):325–333, 1986.

[11] E. Bombieri et J. E. Taylor. Which distributions of matter diffract? An initial investigation. *J. Physique*, 47(7 Suppl. Colloq. C3):C3–19–C3–28, 1986. International workshop on aperiodic crystals (Les Houches, 1986).

[12] Z. I. Borevich et I. R. Shafarevich. *Number theory.* Academic Press, New York, 1966. Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf. Pure and Applied Mathematics, Vol. 20.

[13] M. Boshernitzan et I. Kornfeld. Interval translation mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(5):821–832, 1995.

[14] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470.

[15] R. Bowen. Markov partitions are not smooth. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 71(1):130–132, 1978.

[16] V. Canterini. *Géométrie des substitutions Pisot unitaires.* Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, 2000.

[17] V. Canterini. Les substitutions de type pisot sont primitives. manuscrit, 2000.

[18] J. Cassaigne, S. Ferenczi, et L. Q. Zamboni. Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences. To appear in *Ann. Inst. Fourier*.

[19] E. M. Coven et M. S. Keane. The structure of substitution minimal sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 162:89–102, 1971.

[20] F. M. Dekking. The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 41(3):221–239, 1977/78.

[21] F. M. Dekking. *Combinatorial and statistical properties of sequences generated by substitutions.* Thèse de doctorat, Geboren te Amsterdam, 1980.

[22] F. M. Dekking. Recurrent sets. *Adv. in Math.*, 44(1):78–104, 1982.

[23] F. M. Dekking et M. Keane. Mixing properties of substitutions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 42(1):23–33, 1978.

[24] J. M. Dumont, T. Kamae, et S. Takahashi. Minimal cocycles with the scaling property and substitutions. *Israel J. Math.*, 95:393–410, 1996.

[25] J.-M. Dumont et A. Thomas. Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Theoret. Comput. Sci.*, 65(2):153–169, 1989.

[26] J.-M. Dumont et A. Thomas. Digital sum problems and substitutions on a finite alphabet. *J. Number Theory*, 39(3):351–366, 1991.

[27] J.-M. Dumont et A. Thomas. Digital sum moments and substitutions. *Acta Arith.*, 64(3):205–225, 1993.

[28] F. Durand. *Contribution à l'étude des suites et systèmes dynamiques substitutifs.* Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, 1996.

[29] F. Durand, B. Host, et C. Skau. Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):953–993, 1999.

[30] R. Ellis et W. H. Gottschalk. Homomorphisms of transformation groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94:258–271, 1960.

[31] S. Ferenczi. Les transformations de Chacon: combinatoire, structure géométrique, lien avec les systèmes de complexité $2n+1$. *Bull. Soc. Math. France*, 123(2):271–292, 1995.

[32] S. Ferenczi, C. Mauduit, et A. Nogueira. Substitution dynamical systems: algebraic characterization of eigenvalues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 29(4):519–533, 1996.

[33] A. H. Forrest. K-groups associated with substitution minimal systems. *Israel J. Math.*, 98:101–139, 1997.

[34] C. Frougny et B. Solomyak. Finite beta-expansions. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 12(4):713–723, 1992.

[35] W. H. Gottschalk. Substitution minimal sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 109:467–491, 1963.

[36] F. Q. Gouvêa. *p-adic numbers.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997. An introduction.

[37] P. J. Grabner, P. Liardet, et R. F. Tichy. Odometers and systems of numeration. *Acta Arith.*, 70(2):103–123, 1995.

[38] P. R. Halmos. *Lectures on ergodic theory.* Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

[39] R. H. Herman, I. F. Putnam, et C. F. Skau. Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics. *Internat. J. Math.*, 3(6):827–864, 1992.

[40] M. Hollander. *Linear Numeration Systems, finite β-expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systems.* Thèse de doctorat, University of Washington, 1996.

[41] C. Holton. Private communication. 1999.

[42] C. Holton et L. Q. Zamboni. Geometric realizations of substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 126(2):149–179, 1998.

[43] C. Holton et L. Q. Zamboni. Directed graphs and substitutions, 1999. preprint.

[44] C. Holton et L. Q. Zamboni. Substitutions, partial isometries of **R**, and actions on trees. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6(3):395–411, 1999.

[45] B. Host. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 6(4):529–540, 1986.

[46] B. Host. Représentation géométrique des substitutions sur 2 lettres. unpublished manuscript, 1992.

[47] S. Ito et M. Kimura. On Rauzy fractal. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 8(3):461–486, 1991.

[48] S. Ito et M. Ohtsuki. Modified Jacobi-Perron algorithm and generating Markov partitions for special hyperbolic toral automorphisms. *Tokyo J. Math.*, 16(2):441–472, 1993.

[49] T. Kamae. Spectrum of a substitution minimal set. *J. Math. Soc. Japan*, 22:567–578, 1970.

[50] T. Kamae. A topological invariant of substitution minimal sets. *J. Math. Soc. Japan*, 24:285–306, 1972.

[51] T. Kamae. Linear expansions, strictly ergodic homogeneous cocycles and fractals. *Israel J. Math.*, 106:313–337, 1998.

[52] A. Katok et B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[53] R. Kenyon. *Self-similar tilings*. Thèse de doctorat, Princeton University, 1990.

[54] R. Kenyon. *Sur la combinatoire, la dynamique et la statistique des pavages*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Paris-Sud, 1999.

[55] R. Kenyon et A. Vershik. Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(2):357–372, 1998.

[56] B. G. Klein. Homomorphisms of symbolic dynamical systems. *Math. Systems Theory*, 6:107–122, 1972.

[57] S. Le Borgne. Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(10):1123–1128, 1996.

[58] D. Lind et B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[59] A. N. Livshits. On the spectra of adic transformations of Markov compact sets. *Uspekhi Mat. Nauk*, 42(3(255)):189–190, 1987. English translation: *Russian Math. Surveys* 42(3) :222–223,1987.

[60] A. N. Livshits. Sufficient conditions for weak mixing of substitutions and of stationary adic transformations. *Mat. Zametki*, 44(6):785–793, 862, 1988. English translation: *Math. Notes* 44 :920–925, 1988.

[61] A. N. Livshits. Some examples of adic transformations and automorphisms of substitutions. *Selecta Math. Soviet.*, 11(1):83–104, 1992. Selected translations.

[62] A. Maes. *Morphic predicates and applications to the decidability of arithmetic theories*. Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainault, 1999.

[63] J. C. Martin. Substitution minimal flows. *Amer. J. Math.*, 93:503–526, 1971.

[64] J. C. Martin. Minimal flows arising from substitutions of non-constant length. *Math. Systems Theory*, 7:73–82, 1973.

[65] C. Mauduit. Caractérisation des ensembles normaux substitutifs. *Invent. Math.*, 95(1):133–147, 1989.

[66] A. Messaoudi. *Autour du fractal de Rauzy.* Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, 1996.

[67] P. Michel. Coincidence values and spectra of substitutions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 42(3):205–227, 1978.

[68] H. M. Morse. Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 22(1):84–100, 1921.

[69] M. Morse et G. A. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 60:815–866, 1938.

[70] M. Morse et G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

[71] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution. *Theoret. Comput. Sci.*, 99(2):327–334, 1992.

[72] B. Mossé. Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques. *Bull. Soc. Math. France*, 124(2):329–346, 1996.

[73] P. Narbel. The boundary of iterated morphisms on free semi-groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 6(2):229–260, 1996.

[74] B. Praggastis. Numeration systems and Markov partitions from self-similar tilings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8):3315–3349, 1999.

[75] M. Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis.* Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[76] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2):147–178, 1982.

[77] G. Rauzy. Rotations sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions. Dans *Séminaire de Théorie des Nombres, 1987–1988 (Talence, 1987–1988).* Univ. Bordeaux I, Talence, 1988. Exp. No. 21.

[78] V. Rohlin. Exact endomorphisms of a Lebesgue space. *Am. Math. Soc., Transl.*, 39:1–36, 1964.

[79] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres.* Hermann, Paris, 1967.

[80] M. Senechal. *Quasicrystals and geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[81] M. Shub, A. Fathi, et R. Langevin. *Global stability of dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, 1987. Translated from the French by Joseph Christy.

[82] A. Siegel. Théorème des trois longueurs et suites sturmiennes : mots d'agencement des longueurs. Prépublication 98-07, Institut de mathématiques de Luminy, 1998. To appear in *Acta Arith.*

[83] V. Sirvent et Y. Wang. Geometry of the Rauzy Fractals. Preprint, 1999.

[84] V. F. Sirvent. Modelos geométricos asociados a substituciones. Trabajo de ascenso, Universidad Simón Bolívar, 1998.

[85] B. Solomyak. On the spectral theory of adic transformations. Dans *Representation theory and dynamical systems*, pages 217–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[86] B. Solomyak. Substitutions, adic transformations, and beta-expansions. Dans *Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991)*, pages 361–372. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[87] M. Solomyak. On simultaneous action of Markov shift and adic transformation. Dans *Representation theory and dynamical systems*, pages 231–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[88] V. T. Sós. On the distribution mod 1 of sequences $n\,\alpha$. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 1:127–134, 1958.

[89] W. P. Thurston. *Groups, tilings and finite state automata.* Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in *AMS Colloquium lectures*, 1989.

[90] A. M. Vershik. Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 259(3):526–529, 1981. English translation: *Soviet Math. Dokl.* 24(1) :97–100, 1981.

[91] A. M. Vershik et A. N. Livshits. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics. Dans *Representation theory and dynamical systems*, pages 185–204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[92] P. Walters. *An introduction to ergodic theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

Notations

$\mathcal{A}$	Ensemble de lettres, généralement égal à $\{1, \ldots, d\}$.
$\mathcal{A}^*$	Ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$	Ensemble des suites sur $\mathcal{A}$ indexées par $\mathbb{M}$, avec $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$.
α	Valeur propre dominante ou formelle de $\mathbf{M}_\sigma$.
α_i	Valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$.
(a)	Ensemble des étiquettes des chemins de l'automate des préfixes-suffixes qui partent du sommet a.
$\hat{\beta}$	Plongement du nombre β dans le produit des complétés d'un corps de nombre pour toutes les topologies $\mathcal{I}$-adiques.
$\mathcal{C}$	Ensemble des chiffres qui étiquettent l' automates arithmétique.
d	Cardinal de l'alphabet $\mathcal{A}$.
$\mathcal{D}$	Sous-shift de type fini associé à l'automate des préfixes-suffixes.
$\mathcal{D}_\varepsilon$	Chemins de l'automate des préfixes-suffixes qui ont leurs préfixes ou leurs suffixes vides à partir d'un certain rang.
$\mathcal{D}_{min}$	Chemins de l'automate des préfixes-suffixes qui ont tous leurs préfixes vides.
$\mathcal{D}_{max}$	Chemins de l'automate des préfixes-suffixes qui ont tous leurs suffixes vides.
$\mathcal{D}'$	Ensemble des chemins non symétriques de l'automate d'injectivité.
$\widetilde{\mathcal{D}}$	Sous-shift bilatéral associé à l'automate des préfixes-suffixes.
δ_k	Application chiffre associée à la valeur propre α_k.
δ	Application chiffres à valeur dans $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.
e	Etiquette d'une arête ou d'un chemin de l'automate des préfixes-suffixes.
ε	Mot vide de $\mathcal{A}^*$.
$\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$	Vecteurs.
$e(\mathcal{I})$	Valuation de p dans l'idéal $\mathcal{I}$, où $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
$< \mathbf{e}, \mathbf{f} >$	Produit scalaire, égal à ${}^t\overline{\mathbf{e}}\,\mathbf{f}$.
$f(\mathcal{I})$	Degré résiduel de $\mathcal{I}$, égal à card $(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$.
$\mathcal{F}$	Fractal de Rauzy associé à une substitution.
$\mathcal{F}_i$	Partie du fractal de Rauzy correspondant au cylindre $[i]$.
F_α	Représentation formelle de Ω selon la valeur propre α.
F_p	Représentation p-adique de Ω.
$F_{\mathcal{I}}$	Représentation $\mathcal{I}$-adique de Ω.
F_{glob}	Représentation globale du système.

$\mathcal{G}$	Graphe ou automate.
$\mathcal{G}_a$	Graphe arithmétique global.
γ	Partition de Ω selon les préfixe-suffixes.
Γ	Développement en préfixes-suffixes.
$\mathcal{H}$	Hyperplan.
h_{glob}	Homothétie qui correspond à l'action de σ sur la représentation globale.
$i_{\mathcal{L}}$	Isomorphisme de $\mathbb{T}^{d-1}$ sur $(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s)/\mathcal{L}$.
$\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$	Idéaux premiers d'un corps de nombres.
$\widetilde{\mathcal{I}}$	Unique idéal premier d'un corps $\mathcal{I}$-adique.
$J_{\hat{\beta}}$	Projection sur la direction $\hat{\beta}$ de l'espace d'arrivée de la représentation p-adique F_p.
$\mathbb{K}$	Corps de nombres, généralement le corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$.
$\widetilde{\mathbb{K}}$	Complété de $\mathbb{K}$ pour une topologie $\mathcal{I}$-adique.
$\mathbf{l}(W)$	Abélianisé du mot fini W.
$\mathcal{L}(w), \mathcal{L}(\Omega)$	Langage du mot w ou du système substitutif Ω.
$\mathcal{L}$	Réseau de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ engendré par les vecteurs $\delta(k) - \delta(d)$.
Λ	Recouvrement d'un compact X.
$\mathbf{M}_\sigma$	Matrice d'indicence de la substitution σ.
$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$	Matrice du sous-shift de type fini $\mathcal{D}$.
$\mathbf{M}_{diag}$	Matrice des valeurs propres contractantes de σ, de taille $r+s-1$.
μ_Ω	Mesure uniquement ergodique de Ω.
$\mu_{\mathcal{I}}$	Mesure de Haar $\mathcal{I}$-adique.
μ_{max}	Mesure d'entropie maximale sur le sous-shift de type fini $\mathcal{D}$.
$\mu_{\mathcal{F}}$	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.
$\mu_{\mathcal{E}}$	Mesure de Haar sur l'espace d'arrivée de la représentation globale.
$\mathcal{N}$	Ensemble négligeable.
$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$	Anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{K}$.
$\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$	Anneau des entiers du completé $\widetilde{\mathbf{K}}$.
Ω	Système dynamique substitutif.
Ω_{per}	Ensemble des mots σ-périodiques du système substitutif associé à σ.
p	Nombre premier ou préfixe d'image de lettre par une substitution.
$\mathcal{P}$	Ensemble des découpages (p, a, s) des images de lettres par une substitution sous la forme préfixes- suffixes.
$\varphi_{\mathcal{L}}$	Représentation torique d'un système substitutif.
φ	Représentation géometrique dans $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.
$\widetilde{\phi}$,$\widetilde{\phi}_k$	Représentation géometrique du sous-shift bilatéral $\widetilde{\mathcal{D}}$.
$p_{\mathcal{H}}$	Plongement de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ dans l'hyperplan contractant de $\mathbf{M}_\sigma$.
ψ	Représentation arithmétique des systèmes non unimodulaires.
$\mathbb{Q}_p$	Corps des nombres p-adiques.
q	Préfixe d'image de lettre par une substitution.
$q_{\mathcal{H}}$	Projection sur l'hyperplan contractant de $\mathbb{R}^d$ parallèlement à la direction dilatante.
r	Nombre de valeurs propres réelles de $\mathbf{M}_\sigma$ ou suffixe d'image de lettre par la substitution.
$\mathcal{R}$,$\mathcal{R}'$	Relations d'équivalence sur $\mathcal{P}$ relatives à la connexité des fractales de Rauzy.

S	Décalage sur un système substitutif.
s	Moitié du nombre de valeurs propres complexes de $\mathbf{M}_\sigma$ ou suffixe d'image de lettre par une substitution.
σ	Substitution.
σ_1	Substitution de Fibonacci$\sigma_1(1) = 12$, $\sigma_2(2) = 1$.
σ_2	Substitution de Rauzy $\sigma_2(1) = 1112$, $\sigma_2(2) = 12$.
σ_3	Substitution de Tribonacci $\sigma_3(1) = 12$, $\sigma_3(2) = 13$, $\sigma_3(3) = 1$.
σ_4	$\sigma_4(1) = 21$, $\sigma_4(2) = 13$, $\sigma_4(3) = 1$.
σ_5	Substitution de Tribonacci renversée $\sigma_5(1) = 12$, $\sigma_5(2) = 31$, $\sigma_5(3) = 1$.
σ_6	$\sigma_6(1) = 12$, $\sigma_6(2) = 13$, $\sigma_6(3) = 132$.
σ_7	$\sigma_7(1) = 11223$, $\sigma_7(2) = 123$, $\sigma_7(3) = 2$.
σ_8	$\sigma_8(1) = 11222$, $\sigma_8(2) = 1222$.
T	Décalage sur le sous-shift de type fini $\mathcal{D}$.
$\mathbb{T}^n$	Tore de dimension n, c'est-à-dire le groupe quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.
τ_i	Morphismes galoisiens du corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$, ou leur restriction à son corps de rupture.
τ	Successeur sur $\mathcal{D}$.
θ	Désubstitution.
$\mathcal{T}$	Pseudo-échange de morceaux dans un fracal de Rauzy.
u	Mot bi-infini périodique pour la substitution.
U_T	Opérateur unitaire.
$\mathbf{u}_i$	Vecteur propre à droite de $\mathbf{M}_\sigma$ pour la valeur propre α_i.
$\mathcal{U}$	Uplet admissible.
$\mathbf{v}_i$	Vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ pour la valeur propre α_i.
$v_\mathcal{I}, \lvert\cdot\rvert_\mathcal{I}$	Valuation et valeur absolue $\mathcal{I}$-adiques.
$\mathcal{V}_a$,$\mathcal{V}_c$	Sommets des automates arithmétiques et d'injectivité.
w, v	Mot infini ou bi-infini.
W	Mot fini.
$\lvert W\rvert$	Longueur du mot fini W.
$[W]$, $< W >$	Cylindre : ensemble des mots d'un système symbolique débutant par W.
$\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$	Polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de σ.
$\mathbb{Z}_n$	Anneau des entiers n-adiques.

Résumé : On cherche à savoir si les systèmes dynamiques symboliques engendrés par une substitution de type Pisot sont des systèmes dynamiques standards ou totalement nouveaux, en déterminant lesquels sont isomorphes à une translation sur un groupe compact.
On obtient une représentation combinatoire des systèmes substitutifs primitifs en montrant que chacun est isomorphe à une transformation adique sur le support d'un sous-shift de type fini défini naturellement à partir de la substitution. Cette représentation combinatoire permet d'exhiber un système de numération sous-jacent à la substitution et de représenter géométriquement les substitutions par une translation sur un tore. Ainsi, tout système substitutif de type Pisot admet pour facteur topologique une translation torique. Si la substitution est unimodulaire et vérifie une certaine condition combinatoire, cette représentation torique est la projection sur le tore d'une représentation dans l'espace euclidien par un échange de morceaux dans un compact auto-similaire appelé fractal de Rauzy de la substitution.
Les propriétés du système de numération sous-jacent à la substitution permettent de donner une condition nécessaire et suffisante effective en terme d'automates pour que le fractal de Rauzy de la substitution engendre un pavage régulier de l'espace euclidien. Ceci produit une condition suffisante pour qu'une système substitutif de type Pisot soit isomorphe à une translation torique. Ceci permet de définir des partitions de Markov explicites pour une classe d'automorphismes du tore.
Au sujet des systèmes non unimodulaires, on montre qu'une addition sur le groupe des entiers p-adiques est facteur d'un système substitutif dont la matrice d'incidence a un polynôme caractéristique irréductible si et seulement si cette matrice est nilpotente modulo p. Ceci laisse entrevoir la possibilité d'obtenir des partitions de Markov explicites pour l'extension naturelle d'une classe d'endomorphismes du tore.

Mots-clés : système dynamique symbolique, substitution, transformation adique, facteurs équicontinus, fractal de Rauzy, pavage, partition de Markov, translation p-adique.

Title: Geometric, combinatorial and arithmetic representations of substitution dynamical systems of Pisot type.

Abstract: The aim of this work is to determine whether symbolic dynamical systems generated by a substitution of Pisot type are or are not totally new dynamical systems, by looking for which of them are measure-theoretically isomorphic to a translation on a compact group.
A combinatorial representation of a primitive substitutive dynamical system is obtained by constructing a natural and explicit isomorphism with an adic transformation on the support of a subshift of finite type. This combinatorial representation allows one to exhibit a numeration system linked with the substitution and to geometrically represent substitutive systems by a toral translation. Thus, every substitutive dynamical system of Pisot type admits as a topological factor a toral translation. If the substitution is unimodular and verifies a certain combinatorial condition, the toral representation is the projection onto the torus of an euclidean representation by an exchange of domains in an selfsimilar compact set called the Rauzy fractal of the substitution.
The properties of the numeration system linked with the substitution allow one to give a necessary and sufficient condition for the Rauzy fractal of the substitution to generate a periodic tiling of the Euclidean space. This condition is explicit in terms of graphs and produces a sufficient condition for a substitutive system of Pisot type to be isomorphic to a toral translation. This permits to construct explicit Markov partition for a class of toral automorphisms.
For non-unimodular systems, it is proved that a translation on the group of p-adic integers is a factor of a dynamical system generated by a substitution the incidence matrix of which has an irreducible polynomial, if and only if this matrix is nilpotent modulo p. These results suggest that it will be possible to obtain explicit Markov partition for the natural extension of a class of toral endomorphisms.

Keywords: symbolic dynamical system, substitution, adic transformation, equicontinuous factor, Rauzy fractal, tilings, Markov partition, p-adic translation.

Laboratoire : Institut de Mathématiques de Luminy, CNRS-UPR 9016, 163 avenue de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 09