Mesure de plausibilité pour le raisonnement par défaut

Yves Moinard
IRISA, Campus de Beaulieu
35042 RENNES-Cedex FRANCE
tél.: 02 99 84 73 13
courriel: moinard@irisa.fr

Résumé

Friedman et Halpern ont introduit la notion d'inférence par plausibilité qui permet d'unifier de nombreuses approches du raisonnement par défaut. Cependant, la version qu'ils utilisent est parfois limitée dans sa puissance d'expression, en ce qui concerne le raisonnement par défaut. Une modification naturelle de la version originale produit une notion qui permet de traduire davantage de formalismes déjà connus. En particulier, tous les exemples étudiés dans les papiers introductifs de Friedman et Halpern peuvent également être exprimés à l'aide de cette nouvelle version. Par contre, il existe des formalismes connus et importants qui échappent à la version originale, et qui peuvent être traduits à l'aide de la nouvelle version. Cela confirme et accentue l'intérêt de l'inférence par plausibilité, la seule différence entre les deux versions étant que la nouvelle définition est encore un peu plus simple. Ce texte étudie les propriétés du raisonnement de ces deux versions, ce qui au passage complète la liste des propriétés déjà connues pour la version originale.

Abstract

Friedman and Halpern have introduced the notion of inference by plausibility, which encompasses various approaches of default reasoning. However, their version is somehow limited in its expressivity. A natural modification of the original definition gives a formalism which can encompass a greater number of formalisms. In particular, all the examples studied in the paper of Friedman and Halpern can be expressed in this variant also, and other formalisms, which escaped the original version, fall prey to the new one. This confirms the interest of the notion of plausibility measures, the only difference being a small simplification in the definitions. While giving these results, we make a comparative study of the properties satisfied by the original version and those satisfied by the new one. Thus, we complete also the list of the known properties of the original inference by plausibility.

Mots clé:

Représentation de connaissances,
Formalisation des raisonnements et de la cognition,
Démonstration automatique.

1 Introduction

Friedman et Halpern ont introduit la notion d'inférence par plausibilité, et montré qu'elle généralise de nombreux formalismes connus de raisonnement par défaut [3, 4, 6]. Il se trouve que certains formalismes échappent à cette notion, uniquement à cause d'une particularité de la définition choisie: Halpern et Friedman considèrent comme un cas à part les formules ayant une plausibilité nulle (ou $\perp$), et cela a pour conséquence que si une formule ψ et sa négation sont deux conséquences (par défaut) d'une donnée φ, alors la formule **faux**, et donc toute formule, est conséquence de φ. Cette propriété du raisonnement par plausibilité, appelée ici (P0), n'est pas satisfaite en général en raisonnement par défaut, du moins dans les cas où on ne requiert pas la règle du "ET". Quand on accepte la règle du "ET" (si on peut déduire deux formules ψ_1 et ψ_2, alors on peut aussi déduire leur conjonction $\psi_1 \wedge \psi_2$), on accepte aussi (P0). Mais il se trouve que l'inférence par plausibilité permet de rejeter la règle du "ET", ce qui lui confère une généralité intéressante dans de nombreux cas. Il est alors très contre-productif de restreindre cette inférence en lui imposant la règle (P0). Rappelons que la formulation originale du raisonnement par défaut de Reiter [10] n'accepte ni le "ET" ni (P0), et qu'il en est ainsi de nombreuses variantes issues de ce formalisme. En termes de *défauts normaux*, (P0) signifie que l'on interdit la pluralité des extensions, c'est-à-dire que l'on exige la règle du "ET". Les défauts normaux étant les plus naturels et étant parmi les plus utilisés, ce cas illustre bien le caractère extrêmement contraignant de l'acceptation de (P0), qui sous-entend en fait l'acceptation du "ET".
On peut simplifier la définition de l'inférence par plausibilité de façon à ne plus particulariser les formules

de plausibilité nulle. Cette nouvelle version permet de traduire un grand nombre de formalismes de raisonnement par défaut, qui échappaient à la version originale. Tous les exemples de raisonnement par défaut considérés en [4] peuvent être traduits dans cette nouvelle version, tandis qu'il est difficile de trouver un exemple, présentant un intérêt pratique, qui soit traduisible dans l'ancienne version et pas dans la nouvelle. Afin de justifier cette affirmation, ce papier décrit les cas où une des deux version de l'inférence par plausibilité peut être traduite en termes de l'autre.
Le cadre logique et les définitions originales sont décrits en en 2. En 3 sont données des propriétés de l'inférence par plausibilité, ce qui montre pourquoi des formalismes de raisonnement par défaut échappent à cette notion. En 4 une nouvelle version plus simple de l'inférence par plausibilité est introduite et brièvement étudiée, ce qui montre qu'elle accepte de plus nombreux formalismes de raisonnement par défaut. En 5 la comparaison entre les deux versions est développée, et les conditions de transformations d'une des deux inférences en termes de l'autre son décrites. Cela démontre que tous les exemples de raisonnement par défaut considérés par Halpern et Friedman peuvent aussi être traduits par la nouvelle version.

2 Inférence par plausibilité (l'originale)

Les auteurs Friedman et Halpern ne considèrent en [3, 4] que le cas propositionnel, et que les inférences à partir d'un seule formule (ou d'un nombre fini de formules), et nous les suivrons sur ces points, afin d'éviter des complications techniques. Soit **L** un langage propositionnel, assimilé à l'ensemble de ses formules classiques. Un nouveau connecteur logique $\rightarrow$ est introduit: $\varphi \rightarrow \psi$ signifie que ψ peut être déduit "par défaut" de ψ *("si φ, alors typiquement ψ")*. Les auteurs ne considèrent que des formalismes satisfaisant l'"équivalence logique à gauche" (LLE) (pour "left logical equivalence"), l'"affaiblissement à droite" (RW) (pour "right weakening") et la "réflexivité" (REF), définies par Kraus, Lehmann et Magidor [7]:

(LLE) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Leftrightarrow \varphi'$, alors de $\varphi \rightarrow \psi$, inférer $\varphi' \rightarrow \psi$.
(RW) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \psi'$, alors de $\varphi \rightarrow \psi$, inférer $\varphi \rightarrow \psi'$.
(REF) $\varphi \rightarrow \varphi$.

On peut alternativement définir une inférence par défaut grâce à une application f de **L** dans l'ensemble des ensembles de formules $\mathcal{P}(\mathbf{L})$:
$\psi \in f(\varphi)$ ssi $\varphi \rightarrow \psi$, c'à-d. $f(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, \varphi \rightarrow \psi\}$.
Ce texte utilise deux inférences par plausibilité, qu'il convient de distinguer. On utilisera deux connecteurs $\xrightarrow{\text{FH}}$ et $\xrightarrow{\text{N}}$, ou deux applications f_{FH} et f_N.

(RW) implique l'"équivalence logique à droite" (RLE) (pour "right logical equivalence"): si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Leftrightarrow \psi'$, alors de $\varphi \rightarrow \psi$, on infère $\varphi \rightarrow \psi'$. Comme (LLE) et (RW) sont toujours supposés, on identifie dans ce texte une formule à sa classe d'équivalence. Les formules **vrai** et **faux** vérifient donc: **vrai** $= \varphi \vee \neg\varphi$, **faux** $= \varphi \wedge \neg\varphi$, où φ est n'importe quelle formule de **L**.
Identifier une formule à sa classe d'équivalence ne rend compte que de (LLE) et (RLE), mais pas complètement de (RW). En termes de f, (RW) est: Si $\vdash_{\mathbf{L}}$ $\psi \Rightarrow \psi'$ et $\psi \in f(\varphi)$, alors $\psi' \in f(\varphi)$. Cela signifie que l'ensemble $f(\varphi)$ n'est pas un sous-ensemble quelconque de **L**, mais une union de théories appelée ici une *U-théorie* [pour "union de théories"] où une *théorie* $\mathcal{T}$ est un ensemble de formules déductivement clos: $\mathcal{T} = \{\varphi \in \mathbf{L}, \mathcal{T} \vdash_{\mathbf{L}} \varphi\}$. Appelons **T** l'ensemble de toutes les théories de **L** et **U** l'ensemble de toutes les U-théories. Bien sûr on a $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{U}$.
Ainsi, f est une application de **L** dans **U**.
Ne considérer que ces applications revient à ne considérer que les connecteurs $\rightarrow$ satisfaisant (LLE) et (RW).
Si on exige aussi $\varphi \in f(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathbf{L}$, on traduit également (REF).
Dans certains cas, on doit aussi exiger les règles (ET), (OU), monotonie cumulative (CM) (pour "cumulative monotony") et transitivité cumulative (CT) (pour "cumulative transitivity"):

(ET) De $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \psi'$, inférer $\varphi \rightarrow \psi \wedge \psi'$.
(OU) De $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi' \rightarrow \psi$, inférer $\varphi \vee \varphi' \rightarrow \psi$.
(CM) De $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \psi'$, inférer $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi'$.
(CT) De $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi'$, inférer $\varphi \rightarrow \psi'$.

Voici les traductions en termes de l'application f. f satisfait ici (LLE), (RW) et (REF), et donc f est une application de **L** dans **U** satisfaisant $\varphi \in f(\varphi)$.

(ET) f est une application de **L** dans **T**.
(OU) $f(\varphi) \cap f(\varphi') \subseteq f(\varphi \vee \varphi')$.
(CM) Si $\psi \in f(\varphi)$ alors $f(\varphi) \subseteq f(\varphi \wedge \psi)$.
(CT) Si $\psi \in f(\varphi)$ alors $f(\varphi \wedge \psi) \subseteq f(\varphi)$.

Ces propriétés sont maintenant bien connues. Il faut toutefois noter que (REF), (CM) et (CT) sont surtout pertinentes dans le cas où (ET) est satisfaite. Pour les formalismes du raisonnement par défaut qui ne satisfont pas (ET) il est utile de considérer les propriétés suivantes, introduites en [8]: "réflexivité forte" (sREF) (pour "strong reflexivity"), "monotonie cumulative restreinte" (rCM) (pour "restricted cumulative monotony"), et "transitivité cumulative forte" (sCT) (pour "strong " cumulative transitivity"):

(sREF) Si $\psi \in f(\varphi)$, alors $\varphi \wedge \psi \in f(\varphi)$
c'à-d., si $\varphi \rightarrow \psi$, alors $\varphi \rightarrow \varphi \wedge \psi$.

(sCT) Si $\psi \in f(\varphi)$ et $\psi' \in f(\varphi \wedge \psi)$, alors $\psi \wedge \psi' \in f(\varphi)$ c'à-d., si $\varphi \to \psi$ et $\varphi \wedge \psi \to \psi'$, alors $\varphi \to \psi \wedge \psi'$.

(rCM) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$ et $\psi \in f(\varphi')$ alors $\psi \in f(\varphi \wedge \varphi')$ c'à-d., si $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$, et $\varphi' \to \psi$ alors $\varphi \wedge \varphi' \to \psi$.

Évidemment, (ET) + (REF) implique (sREF), (CM) implique (rCM), et, par (RW), (sREF) implique (REF) et (sCT) implique (CT).

Définition 2.1 Une *d-application* ("d" pour "défaut") est une application $f : \mathbf{L} \rightsquigarrow \mathbf{U}$ satisfaisant (sREF).

Ainsi, une d-application est une inférence satisfaisant (LLE), (RW) et (sREF). On se restreint ici au cas d'inférence à partir d'une seule formule, mais cette définition pourrait être étendue aux ensembles infinis de formules, comme dans [8]. Les défauts de Reiter et la plupart de leurs variantes, peuvent être étudiés comme des d-applications. En effet, l'ensemble des extensions (au sens de Reiter ou des variantes issues des définitions de Reiter) est une U-théorie, et la propriété (sREF) est satisfaite par ces formalismes.

Pour toute d-application, (CT) et (sCT) sont équivalentes, mais il est souvent utile de considérer la formulation (sCT). Une autre propriété intéressante des d-applications est que, en présence de la règle (ET) (par exemple en terminologie de Reiter, quand on considère l'intersection de toutes les extensions: "raisonnement prudent"), (rCM) et (CM) sont équivalentes.

Voici maintenant les définitions de l'inférence par plausibilité introduite en [3, 4]:

Un *espace de plausibilité* est un tuple $(W, \mathbf{F}, Pl, D, \leq)$ où W et D sont des ensembles, $\mathbf{F}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(W)$ des sous-ensembles de W qui est fermé pour la réunion et le complémentaire par rapport à W, Pl est une application de $\mathbf{F}$ dans D, l'ensemble D étant muni d'une relation d'ordre partiel $\leq$. La relation d'ordre strict $<$ est définie comme d'habitude par $d_1 < d_2$ si $[d_1 \leq d_2$ et $d_2 \not\leq d_1]$ c'à-d., si $[d_1 \leq d_2$ et $d_1 \neq d_2]$.
Pl doit de plus satisfaire la condition (A1):

(A1) Si $A \subseteq B$ alors $Pl(A) \leq Pl(B)$.

Si on désigne $Pl(\emptyset)$ par $\perp$ et $Pl(W)$ par $\top$, on a donc pour tout $d \in Pl(\mathbf{F})$: $\perp \leq d \leq \top$.

Une *structure de plausibilité* PL dans $\mathbf{L}$ est un espace de plausibilité où l'ensemble des *mondes* W est l'ensemble M de toute les interprétations classiques pour $\mathbf{L}$. Pour toute formule $\varphi \in \mathbf{L}$, $[[\varphi]]$ désigne l'ensemble des éléments de W $(= M)$ qui satisfont φ: $[[\varphi]] = \{w \in W, w \models_{\mathbf{L}} \varphi\}$. L'ensemble $\mathbf{F}$ des sous-ensembles de W considérés est ici (comme en [4]) l'ensemble $\{[[\varphi]], \varphi \in \mathbf{L}\}$.

La définition originale de Friedman et Halpern est apparemment plus générale, puisque W est un ensemble de "copies d'éléments" de M. La notion d'inférence par plausibilité n'est toutefois pas modifiée par cette simplification. En effet, il est inutile de considérer dans W des copies multiples d'un élément de M, puisqu'on ne considère ensuite que les sous-ensembles $[[\varphi]]$ de W. Ainsi, tout ensemble dans W de "copies multiples" d'un $m \in M$ peut être écrasé en un singleton, puisque soit toutes les copies apparaissent dans $[[\varphi]]$, soit aucune. De même, pour le cas de "zéro copie" de certains éléments de M, c'à-d. si W est un sous-ensemble strict de M, on peut définir une mesure de plausibilité équivalente sur l'ensemble M tout entier. On ne donne ici que l'intuition de la définition de Pl_M à partir de Pl_W: pour tout sous-ensemble M_i de M, $Pl_M(M_i) = Pl_W(M_i \cap W)$ (les définitions formelles précises utilisent aussi des fermetures topologiques dans M). Il est facile de vérifier que (A1) est préservé, de même que les autres propriétés d'une inférence par plausibilité introduites dans ce texte, et que l'inférence par plausibilité elle-même est préservée.
Ainsi, Pl pourrait être défini directement comme une application de $\mathbf{L}$ dans D, et on se permettra souvent la simplification d'écriture correspondante: $Pl(\varphi) = Pl([[\varphi]])$. Voici l'expression de (A1) avec cette convention d'écriture:

(A1) Si $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Rightarrow \psi$, alors $Pl(\varphi) \leq Pl(\psi)$.

Définition 2.2 [3, 4] L'*inférence par plausibilité* (par Friedman et Halpern) est définie ainsi: étant donnée une structure de plausibilité PL, on définit
$PL \models \varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$ si soit $Pl(\varphi) = \perp$,
soit $Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$.
On définit l'application f_{FH} de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$, associée à PL:
$f_{FH}(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, PL \models \varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi\}$.

Propriété 2.1 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (LLE), (RW) et (sREF), et donc est une d-application.*

Démonstration: Comme (LLE) et (RW) figurent dans les textes originaux, il reste à démontrer (sREF):
On a $\varphi \wedge (\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge \psi$ et $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge \neg\psi$.
Si $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$, alors soit $Pl(\varphi) = \perp$ soit $Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$. On obtient toujours $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \varphi \wedge \psi$. $\square$

Ce résultat montre que l'inférence par plausibilité est effectivement bien adaptée au raisonnement par défaut. De plus, il se trouve que de nombreuses propriétés importantes du raisonnement par défaut ont une

traduction simple en termes de Pl. Comme l'on démontré Halpern et Friedman, c'est le cas des règles (ET) et (OU) [qui sont falsifiées par une inférence par plausibilité sans condition] et du système **P** de [7].
Rappelons que le système **P** est défini comme respectant les règles (ET), (OU) et (CM) [avec (LLE), (RW) et (sREF) qui, en présence de (ET) et (RW), équivaut à (REF)]. Ce système satisfait aussi la règle (CT). Le fait que l'inférence par plausibilité contienne le système **P** est important puisque l'on connaissait déjà de nombreuses définitions et sémantiques pour ce système: inférence préférentielle [7], ϵ-entailment [9], inférence possibiliste [1], etc... (cf [4]).

Il y a cependant un comportement étrange, remarqué par les auteurs: en cas de (ET), l'inférence par plausibilité satisfait (OU), sauf éventuellement pour le "cas trivial" $Pl(\varphi \vee \varphi') = \bot$. Ce cas particulier est si déroutant que les auteurs suggèrent d'ajouter une propriété particulière, appelée (A3), à Pl, afin de supprimer cette exception dérangeante. Les auteurs introduisent les ***structures de plausibilité qualitatives*** qui sont des structures de plausibilité satisfaisant une propriété appelée (A2), qui est la traduction sémantique de la règle (ET), ainsi que (A3). Ils démontrent que les structures de plausibilité qualitatives fournissent une nouvelle sémantique pour le système **P**.
En ce qui concerne le raisonnement par défaut en l'absence de la règle (ET), Friedman et Halpern ne décrivent en [4] aucun système connu qui pourrait être traduit en termes d'inférence par plausibilité. C'est dommage, puisque le raisonnement par défaut en l'absence du (ET) est reconnu comme nécessaire dans de nombreuses situations, et puisque l'inférence par plausibilité, qui ne possède pas la règle (ET) au départ, semble bien adaptée aussi pour le raisonnement par défaut sans (ET).

3 D'autres propriétés de cette inférence par plausibilité

Propriété 3.1 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (rCM).*

Démonstration: Supposons $\vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \varphi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. Alors soit $Pl(\varphi') = \bot$, soit $Pl(\varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$. Si $Pl(\varphi') = \bot$, par (A1) on a $Pl(\varphi' \wedge \varphi) = \bot$, donc $\varphi \wedge \varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. Par hypothèse, $\varphi \wedge \varphi' \wedge \psi = \varphi' \wedge \psi$, et par (A1) on a $Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi) \leq Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$. Donc, si $Pl(\varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi' \wedge \neg\psi)$, on a $Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi)$, donc $\varphi \wedge \varphi' \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. $\square$

Cette propriété de l'inférence par plausibilité explique le résultat suivant, considéré comme "surprenant" en [4]: en présence de (ET), l'inférence par plausibilité satisfait aussi (CM). En effet, pour toute d-application (c'à-d. pour toute application bien adaptée au raisonnement par défaut en son sens général), (rCM) + (ET) implique (CM).
Cette propriété rappelle aussi le comportement de la X-logique, que l'on définit maintenant:

Définition 3.1 [12, 11] Pour tout $X \subseteq \mathbf{L}$, on définit ainsi la *X-application* f_X de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$: $\varphi \in f_X(\psi)$ ssi $Th(\psi \wedge \varphi) \cap X \subseteq Th(\psi)$.
On note $\psi \rightarrow_X \varphi$ pour $\varphi \in f_X(\psi)$.

Cette notion a été utilisée par Suchenek [12], afin de faciliter le calcul de la circonscription et d'autres formalismes de minimisation. Comme la circonscription satisfait (ET), Suchenek n'a considéré que les cas où f_X satisfait (ET). Cependant, comme remarqué par [11], généralement, les X-applications falsifient (ET).
Le résultat suivant résume les principales propriétés des X-applications.

Propriété 3.2 *Toute X-application est une d-application qui satisfait aussi (CT), (OU) et (rCM).*

Les démonstrations sont immédiates (voir [8]).
Bien que les X-applications soient des d-applications satisfaisant (rCM), tout comme les inférences par plausibilité, et que plusieurs autres propriétés des X-applications soient satisfaites par des inférence par plausibilité particulières, il est impossible de traduire les X-logiques en termes d'inférence par plausibilité. Cette impossibilité provient de la propriété suivante:

(P0) Si $\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \neg\psi$, alors $\varphi \rightarrow$ **faux**,
c'à-d., si $\{\psi, \neg\psi\} \subseteq f(\varphi)$ alors **faux** $\in \mathbf{f}(\varphi)$.

Si (RW) est satisfait, donc en particulier pour toute d-application, on a $\varphi \rightarrow$ **faux** ssi $\varphi \rightarrow \sigma$ pour chaque $\sigma \in \mathbf{L}$ [c'à-d. **faux** $\in \mathbf{f}(\varphi)$ ssi $f(\varphi) = \mathbf{L}$]. Ainsi, en présence de (RW), (P0) peut être formulée comme une équivalence:

(P0) ($\varphi \rightarrow \psi$ et $\varphi \rightarrow \neg\psi$) ssi ($\varphi \rightarrow$ **faux**).

(ET) implique (P0), précisément (P0) est un (ET) restreint aux formules contradictoires. Il semble étrange d'exiger (P0) en l'absence de (ET), c'est pourtant ce que fait l'inférence par plausibilité introduite jusqu'ici:

Propriété 3.3 *Toute inférence par plausibilité satisfait (P0).*

Démonstration: Si $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$ et $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \neg\psi$, alors soit $Pl(\varphi) = \bot$, soit $[Pl(\varphi \wedge \psi) > Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ et $Pl(\varphi \wedge \neg\psi) > Pl(\varphi \wedge \psi)]$. Le second terme de l'alternative est impossible car $>$ est un ordre strict, donc on a

$Pl(\varphi) = \perp$, et $\varphi \xrightarrow{\text{FH}}$ **faux**. □

Voici une conséquence immédiate:

Corollaire 3.4 *Il existe des X-applications qui ne peuvent pas être traduites en termes d'inférence par plausibilité comme défini en Définition 2.2.*

Démonstration: Voici une X-application qui falsifie (P0):

Exemple 3.1 *Le vocabulaire a deux symboles propositionnels a et b, X est le singleton $\{a \wedge b\}$. On a $f_X(\neg a) = f_X(\neg a \vee b) = Th(\neg a \wedge b) \cup Th(\neg a \wedge \neg b)$, et donc f_X falsifie (P0) [et a fortiori (ET)]:*
$\neg a \rightarrow_X \neg a \wedge b$, $\neg a \rightarrow_X \neg a \wedge \neg b$, donc, par (RW), $\neg a \rightarrow_X a \vee \neg b$, mais $\neg a \not\rightarrow_X$ **faux**.

Cet exemple très simple n'est pas une exception, et on peut considérer que la plupart des X-applications utiles qui falsifient (ET) falsifient aussi (P0). Cependant, les X-applications qui falsifient (ET) sont utiles (en particulier pour faciliter le calcul) pour le raisonnement par défaut [11, 8, 2]. □

La propriété (P0) est en fait la seule raison qui interdit la traduction des X-logiques: toute X-application satisfaisant (P0) est facilement traduite en termes de la plausibilité vue jusqu'ici, comme démontré ci-dessous.

Voici un autre argument fort "contre (P0)". Il est inattendu, du point de vue des propriétés du raisonnement, que l'extension de (P0) à plus de deux formules ne soit plus satisfaite par l'inférence f_{FH}, comme le montre l'exemple suivant, introduit dans [4, p.658] dans un autre but:

Exemple 3.2 *La mesure de plausibilité est ici une probabilité Pr, donc elle est définie par ses valeurs pour les formules dont la théorie est complète. Le vocabulaire a deux symboles propositionnels q et r. $Pr(q \wedge r) = 0.2$, $Pr(q \wedge \neg r) = Pr(\neg q \wedge r) = 0.4$, [donc $Pr(\neg q \wedge \neg r) = 0$]. Donc, on a $Pr(q) = Pr(r) = 0.6$, $Pr(q \not\Leftrightarrow r) = 0.8$, $Pr(q \vee r) = Pr(\mathbf{vrai}) = 1$, etc... Comme on a* **vrai** *$\xrightarrow{\text{FH}} \varphi$ ssi $Pr(\varphi) > 0.5$, on a $f_{FH}(\mathbf{vrai}) = Th(q) \cup Th(r) \cup Th(q \not\Leftrightarrow r)$ [on a aussi $f_{FH}(q \vee r) = f_{FH}(\mathbf{vrai})$]. Donc, on a, avec $\varphi = \mathbf{vrai}$, ou $\varphi = q \vee r$: $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} q$, $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} r$, $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} (q \not\Leftrightarrow r)$, avec $q \wedge r \wedge (q \not\Leftrightarrow r) \vdash_{\mathbf{L}}$* **faux**, *tandis que l'on* n'a pas $\varphi \xrightarrow{\text{FH}}$ **faux**. *(P0) ne peut pas être étendue à plus de deux formules.* □

(P0) signifie que f_{FH} n'est pas une application de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{U}$ tout entier, puisqu'on exclut de $\mathbf{U}$ les unions qui contiennent deux théories inconsistantes. Ainsi, dans le formalisme original de Reiter, on rejette les cas qui fournissent deux extensions inconsistantes (en particulier, cela exclut les défauts les plus naturels, les défauts normaux, sauf dans les cas simples avec une seule extension, il s'agit bien d'une restriction très sévère). Par contre, si l'inconsistance nécessite trois extensions, on admet ce cas! Un éventuel utilisateur de ce formalisme doit être conscient de ce comportement déroutant.

4 Une autre inférence par plausibilité

Nous allons démontrer que le manque d'expressivité de l'inférence par plausibilité, en ce qui concerne le raisonnement par défaut, provient de sa définition en termes d'alternative. En effet, si on supprime l'alternative, on obtient une notion d'inférence légèrement différente qui, pour ce qui concerne le raisonnement par défaut, est plus puissante, et permet de considérer davantage de formalismes que la définition originale.

Définition 4.1 L'*inférence par N-plausibilité* (N pour "naturelle") est définie ainsi, à partir d'une structure de plausibilité PL (dont la définition est inchangée):
$PL \models \varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ si $Pl(\varphi \wedge \psi) \geq Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$.
On définit l'application f_N de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{L})$, associée à PL, par:
$f_N(\varphi) = \{\psi \in \mathbf{L}, Pl \models \varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi\}$.

Comme avec la définition originale, on a:

Propriété 4.1 *L'inférence par N-plausibilité f_N est une d-application satisfaisant (rCM).*

Les démonstrations sont immédiates, et semblables aux démonstrations déjà données pour f_{FH}.

Comme pour les définitions originales, l'inférence par N-plausibilité peut falsifier (ET), (CT) et (OU). Cependant, le comportement est bien plus naturel qu'avec les définitions originales: avec f_N, (ET) implique (CT), qui implique (OU). Rappelons qu'avec f_{FH}, Friedman et Halpern ont montré que (ET) "implique presque" (OU), mais que (ET) n'implique pas (OU) en toute généralité, ce qui provoque un comportement difficile à appréhender pour un utilisateur.
Voici quatre propriétés utiles ici qu'une inférence par plausibilité peut satisfaire (ou pas):
A, B et C sont des sous-ensembles de W (dans $\mathbf{F}$) qui sont disjoints deux à deux ($A \cap B = \emptyset$,...).

(A2$_N$) Si $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A \cup C) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

(A3) Si $Pl(A) = Pl(B)) = \perp$, alors $Pl(A \cup B) = \perp$.

(A6$_N$) Si $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

(A7$_N$) Si $Pl(A) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$, alors $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$.

On conserve ici la numérotation déjà introduite par Friedman et Halpern dans [4], ce qui explique l'absence de (A4) et (A5), introduites par ces auteurs pour des propriétés non étudiées ici. L'indice $_N$ désigne les propriétés en $\geq$ au lieu de $>$. Les propriétés en $_N$ sont utiles pour f_N, et donc en général n'avaient pas été considérées par Halpern et Friedman, mais la propriété (A2) (donnée ci-dessous) associée à (A2$_N$), figure en [4]. (A6) et (A7 (données ci-dessous) et leurs associées respectives (A6$_N$) et (A7$_N$) sont nouvelles, (A3) figure en [4] pour f_{FH}, où elle joue un rôle important.

Il est immédiat de vérifier que (A2$_N$) implique (A6$_N$), qui implique (A7$_N$), qui implique (A3) [rappel: $Pl(B) = \perp$ ssi $Pl(\emptyset) \geq Pl(B)$]. Remarquons que si la plausibilité est une probabilité, alors (A3) est satisfaite.

On a les résultats suivants, où le *cas trivial du (OU)*, introduit par Friedman et Halpern, est défini comme suit en termes du connecteur $\rightarrow$:

(P3) Si $\varphi_1 \rightarrow$ **faux** et $\varphi_2 \rightarrow$ **faux** alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow$ **faux**.

Propriété 4.2 *1. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (ET) ssi Pl satisfait (A2$_N$).*

2. Une inférence f_N par plausibilité satisfait le cas trivial du (OU), aussi appelé (P3) ici, ssi Pl satisfait (A3).

3. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (CT) ssi Pl satisfait (A6$_N$).

4. Une inférence f_N par N-plausibilité satisfait (OU) ssi Pl satisfait (A7$_N$).

Démonstration: Si X est un élément de $\mathbf{F}$, on désigne par x la formule de $\mathbf{L}$ définie par $[[x]] = X$.
On donc $A \cap B = \emptyset$ ssi $\vdash_{\mathbf{L}} a \Rightarrow \neg b$.
1. Il suffit d'adapter (en la simplifiant) la démonstration originale donnée en [4] pour f_{FH} et (AND).
2. Immédiat (utiliser $\varphi \xrightarrow{\text{N}}$ **faux** ssi $Pl(\varphi) = \perp$).
3. $\Rightarrow$: f_N satisfait (sCT), A, B et C sont deux à deux disjoints dans $\mathbf{F}$, $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) \geq Pl(B)$. Soient les formules $\psi = a \vee b \vee c$, $\varphi_1 = a \vee b$ et $\varphi_2 = a \vee c$. On a $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 = a$ et $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 = \psi \wedge \neg\varphi_2 = b$. On a donc $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1$ et $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$ par hypothèse. Par (sCT), on obtient $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$, c'à-d. $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$: Pl satisfait (A6$_N$).
$\Leftarrow$: Pl satisfait (A6$_N$), ψ, φ_1 et φ_2 sont des formules telle que $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1$ et $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$. Soient les ensembles $A = [[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2]], B = [[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2]]$ et $C = [[\psi \wedge \neg\varphi_1]]$. Par hypothèse on a $Pl(A \cup B) \geq Pl(C)$ et $Pl(A) = Pl[[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2]] \geq Pl[[\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2]] = Pl(B)$. Par (A6$_N$), on a donc $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$, donc $Pl(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) \geq Pl(\psi \wedge (\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2))$, c'à-d. $\psi \xrightarrow{\text{N}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$: $\xrightarrow{\text{N}}$ satisfait (sCT), c'à-d. ici (CT).

4. $\Rightarrow$: f_N satisfait (OU), A, B et C sont deux à deux disjoints dans $\mathbf{F}$, $Pl(A) \geq Pl(B)$ et $Pl(A) \geq Pl(C)$. Soient les formules $\varphi = a \vee b$, $\varphi' = a \vee c$ et $\psi = a$. On a $\varphi \wedge \psi = \varphi' \wedge \psi = (\varphi \vee \varphi') \wedge \psi = a$, $\varphi \wedge \neg\psi = b$, $\varphi' \wedge \neg\psi = c$, et $(\varphi \vee \varphi') \wedge \neg\psi = b \vee c$. On a donc $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$ par hypothèse. Par (OU) on obtient $\varphi \vee \varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$, c'à-d. $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$: Pl satisfait (A7$_N$).
$\Leftarrow$: Pl satisfait (A7$_N$), φ, φ' et ψ sont des formules telles que $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ et $\varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$. Soient les ensembles $A = [[(\varphi \vee \varphi') \wedge \psi]], B = [[\varphi \wedge \neg\psi]]$ et $C = [[\neg\varphi \wedge \varphi' \wedge \neg\psi]]$. On a $B \cup C = [[(\varphi \vee \varphi') \wedge \neg\psi]]$, $A \supseteq [[\varphi \wedge \psi]]$, $A \supseteq [[\varphi' \wedge \psi]]$, et $[[\varphi' \wedge \neg\psi]] \supseteq C$. Par hypothèse (et (A1)), on a $Pl(A) \geq Pl(B)$ et $Pl(A) \geq Pl(C)$. Par (A7$_N$), on obtient $Pl(A) \geq Pl(B \cup C)$, c'à-d. $\varphi \vee \varphi' \xrightarrow{\text{N}} \psi$: f_N satisfait (OU). □

Corollaire 4.3 *Pour l'inférence par N-plausibilité, (ET) implique (CT) qui implique (OU), ces deux implications étant strictes.*

Démonstration: Les implications découlent de la Propriété 4.2. Pour trouver un f_N satisfaisant (CT) et falsifiant (ET), il suffit de trouver une mesure de plausibilité satisfaisant (A6$_N$) et falsifiant (A2$_N$). Toute X-application falsifiant (ET) (comme l'exemple 3.1) fournit un tel exemple, puisque toute X-application est une f_N qui satisfait (CT). Voici maintenant un f_N satisfaisant (OU) et falsifiant (CT) [soit une mesure de plausibilité satisfaisant (A7$_N$) et falsifiant (A6$_N$)]:

Exemple 4.1 *Comme dans l'exemple 3.2, on choisit une plausibilité qui est une probabilité. Le vocabulaire a deux symboles q et r. $Pr(q \wedge r) = 1/8$, $Pr(q \wedge \neg r) = 4/8$, $Pr(\neg q \wedge r) = 3/8$, [donc $Pr(\neg q \wedge \neg r) = 0$]. Il est facile de vérifier que Pr satisfait (A7$_N$).*
Soient $A = [[\neg q \wedge r]], B = [[q \wedge r]]$ et $[[C = q \wedge \neg r]]$, on a $Pr(A) = 3/8 \geq Pr(B) = 1/8$, $Pr(A \cup B) = 4/8 \geq Pr(C) = 4/8$, mais $Pr(A) \not\geq Pr(B \cup C) = 5/8$: Pr falsifie (A6$_N$).
L'inférence f_N définie par Pr satisfait donc (OU) mais elle falsifie (sCT): Soient $\psi = q \vee r, \varphi_1 = r$ et $\varphi_2 = q \not\Leftrightarrow r$. On a $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \neg q \wedge r$ et $\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 = q \wedge r$, donc $Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) = 3/8 \geq Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 1/8$, c'à-d. $\psi \wedge \varphi_1 \xrightarrow{\text{N}} \varphi_2$. On a aussi $\psi \wedge \varphi_1 = r$ et $\psi \wedge \neg\varphi_1 = q \wedge \neg r$, donc $Pr(\psi \wedge \varphi_1) = 4/8 \geq Pr(\psi \wedge \neg\varphi_1) = 4/8$. Cependant, $Pr(\psi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2) =$

$3/8 \not\geq Pr((\psi \wedge \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = Pr(q) = 5/8$, *c'à-d.* $\psi \stackrel{\text{N}}{\not\longrightarrow} \varphi_1 \wedge \varphi_2$: f_N *falsifie (sCT).* □

Exactement comme avec les définitions originales $\stackrel{\text{FH}}{\longrightarrow}$, on a, pour $\stackrel{\text{N}}{\longrightarrow}$ (démonstration immédiate, par (A1)):

$\varphi \stackrel{\text{N}}{\longrightarrow}$ **faux** ssi $Pl(\varphi) = \bot$.

Avec cette nouvelle définition, toute X-application est une inférence par N-plausibilité:

Propriété 4.4 *Toute X-application, définie par un ensemble X de formules, est égale à l'inférence par N-plausibilité f_N définie par la mesure de plausibilité suivante:*
On définit la plausibilité Pl_X:
pour tout $\varphi \in \mathbf{L}$, $Pl_X(\varphi) = \{x \in X, \varphi \vdash_{\mathbf{L}} x\}$.
On définit $D = \{Pl_X(\varphi), \varphi \in \mathbf{L}\}$,
l'ordre partiel $\geq$ étant $\subseteq$ (c'à-d. $\leq$ est $\supseteq$).

Il s'agit d'une traduction aisée, et la démonstration, très facile, illustre bien la puissance et la souplesse d'utilisation de la notion d'inférence par N-plausibilité:
(1) La structure $PL_X = (Pl_x, \subseteq)$ satisfait (A1): Si $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} \psi$, et si $x \in Pl_X(\psi)$, alors $x \in X$ et $\psi \vdash_{\mathbf{L}} x$ donc $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} x$ et $x \in Pl_X(\varphi)$.
(2) $\supseteq$ est une relation d'ordre.
(3) Par la Définition 3.1, on a $\varphi \rightarrow_X \psi$ ssi, pour tout $x \in X$, si $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, alors $\varphi \vdash_{\mathbf{L}} x$, c'à-d. ssi, pour tout $x \in X$, si $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, alors $\varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{L}} x$, c'à-d. ssi $\{x \in X, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathbf{L}} x\} \subseteq \{x \in X, \varphi \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{L}} x\}$, c'à-d. ssi $Pl_X(\varphi \wedge \psi) \geq Pl_X(\varphi \wedge \neg\psi)$, c'à-d. ssi $\varphi \stackrel{\text{N}}{\longrightarrow} \psi$. □

5 Comparaison entre ces deux inférences par plausibilité

Après avoir donné quelques propriétés de la nouvelle version f_N, revenons un peu sur l'originale f_{FH} afin d'affiner la comparaison entre les deux formalismes. Voici trois autres propriétés utiles ici qu'une mesure de plausibilité peut posséder (ou non). Rappelons que (A2) figure déjà dans [4].
Soient A, B et C des sous-ensembles de W (dans $\mathbf{F}$) qui sont deux à deux disjoints.

(A2) Si $Pl(A \cup B) > Pl(C)$ et $Pl(A \cup C) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.

(A6) Si $Pl(A \cup B) > Pl(C)$ et $Pl(A) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.

(A7) Si $Pl(A) > Pl(C)$ et $Pl(A) > Pl(B)$, alors $Pl(A) > Pl(B \cup C)$.

Comme avec les "nouvelles versions" (indicées par $_N$) données ci-dessus, il est immédiat de voir que (A2) implique (A6) qui implique (A7). L'implication de (A2) vers (A7) a été évoquée (semble-t-il) dans [4], même si (A7) ne figure pas dans ce texte. Une différence importante avec les "nouvelles versions" est que (A7) n'implique pas (A3), tandis que ($A7_N$) implique (A3).
On a les résultats suivants:

Propriété 5.1 *1. Une inférence f_{FH} par plausibilité satisfait (ET) ssi Pl satisfait (A2).*

2. Une inférence f_{FH} par plausibilité satisfait le cas trivial du (OU), c'à-d. (P3), ssi Pl satisfait (A3).

3. Une inférence f_{FH} par plausibilité satisfait (CT) ssi Pl satisfait (A6).

4. Une inférence f_{FH} par plausibilité satisfait (OU) ssi Pl satisfait (A7) et (A3).

Démonstrations omises: Les points 1 et 2 sont de [4]), auquel on renvoie le lecteur, les points 3 et 4 ne présentent aucune difficulté.
Voici des conséquences immédiates de ces résultats:

Corollaire 5.2 *Si une inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (ET), alors elle satisfait (CT). Si f_{FH} satisfait (CT) et le cas trivial du (OU), alors elle satisfait (OU). Ces implications sont strictes.*

Voici maintenant une nouvelle propriété, satisfaite par les deux versions de l'inférence par plausibilité:

(P) Si $\varphi \rightarrow$ **faux** et $\psi \rightarrow \varphi$, alors $\psi \rightarrow \neg\varphi$.

Propriété 5.3 *Les deux versions de l'inférence par plausibilité f_{FH} et f_N satisfont (P).*

Cette "consistance relative faible", dont la démonstration est immédiate, est donc importante: un formalisme qui falsifie (P) ne peut être traduit par aucune des inférences par plausibilité définies dans ce texte.

Il est utile de rappeler ici une autre propriété, satisfaite par toute d-application, donc en particulier par les deux versions d'inférence par plausibilité:

$\varphi \rightarrow$ **faux** ssi $\varphi \rightarrow \psi$ pour tout $\psi \in \mathbf{L}$.

Comme on l'a déjà vu, si $\rightarrow$ est un des deux connecteurs de plausibilité $\stackrel{\text{FH}}{\longrightarrow}$ ou $\stackrel{\text{N}}{\longrightarrow}$, on a:

$\varphi \rightarrow$ **faux** ssi $Pl(\varphi) = \bot$.

Une conséquence de la propriété 5.3, pour l'inférence f_{FH} (grâce à (P0)), est le renforcement suivant de (P):

(P') Si $\varphi \rightarrow$ **faux** et $\psi \rightarrow \varphi$, alors $\psi \rightarrow$ **faux**.

Propriété 5.4 *L'inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (P').*
Une inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P') ssi elle satisfait (P3), le cas trivial du (OU).

Là encore, les démonstrations sont immédiates. Rappelons que f_N satisfait (OU) ssi toute plausibilité Pl qui la définit satisfait (A3). Ainsi donc, pour f_N, (A3) correspond aussi à (P'), cette correspondance étant fausse pour f_{FH}.
Voici une dernière propriété utile ici qu'une mesure de plausibilité peut parfois satisfaire:

(A0) Pour tous A et B disjoints dans $\mathbf{F}$, si $Pl(A) = Pl(B)$, alors $Pl(A \cup B) = \perp$.

(A0) implique (A3), mais (A0) est bien plus forte que (A3). Les trois résultats suivants montrent pourquoi la (très forte) condition (A0) est utile ici.

Propriété 5.5 *Une inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P0) ssi Pl satisfait (A0).*

Corollaire 5.6 *Si une inférence par N-plausibilité f_N satisfait (P0), alors elle satisfait (P3).*

La démonstration de ces deux résultats ne présente pas de difficultés.
Évidemment, ($A2_N$) implique (A0) [prendre $A = \emptyset$ dans ($A2_N$)], ce qui correspond au fait tout aussi évident que (ET) implique (P0). On a déjà remarqué, dans l'exemple 3.1, qu'une inférence par N-plausibilité peut satisfaire (CT) et falsifier (P0), ce qui démontre que ($A6_N$) n'implique pas (A0).

Théorème 5.7 *Une inférence par N-plausibilité f_N est égale à une inférence par plausibilité f_{FH} ssi f_N satisfait (P0).*

Démonstration: Si f_N falsifie (P0), f_N ne peut pas être égal à une f_{FH} par la propriété 3.3. Si f_N satisfait (P0), alors on a $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ ssi $Pl(\varphi \wedge \psi) \geq Pl(\varphi \wedge \neg\psi)$ ssi $[Pl(\varphi\wedge\psi) > Pl(\varphi\wedge\neg\psi)$ ou $(\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ et $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \neg\psi)]$ ssi, par (P0) sous sa forme d'équivalence, $[Pl(\varphi\wedge\psi) > Pl(\varphi\wedge\neg\psi)$ ou $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \textbf{faux}]$ ssi $[Pl(\varphi\wedge\psi) > Pl(\varphi\wedge\neg\psi)$ ou $Pl(\varphi) = \perp]$. Donc on a $\varphi \xrightarrow{\text{N}} \psi$ ssi $\varphi \xrightarrow{\text{FH}} \psi$. $\square$

On constate que la démonstration, très simple, ne nécessite pas l'introduction d'une nouvelle mesure de plausibilité: toute inférence par N-plausibilité satisfaisant (P0) est aussi l'inférence par plausibilité (version originale) définie par la même mesure de plausibilité. Ce résultat montre que, chaque fois que le passage de la nouvelle définition vers la définition originale est possible, alors ce passage est immédiat.
Le passage dans l'autre sens n'est pas aussi immédiat, puisqu'il faut introduire une nouvelle mesure de plausibilité. Mais ce passage, qui va être décrit maintenant, demeure assez simple quand même.
Voici d'abord une autre règle (fournie sous deux formes, qui en fait se révèlent équivalentes pour toute version de l'inférence par plausibilité), qui est satisfaite par la nouvelle inférence f_N, mais qui peut être falsifiée par l'inférence originale f_{FH}:

(rP3) Si $\varphi_1 \rightarrow \textbf{faux}$ et $\varphi_2 \rightarrow \textbf{faux}$, alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$.

(rP3') Si $\varphi_1 \rightarrow \textbf{faux}$ et $\varphi_2 \rightarrow \textbf{faux}$, alors $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1$.

(rP3) est une restriction du cas trivial du (OU), d'où son acronyme: (rP3) ne mène pas à la conclusion $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \textbf{faux}$, mais seulement à $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ [et par symétrie, à $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_2$]. Comme on le verra, pour toute version d'inférence par plausibilité, (rP3) et (rP3') sont équivalentes. Dans ces cas là, avec (rP3), on conclut donc en fait $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ et $\varphi_1 \vee \varphi_2 \rightarrow \neg\varphi_1$.

Propriété 5.8
1. *L'inférence par N-plausibilité f_N satisfait (rP3).*
2. *Une inférence par plausibilité f_{FH} satisfait (rP3) ssi elle satisfait (P3) ssi la mesure de plausibilité définissant f_{FH} satisfait (A3).*
3. *Une inférence par plausibilité (de n'importe quelle version, f_N ou f_{FH}) satisfait (rP3) ssi elle satisfait (rP3').*

Les démonstrations ne présentent aucune difficulté. Le troisième point est même immédiat: toute inférence par plausibilité satisfait (P), donc, pour f_N et pour f_{FH}, (rP3) est en fait équivalent à l'apparent renforcement (rP3').

Le deuxième résultat montre qu'il existe des f_{FH} qui falsifient (rP3).

Voici maintenant la condition pour le passage de la version originale de l'inférence par plausibilité vers la nouvelle version:

Théorème 5.9 *Une inférence par plausibilité f_{FH} est égale à une inférence par N-plausibilité f_N ssi f_{FH} satisfait (P3), le cas trivial du (OU).*

Rappelons que pour f_{FH} et pour f_N, l'inférence satisfait (P3) ssi la plausibilité qui la définit satisfait (A3).

Ce résultat et sa démonstration sont importants, voici la démonstration un peu abrégée, mais commentée.
$\Rightarrow$: Si f_{FH} falsifie (P3), elle falsifies (rP3) qui est satisfait par toute inférence par N-plausibilité.
$\Leftarrow$: Si f_{FH} satisfait (P3), on introduit une nouvelle mesure de plausibilité Pl' avec sa relation $\leq'$, définies à partir de la plausibilité Pl et sa relation $\leq$ qui définit f_{FH}. Voici l'idée générale: Grâce à (A3), on sait que l'on peut conserver intactes les *classes d'équivalence* (où deux formules sont *équivalentes* ssi

elles ont la même plausibilité) de la formule **faux**, c'à-d. que l'on conserve l'ensemble de toutes les formules ayant une plausibilité égale à $\perp$. Il faut par contre (en général) casser les autres classes d'équivalence. Du moins doit-on casser les autres classes quand elles contiennent deux formules inconsistantes. Afin de simplifier la définition de Pl', on choisit ici de casser complètement toutes les autres classes en singletons, mais on pourrait essayer d'avoir beaucoup moins de classes. Voici les trois conditions qui doivent être satisfaites par $(Pl', \leq')$: (1) deux formules contradictoires qui étaient dans la même classe pour Pl (sauf la classe de **faux**) doivent devenir incomparables pour le nouvel ordre et Pl' (donc elles ne doivent pas demeurer dans la même classe, mais cela ne suffit pas), (2) condition (A1), et (3), informellement, "à part cela, préserver la relation" induite sur $\mathbf{L}$ par $(Pl, \leq)$.
On procède ainsi:

- Si $Pl(\varphi) = \perp$, alors $Pl'(\varphi) = \perp'$.
- Si $Pl(\varphi) \neq \perp$, alors $Pl'(\varphi) = (Pl(\varphi), \varphi)$.

Cela définit l'ensemble D' des valeurs $Pl'(\varphi)$. La relation $\leq'$ sur D'est définie ainsi:

1. Si $d' \in D'$, $\perp' \leq' d'$.
2. $(Pl(\varphi_1), \varphi_1) \leq' (Pl(\varphi_2), \varphi_2)$ si $Pl(\varphi_1) < Pl(\varphi_2)$.
3. $(Pl(\varphi_1), \varphi_1) \leq' (Pl(\varphi_2), \varphi_2)$ si $Pl(\varphi_1) = Pl(\varphi_2)$ et $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$.

On a alors l'équivalence suivante:
$[Pl'(\varphi_1) \geq' Pl'(\varphi_2)]$ ssi
$[Pl(\varphi_1) = Pl(\varphi_2) = \perp$ ou $Pl(\varphi_1) > Pl(\varphi_2)$ ou $(Pl(\varphi_1) = Pl(\varphi_2)$ et $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1)]$. □

Ainsi donc, si f_{FH} satisfait (P3), c'à-d. si f_{FH} est définie par une plausibilité Pl satisfaisant (A3), alors on peut utiliser une inférence par N-plausibilité au lieu de l'inférence par plausibilité originale. Ce résultat montre que les résultats donnés en [4] pour une traduction en termes d'inférence par plausibilité pour le système P, et aussi les "traductions sémantiques directes" données pour la "parameterized probability distribution" (PPD) et pour les structures préférentielles, auraient tout aussi bien pu être donnés en termes d'inférence par N-plausibilité. Les démonstrations seraient même en général plus simples, puisque la définition de $\xrightarrow{\text{N}}$ ne comporte pas l'alternative qui complique la plupart des démonstrations avec $\xrightarrow{\text{FH}}$. Ceci concerne les sections 3, 4 et 5 de [4]. Les inférences définies par Friedman et Halpern à partir d'une " mesure de plausibilité qualitative" peuvent également être traduites en inférence par N-plausibilité, puisque (A3) est satisfait dans ce cas. Les sections 6 et 7 de [4] pourraient donc également être énoncées en termes du nouveau formalisme. La section 8 de [4], qui généralise les structures de plausibilité en considérant des ensembles de structures de plausibilité comme une nouvelle super structure de plausibilité (un peu comme les structures de Kripke sont construites à partir des structures logiques classiques en logique modale) pourrait aussi bien être adaptée également. De plus, les structures de plausibilité généralisées réellement considérées dans cette section 8 sont construites à partir de structures qualitatives, donc dans un cas où l'inférence de base originale peut être traduite en la nouvelle inférence.

Le théorème 5.9 justifie donc l'affirmation que toutes les inférences par défaut considérées en [4] auraient pu être exprimées en termes de la nouvelle version proposée ici. Cette nouvelle version est supérieure à l'originale dans des cas importants, où le (ET) n'est pas satisfait, comme le cas des X-applications le montre.

Le fait que (A0) est bien plus fort que (A3) permet de démontrer qu'au moins dans le cas fini, la nouvelle version fournit un bien plus grand nombre d'inférences que la version originale. En ce sens aussi, la nouvelle version est plus puissante.

(A0) est une condition très forte, ce qui correspond au fait que (P0) (sans le (ET)) est une propriété du raisonnement très forte. La sémantique fournie par l'approche f_N est donc préférable à la sémantique fournie par l'approche originale f_{FH}. En effet, avec f_{FH}, la propriété très forte et très discutable (P0) est toujours satisfaite, alors que (ET) ne l'est pas. Cela suffit à invalider l'utilisation de cette approche pour fournir une sémantique appropriée au raisonnement par défaut sans le (ET) (cf le cas des défauts normaux).

On notera, comme conséquence de la démonstration du Théorème 5.9, que l'argument selon lequel tous les cas intéressants en raisonnement par défaut qui sont représentables par f_{FH} le sont aussi par f_N ne tient plus si on exige un ordre total sur D: la traduction va en général transformer un ordre total en un ordre partiel. Cet argument concerne donc le formalisme introduit par Halpern et Friedman, mais pas les approches que ces auteurs ont généralisées, telles que les défauts par "expectation" ou par la logique possibiliste telles que présentées respectivement dans [5] et [1]. Il reste à réexaminer la pertinence de l'approche du type f_{FH} par rapport à f_N dans le cas de l'ordre total aussi.

6 Conclusion et perspectives

Friedman et Halpern affirment que la notion de mesure de plausibilité peut faciliter la compréhension du raisonnement par défaut, en unifiant de nombreux formalismes jusque là disparates. Le présent texte ne peut que renforcer ce point de vue, puisqu'il étend encore le domaine d'applicabilité de cette notion. En effet, travailler avec la version originale ou avec la nouvelle version introduite ici est très similaire. La notion de mesure de plausibilité fournit une sémantique facile à appréhender, commune à de nombreux formalismes de raisonnement par défaut (et au delà, mais le présent texte ne traite que du raisonnement par défaut). Des propriétés importantes du raisonnement (comme le (ET), le (OU), la transitivité cumulative) possèdent une traduction simple en termes de mesure de plausibilité. Cela devrait permettre d'obtenir de nouveaux résultats pour les nombreux formalismes concernés, et d'améliorer des résultats déjà connus. Voici un exemple, portant sur les X-logiques: Dans le cas fini, il existe une condition portant sur l'ensemble X qui permet de savoir si une X-application satisfait (ET) (condition C1 de [8]). La traduction en inférence par plausibilité (seulement possible avec la nouvelle version pour ce cas là), fournit une condition alternative ($A2_N$). Cette condition semble, dans certains cas, plus facile à tester que la condition (C1), seule connue auparavant.

Le présent texte a introduit une nouvelle version, plus simple, de la notion d'inférence par plausibilité de Friedman et Halpern, et a donné la liste des principales propriétés du raisonnement formalisé par ces deux versions. Ces propriétés sont importantes, puisqu'elles s'expriment sans rentrer dans les détails technique du formalisme utilisé, et que ce sont elles qui déterminent si un domaine ou une situation peut ou non être traduit en termes de plausibilité. C'est pourquoi nous avons complété la liste des propriétés de la version originale, en plus de donner les propriétés de la nouvelle version. Ces propriétés permettent aussi de trouver facilement des résultats techniques.

La première application naturelle concerne les deux formalismes eux-mêmes, l'un par rapport à l'autre. Il se trouve que nous avons fourni suffisamment de propriétés pour être capable de déterminer précisément dans quels cas une version peut être exprimée en termes de l'autre version. Une fois ce travail fait, décrire les traductions effectives s'est avéré facile.

Les résultats présentés démontrent que la nouvelle version est plus puissante que l'originale (même s'il n'y pas inclusion stricte). Ils démontrent aussi que dans le cas de raisonnement par défaut qui falsifie la règle (ET), la nouvelle version est mieux adaptée que la version originale, qui est handicapée par une propriété du raisonnement difficile à appréhender par l'utilisateur et dont la pertinence est sujette à caution.

Il reste à caractériser entièrement ces deux inférences en termes de propriétés du raisonnement.

Il reste aussi à examiner les principaux formalismes de raisonnement par défaut, y compris des variantes de la formulation originale de Reiter, et à faire pour ces formalismes le travail fait ici pour les X-logiques (qui incluent dans certaines conditions la circonscription). La nature de l'inférence par plausibilité fait qu'une fois qu'un formalisme est traduit en ces termes, cela devrait aussi faciliter le calcul effectif. En effet, on peut "compiler les connaissances" en calculant les plausibilités des formules "hors ligne". Ensuite, le calcul des inférences utiles devrait être accéléré. Cet aspect n'a pas été abordé ici, et il conviendrait d'en évaluer la faisabilité. Les deux versions devraient d'ailleurs être considérées, afin de voir s'il n'existe pas des cas intéressants où la version originale peut être utilisée et se révèle supérieure. Il semble toutefois probable qu'en général il y ait peu d'écart entre les versions, et alors autant utiliser la nouvelle version, plus puissante.

Références

[1] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Representing Default rules in posssbilistic logic. In *KR'92*, pages 673–684, Cambridge, Oct. 1992.

[2] A. Bochman. Credulous Nonmonotonic Inference. In T. Dean, editor, *IJCAI-99*, pages 30–35, 1999.

[3] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures: a user's guide. In P. Besnard and S. Hanks, editors, *UAI-95*, pages 175–194, 1995.

[4] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures and default reasoning. *Journal of the ACM*, 48(4):648–685, July 2001.

[5] P. Gärdenfors and D. Makinson. Nonmonotonic inferences based on expectations. *Artificial Intelligence*, 65(2):197–245, Jan. 1994.

[6] J. Y. Halpern. Plausibility Measures: A General Approach For Representing Uncertainty. In *IJCAI-01*, pages 1474–1483, 2001.

[7] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics. *Artificial Intelligence*, 44(1–2):167–207, July 1990.

[8] Y. Moinard and R. Rolland. Circumscriptions from what they cannot do. In *Working papers of Common Sense'98*, pages 20–41, 1998. `http://www.ida.liu.se/ext/etai/nj/fcs-98/`.

[9] J. Pearl. Probabilistic Semantics for Nonmonotonic Reasoning: A Survey. In *KR'89*, pages 505–516 , 1989. .

[10] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13(1–2):81–132, Apr. 1980.

[11] P. Siegel and L. Forget. A representation theorem for preferential logics. In *KR'96*, pages 453–460.

[12] M. A. Suchenek. First-Order Syntactic Characterizations of Minimal Entailment, Domain-Minimal Entailment, and Herbrand Entailment. *J. of Automated reasoning*, 10:237–263, 1993.