

IFSIC - Université de Rennes 1
Examen du DEA d'informatique
Module Raisonnement Temporel et Spatial

Mardi 16 janvier, 8h

Durée: **3 heures**

Documents autorisés.

(Les temps de résolution sont donnés à titre indicatif.)

1 Calcul situationnel (1/2h)

On considère le scénario représenté par les fluent et actions suivants:

– Fluent: *garée(s)* “La voiture est garée en situation s .”

– Actions

garer “Garer la voiture, avec la pré-condition *VRAI*.”

voler “Voler la voiture, avec comme pré-condition le fait que la voiture doit être garée.”

retirer “Retirer la voiture, avec comme pré-condition le fait que la voiture doit être garée” (retirer signifie retirer par le conducteur ou par une dépanneuse, par exemple pour une mise en fourrière).

On sait de plus:

- Au début (dans la situation initiale) la voiture est garée.
- Garer la voiture la rend garée.
- Voler ou retirer la voiture la rend non garée.

On veut traduire ce scénario en terme de la théorie élémentaire d'actions, en utilisant la solution au problème du cadre vue en cours.

1. Donner les axiomes d'effets et de pré-conditions d'actions qui traduisent les données.
2. En déduire le ou les axiomes de succession d'état correspondant.
3. On rappelle ici l'axiome (PCFR) vu en cours.

$$F(\vec{x}, do(a, s)) \Leftrightarrow [\gamma_F^+(\vec{x}, a, s) \vee (F(\vec{x}, s) \wedge \neg\gamma_F^-(\vec{x}, a, s))] \quad (PCFR)$$

(a) Démontrer que (PCFR), plus les axiomes de base, permettent de déduire la formule:

$$\forall s, s' \{ [s \sqsubseteq s' \wedge F(\vec{x}, s) \wedge \neg F(\vec{x}, s')] \Rightarrow \exists a, s'' [\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \wedge s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s'] \}.$$

(b) Que signifie cette dernière formule? Est-elle intuitivement attendue?

4. Soit la formule suivante:

$$\forall s \{ [\neg \text{garée}(s) \wedge \text{executable}(s)] \Rightarrow \exists s' [do(\text{retirer}, s') \sqsubseteq s \vee do(\text{voler}, s') \sqsubseteq s] \}$$

(a) Que signifie cette formule? Est-elle intuitivement attendue?

(b) Démontrer rigoureusement cette formule.

2 Fragmentation dans les TCSP (1h)

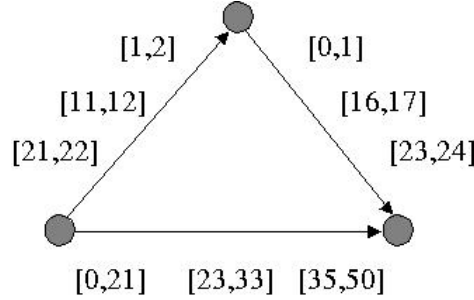


FIG. 1 – Un réseau de contraintes temporelles

Question 2.1 Propager les contraintes temporelles (sur un espace isomorphe à \mathbb{N}) dans le réseau de la figure 1 en appliquant l'algorithme de cohérence de chemin (PC).

On constate que le nombre d'intervalles temporels associés à la contrainte résultante augmente fortement (l'augmentation peut être exponentielle). Pour pallier ce problème de fragmentation deux solutions sont envisagées :

- utiliser une approximation du réseau initial par un STP ;
- utiliser une approximation de l'algorithme PC affaiblissant l'opération d'intersection.

2.1 Utiliser une approximation du réseau par un STP

Soit :

- N le réseau initial,
- N' le STP obtenu en affaiblissant les contraintes de la manière suivante :
 $C'_{ij} = [low(C_{ij}), high(C_{ij})]$ où $low(C_{ij})$ (resp. $high(C_{ij})$) est la borne inférieure (resp. supérieure) des intervalles composant C_{ij} ,
- N'' le réseau minimal de N' ,
- N''' le réseau résultant de l'intersection de N'' et N dans lequel $C'''_{ij} = C''_{ij} \cap C_{ij}$.

Définition 2.1 (Normalisation) Normaliser une contrainte C consiste à transformer toute paire d'intervalles I_1, I_2 de C tels que i) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ en un intervalle $I_1 \cup I_2$ ii) $I_1 = [I_1^-, N]$ et $I_2 = [N+1, I_2^+]$ en $[I_1^-, I_2^+]$.

Question 2.2 Montrer que le nombre d'intervalles associés à une contrainte C_{ij} normalisée de N''' est inférieur ou égal au nombre d'intervalles associés à la contrainte correspondante C_{ij} de N .

Question 2.3 Montrer que $sol(N) = sol(N''')$ ($sol(N)$ dénote l'ensemble des solutions du réseau N). En déduire un algorithme approximatif pour la cohérence de N , procédant par itérations successives.

Question 2.4 Montrer que $low(C_{ik} \odot C_{kj})$ est égal à la borne inférieure de $[low(C_{ik}), high(C_{ik})] \odot [low(C_{kj}), high(C_{kj})]$ et que $high(C_{ik} \odot C_{kj})$ est égal à la borne supérieure de $[low(C_{ik}), high(C_{ik})] \odot [low(C_{kj}), high(C_{kj})]$. En déduire que PC et l'algorithme approximatif calculent les mêmes bornes inférieures et supérieures.

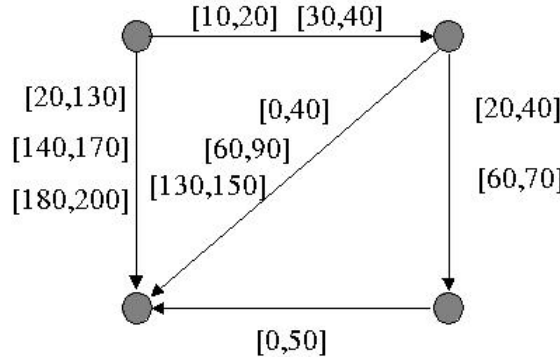


FIG. 2 – Un autre réseau de contraintes temporelles

Question 2.5 Appliquer l'algorithme défini à la question 2.3 sur le réseau de la figure 2

2.2 Utiliser une intersection affaiblie

Définition 2.2 (Intersection faible) soient deux contraintes $T = \{I_1, \dots, I_r\}$ et $S = \{J_1, \dots, J_s\}$. L'intersection faible de T et S , notée $T \triangleleft S$, est l'ensemble d'intervalles $\{I'_1, \dots, I'_r\}$ tel que $I'_i = [I_i^-, I_i^+]$ où I_i^- et I_i^+ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $I_i \cap S$.

Question 2.6 Calculer $T \cap S$ et $T \triangleleft S$ pour $T = \{[1, 4], [10, 15]\}$ et $S = \{[3, 11], [14, 19]\}$.

Question 2.7 Montrer que $[C_{ij} \cap (C_{ik} \odot C_{kj})] \subseteq [C_{ij} \triangleleft (C_{ik} \odot C_{kj})] \subseteq C_{ij}$

Question 2.8 L'opération de base de l'algorithme PC est remplacé par $C_{ij} = C_{ij} \triangleleft (C_{ik} \odot C_{kj})$. Montrer que le nombre d'intervalles associés à la contrainte n'augmente pas après application de cette nouvelle opération puis normalisation.

Question 2.9 Appliquer l'algorithme PC modifié sur le réseau de contraintes temporelles de la figure 1. Comparer les résultats avec ceux de la question 2.1.

3 Raisonnement spatial (1h30)

3.1 Le monde

Soit un monde composé d'un plan 2D sur lequel se trouvent un certain nombre de motifs rectangulaires au sol. Ces motifs sont des rectangles de taille quelconque à bords parallèles aux axes. La figure 3 représente une cartographie du monde. Les dimensions du monde sont de N cases sur chacun des deux axes. Ces motifs au sol seront appelés dans le reste du document des objets.

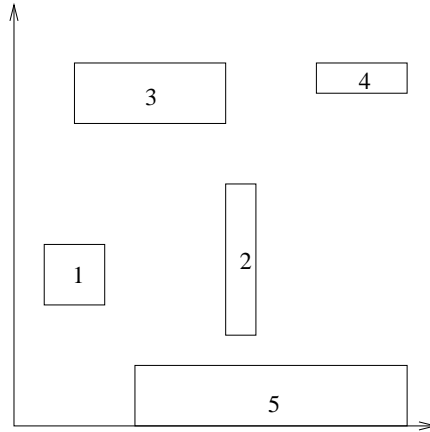


FIG. 3 – Cartographie du monde.

Question 3.1 Modéliser ce monde à l'aide de l'algèbre des 2-pavés, c'est à dire en spécifiant un graphe de contraintes d'Allen entre les objets sur chacun des deux axes.

Rappel : un Allen-graphe est un graphe dans lequel les nœuds représentent des intervalles et les arcs des contraintes binaires reliant ces intervalles. Chaque contrainte est exprimée par une disjonction de relations primitives de Allen. On note ces 13 relations primitives par :

$e(qual), b(efore), m(eets), o(verlaps), s(tarts), d(uring), f(inishes), bi, mi, oi, si, di, fi$

3.2 Les 2-MOP graphes

On s'intéresse dans les 2-MOP graphes à localiser des objets, les uns par rapport aux autres, en utilisant une position d'observation (c_X, c_Y) . Il s'agit ainsi d'une description égocentrique du positionnement relatif des objets par rapport à la position du point d'observation.

On exprime la position d'un objet par rapport à un point d'observation sur chacun des axes. Les trois valeurs élémentaires possibles sont :

- M(oins) : $ext(O[i]_\alpha) \leq c_\alpha$
- O(rigine) : $ori(O[i]_\alpha) \leq c_\alpha \leq ext(O[i]_\alpha)$
- P(lus) : $c_\alpha \leq ori(O[i]_\alpha)$

α correspondant à l'un quelconque des deux axes X ou Y. $ori(O[i]_\alpha)$ et $ext(O[i]_\alpha)$ correspondent à l'origine et à l'extrémité de l'intervalle $O[i]_\alpha$, projection de l'objet numéro i sur l'axe α .

Un MOP-graphe est un graphe dans lequel les nœuds $O[i]_\alpha$ représentent les intervalles correspondant à la projection de l'objet numéro i sur l'axe α et les arcs représentent les contraintes binaires reliant ces intervalles.

Les nœuds $O[i]_\alpha$ peuvent prendre leurs valeurs dans $v = \{M, O, P\}$. La valeur d'un nœud $O[i]_\alpha$ appartient donc à $V = \{\emptyset, \{M\}, \{O\}, \{P\}, \{M, O\}, \{M, P\}, \{O, P\}, \{M, O, P\}$; on notera par raccourci $V = \{\emptyset, M, O, P, MO, MP, OP, MOP\}$. Cet ensemble de valeurs possibles pour un nœud est appelée le domaine de ce nœud.

Une contrainte binaire (ou relation) entre deux nœuds $O[i]_\alpha$ et $O[j]_\alpha$ du MOP-graphe décrit les paires de valeurs admissibles pour $\{O[i]_\alpha, O[j]_\alpha\}$. On représente celle-ci par un triplet $\langle r_M, r_O, r_P \rangle$ où r_M (respectivement r_O, r_P) sont les valeurs possibles de $O[j]_\alpha$ quand $O[i]_\alpha$ vaut M (respectivement O, P). On a par exemple $C_{ij} = \langle MO, P, P \rangle$ pour exprimer que les paires possibles pour $\{O[i]_\alpha, O[j]_\alpha\}$ sont $\{M, M\}, \{M, O\}, \{O, P\}, \{P, P\}$. La figure 4 présente un exemple de relation MOP entre deux objets $O[1]$ et $O[2]$.

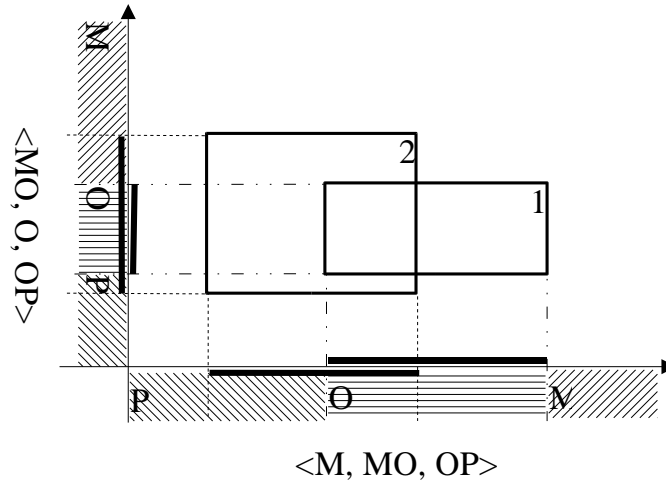


FIG. 4 – Relation 2-MOP entre deux objets.

Question 3.2 relation inverse

C_{ji} est la contrainte inverse de la contrainte $C_{ij} = \langle r_M, r_O, r_P \rangle$.

Quel est l'inverse de $C_{ij} = \langle MOP, P, P \rangle$?

Quel est l'inverse de $C_{ij} = \langle M, OP, P \rangle$?

Quel est l'inverse de $C_{ij} = \langle M, O, P \rangle$?

Question 3.3 composition de relations

On note la composition de deux relations par \oplus .

Quelle est la relation résultant de la composition de $\langle MOP, P, P \rangle$ avec $\langle MOP, P, P \rangle$?

Quelle est la relation résultant de la composition de $\langle M, O, P \rangle$ avec $\langle MOP, P, P \rangle$?

Quel est l'élément neutre de la composition?

3.3 Projection d'un Allen-graphe dans un MOP-graphe

Partant d'une situation décrite par un Allen-graphe, on désire situer les objets par rapport à la position courante et donc on effectue la projection d'un Allen-graphe dans un MOP-graphe.

Question 3.4 projection de begins

Soit la relation de Allen $b(egins)$ entre $O[i]_\alpha$ et $O[j]_\alpha$. Quelle est la MOP-relation entre $O[i]_\alpha$ et $O[j]_\alpha$? Quelle est la MOP-relation entre $O[j]_\alpha$ et $O[i]_\alpha$?

Question 3.5 table de projection

- La table ci-dessous donne pour les 13 relations primitives de Allen la MOP-relation correspondante; cette opération de projection est notée $Proj$.

	r_M	r_O	r_P
e	< M , O >		P
b	< ? , ? >		?
bi	< ? , ? >		?
m	< MO , P >		P
mi	< M , M >		OP
o	< MO , OP >		P
oi	< M , MO >		OP
s	< MO , O >		P
si	< M , MO >		P
d	< MO , O >		OP
di	< M , MOP >		P
f	< ? , ? >		?
fi	< ? , ? >		?

- Vérifier que $Proj(b \oplus b) \equiv Proj(b) \oplus Proj(b)$. Quelle est la MOP-relation obtenue?
- Soit $Q = \{\lambda_i\}$ une relation sous la forme d'une disjonction de relations primitives de Allen λ_i . On définit $Proj(Q) = \bigcup_{\lambda \in Q} Proj(\lambda)$.
Vérifier que $Proj(b \oplus bi) \equiv Proj(b) \oplus Proj(bi)$. Rappel: bi est la relation inverse de $b(egins)$. Quelle est la MOP-relation obtenue?

Question 3.6 Donner le résultat de la projection de la description du monde effectuée dans la question 1 dans les 2-MOP graphes.

3.4 Le robot

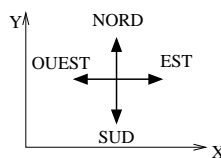


FIG. 5 – Lien entre les quatre directions cardinales et le monde.

Soit un petit robot capable de se déplacer dans ce monde, parallèlement aux axes selon les quatre directions cardinales (cf figure 5). Il est, en outre, doté de trois capteurs de perception le rendant ainsi capable de percevoir son environnement. Le résultat de ces capteurs est que le robot dispose à tout instant en fonction de sa position et de son orientation actuelles (cf figure 6) de trois listes:

- la liste des numéros des objets se trouvant au moins partiellement sur le demi-plan devant lui;
- la liste des numéros des objets se trouvant au moins partiellement sur le demi-plan à sa gauche;
- la liste des numéros des objets se trouvant au moins partiellement sur le demi-plan à sa droite.

Les objets (motifs au sol) ne sont pas des obstacles au déplacement du robot. Par contre, le monde étant borné, on considère qu'il est entouré de murs. Afin de faire en sorte que le robot ne sorte pas du monde, si celui-ci est sur une case adjacente à un des murs bordant le monde, la liste fournie par le capteur correspondant (sauf si le mur est derrière lui) contiendra aussi le numéro -1.

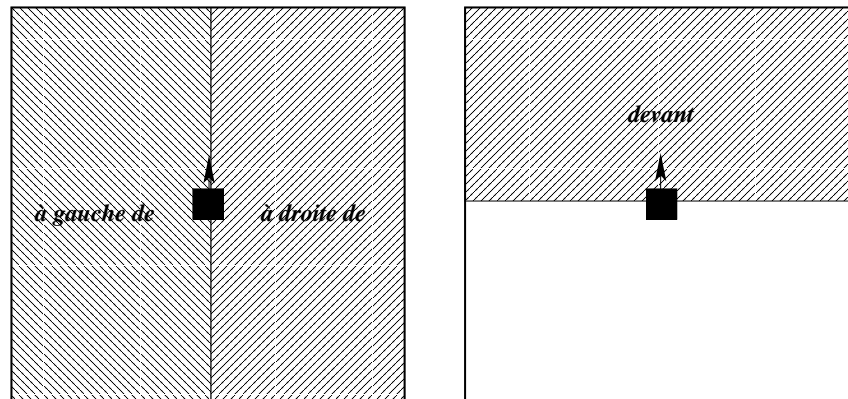


FIG. 6 – *Les trois zones de perception du robot.*

En terme de déplacement, le robot sait effectuer les actions suivantes :

- avancer tout droit d'une case ;
- s'arrêter ;
- tourner de 90° sur sa gauche ;
- tourner de 90° sur sa droite.

Chaque action est considérée comme unitaire, c'est à dire finie avant la fin du cycle courant.

On s'intéresse à la localisation du robot dans le monde dans lequel il va évoluer.

Question 3.7 Etant données les capacités de perception du robot, exprimer les relations suivantes à l'aide des 2-MOP graphes (on suppose que la direction d'observation est EST) :

perçu à la gauche du point d'observation, perçu à la droite du point d'observation, perçu devant le point d'observation.

Question 3.8 En déduire une méthode de passage de l'observation effectuée par le robot en une description utilisant les 2-MOP graphes et ce quelle que soit l'orientation d'observation.

On considère maintenant que l'on va poser le robot à un endroit dans le monde qu'il ne connaît pas. Sa seule connaissance initiale est son orientation (EST, OUEST, NORD, SUD).

Question 3.9 Définir le mécanisme de raffinement successif de la description du monde à partir de l'observation effectuée par le robot qui doit lui permettre de déterminer sa position initiale.

Question 3.10 Soit maintenant une cible (de la taille d'une case) se trouvant dans le monde et dont on a exprimé le positionnement relatif par rapport aux objets du monde à l'aide de l'algèbre des 2-pavés. Exprimer l'algorithme qui doit permettre au robot d'atteindre la cible.