Raisonnement temporel :

Ontologie –
algèbre de instants –
algèbre des intervalles –
traitabilité

Marie-Odile Cordier
DREAM, IRISA,
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, FRANCE

Motivations

- Importance de la dimension temporelle dans les applications :
  - diagnostic de systèmes évolutifs
  - planification - robotique - analyse de scènes
  - analyse de textes en langage naturel
  - Informatique : analyse de programmes…

- Traitement spécifique du temps (et de l'espace)
  - ressource particulière : partageable; non réversible
  - raisonnement propre, indépendamment du domaine

- Représentation de situations temporelles + raisonnement et complexité

Exemple 1

- A la pause repas, Jean voudrait
  - déjeuner
  - rencontrer Mireille
  - lire la lettre d'Irène
  - téléphoner à Dorothée

Il peut manger *avant ou pendant* la rencontre avec Mireille *ou* la lecture de la lettre d'Irène

Il ne veut parler à Dorothée qu'*après* avoir rencontré Mireille

Il ne peut pas lire la lettre d'Irène *en même temps* qu'il discute avec Mireille et Dorothée

Est-ce possible? Comment organiser cela?

Exemple 1bis

- Un poste robotisé comporte
  - un système d'alimentation de pièces,
  - de montage,
  - d'inspection
  - et de déchargement

L'alimentation se fait *avant ou pendant* le montage *ou* l'inspection

Le déchargement se fait *après* le montage

L'inspection ne veut avoir lieu *en même temps* que le montage ou le déchargement

Est-ce possible? Comment organiser cela?

Exemple 2

- Pierre va au travail en voiture (30 à 40’) ou par bus (au moins 60’)
- Paul s’y rend en vélo (40 ou 50’) ou en moto (20 à 30’)
- Ce matin
  - Pierre a quitté sa maison entre 7:10 et 7:20
  - Paul est arrivé au travail entre 8:00 et 8:10
  - Pierre est arrivé 10 à 20’ après que Paul soit parti

L’histoire est-elle cohérente? Quand Paul est-il parti?

Est-il possible qu’il ait pris son vélo?

L’histoire reste-t-elle cohérente si on ajoute le fait

« la voiture de Pierre était en panne »

ou « Pierre et Paul se sont rencontrés en chemin »

Choix de représentations

❑ Représentations

- numériques / qualitatives (symboliques)
- absolu / relative au temps courant

❑ Formalisme

- Extension de la logique classique : logiques temporelles
  - modales
  - réifiées : calcul des situations, calcul des événements
- Représentation et gestion des contraintes temporelles
  - Algèbre des instants / algèbres des intervalles
  - CSPs

Système de représentation du temps

- Choix des objets temporels (entités) :
  - instants, intervalles
  - relations entre ces objets : précédence (+ inclusion pour les intervalles)

- Choix des propriétés de la relation de précédence R:
  - relation d'ordre : transitivité, antisymétrie, non réfléxivité
  - linéarité à gauche (passé non ramifié), à droite (futur non ramifié), ordre total
  - densité
  - discret à gauche (existence d'un successeur immédiat), à droite

- Cadre temporel < T, R > : domaine d'interprétation des objets temporels
  - ensemble T : entiers naturels, entiers, rationnels, réels, arborescence, treillis.

- Choix des propriétés et de T selon le domaine :
  - séquence de calcul en info
  - planification en univers incertain ...

Propriétés de la relation R (précédence)

- Relation d'ordre : transitivité, antisymétrie, irréfléxivité
- Linéarité :
  - À gauche (passé non ramifié; arborescence)

    $\forall t1, t2, t3\ R(t2,t1) \wedge R(t3,t1) \Rightarrow t2=t3 \vee R(t2,t3) \vee R(t3,t2)$
  - À droite (futur non ramifié)
  - Ordre total
- Densité

  $\forall t1, t2\ R(t1,t2) \Rightarrow \exists\ t3\ \ R(t1,t3) \wedge R(t3,t2)$
- Discrétion
  - À gauche (prédécesseur immédiat)

    $\forall t1, t\ R(t,t1) \Rightarrow \exists\ t0\ \ R(t0,t1) \wedge \neg \exists\ t'0\ \ R(t'0,t1) \wedge\ R(t0,t'0)$
  - À droite

Algèbre des instants
(Vilain-Kautz 86)

- Objets temporels : instants - points de T **(réels)**

- 3 relations binaires de base (atomiques) :
  - $B_{pt} = \{ <, >, = \}$
  - complètes, exclusives : partition sur R x R

- 8 relations
  - $2^{B_{pt}} = \{\emptyset, \{<\}, \{>\}, \{=\}, \{<,>\}, \{<,=\}, \ldots \{<,>,=\}\}$
  - disjonction : incertitude sur la relation

Opérations sur les relations

- Union, intersection, complément (~)
- Inverse (^): voir table
- Composition (°) : voir table
- Elément neutre : {=}
- Propriétés :
    -
    - ...

- La structure ainsi définie est une algèbre de relation

    - distributivité de la composition sur l 'union
    - inverse de composition = composition des inverses
    - ...

Tables : inverse, composition

^	
<	>
>	<
=	=

∘	<	>	=
<	<	?	<
>	?	>	>
=	<	>	=

Avec ? = {<,>,=}

Propriétés des relations

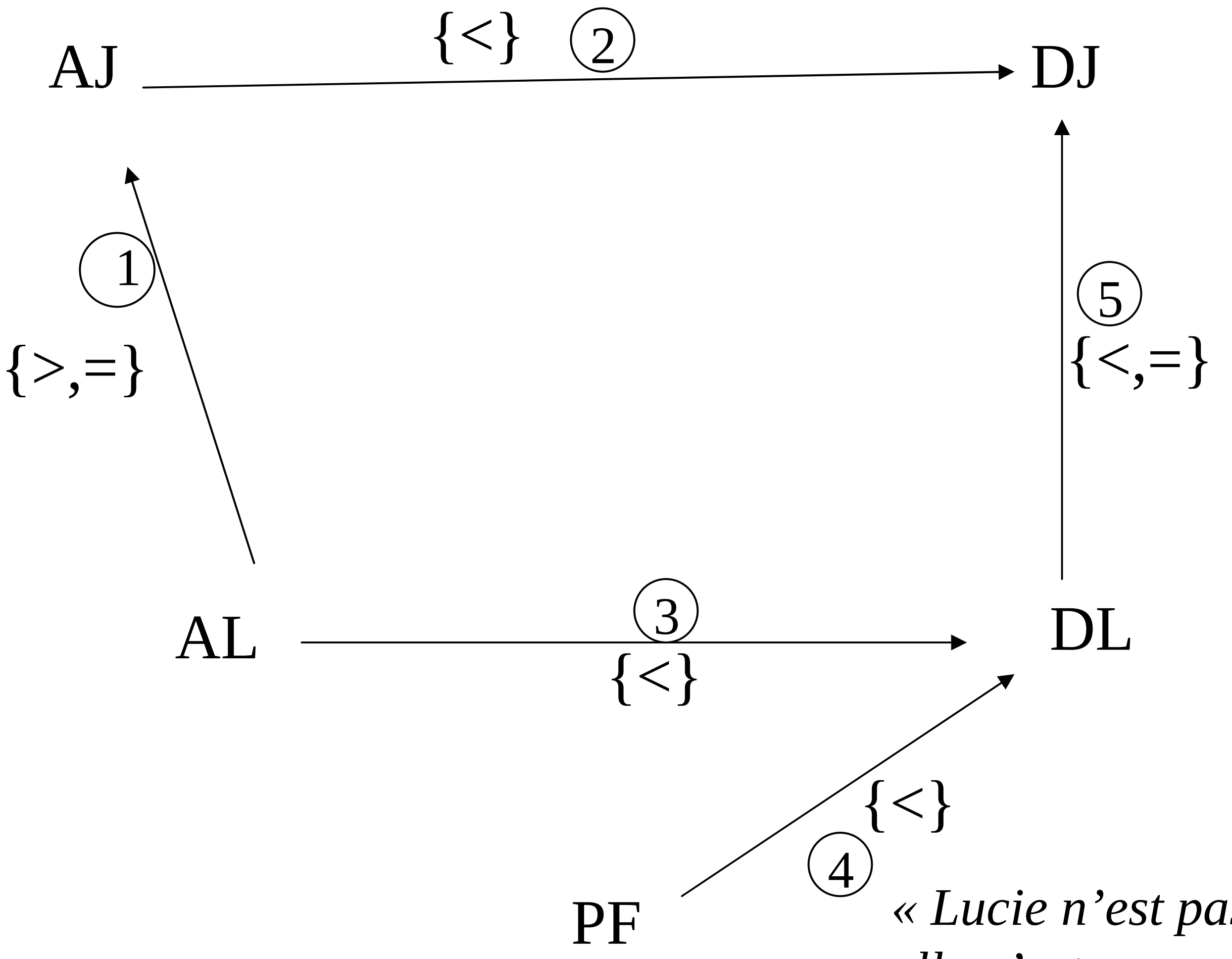
- $R^\wedge = \cup \{A^\wedge / A \in R\}$
- $R \circ S = \cup \{A \circ B / A \in R\ B \in S\}$
- $X(R \cup S)\ Y$ ssi $X\ R\ Y$ ou $X\ S\ Y$
- $X(R \cap S)\ Y$ ssi $X\ R\ Y$ ou $X\ S\ Y$
- $X\ R^\wedge\ Y$ ssi $Y\ R\ X$
- $X\ R{\sim}\ Y$ ssi non($X\ R\ Y$)
- $X\ (R \circ S)\ Y$ ssi $\exists Z\ /\ X\ R\ Z$ et $Z\ S\ Y$

- $X\ (R \circ S)^\wedge\ Y \equiv X\ (R^\wedge \circ S^\wedge)\ Y$
- $X\ (R \circ (S \cup S'))\ Y \equiv X\ (R \circ S)\ Y \cup X\ (R \circ S')\ Y$

Graphe de contraintes temporelles

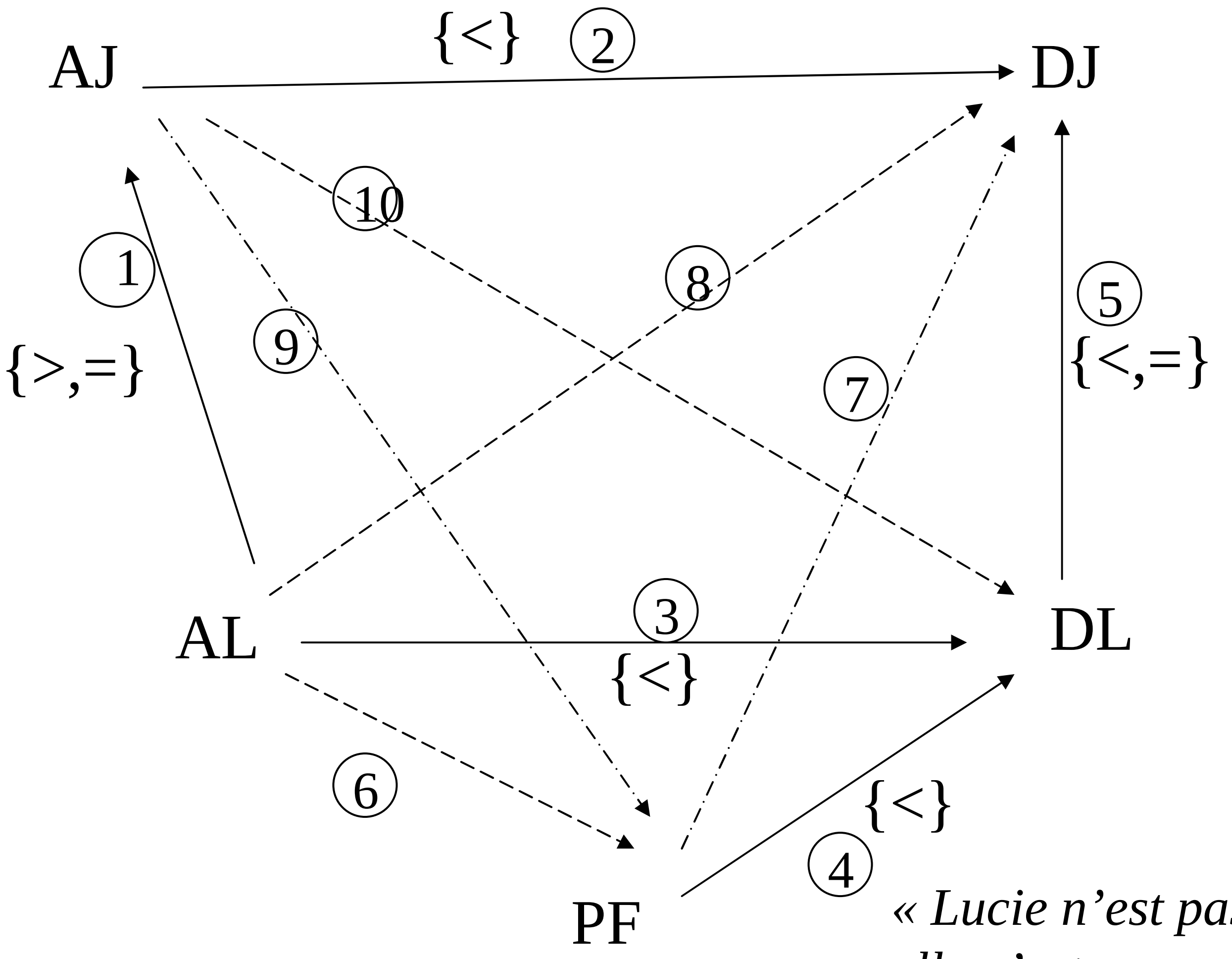
- CSP = (V, D, C)
  - V : ensemble de variables ==> instants
  - D : domaine des variables ==> réels
  - C : contraintes binaires entre variables ==>
    - **Cij : V x V -> 2^{Bpt} Cij = inverse(Cji) Cii = {=}**
- GCT = (V, C)
  - nœuds : variables Vi (étiquetées par leur domaine)
  - arcs (orientés) Cij entre Vi et Vj : étiquetés par les contraintes
- exemple :

Exemple



« Lucie n'est pas arrivée avant Jean et elle n'est pas partie après lui, mais après l'arrivée du facteur »

Exemple



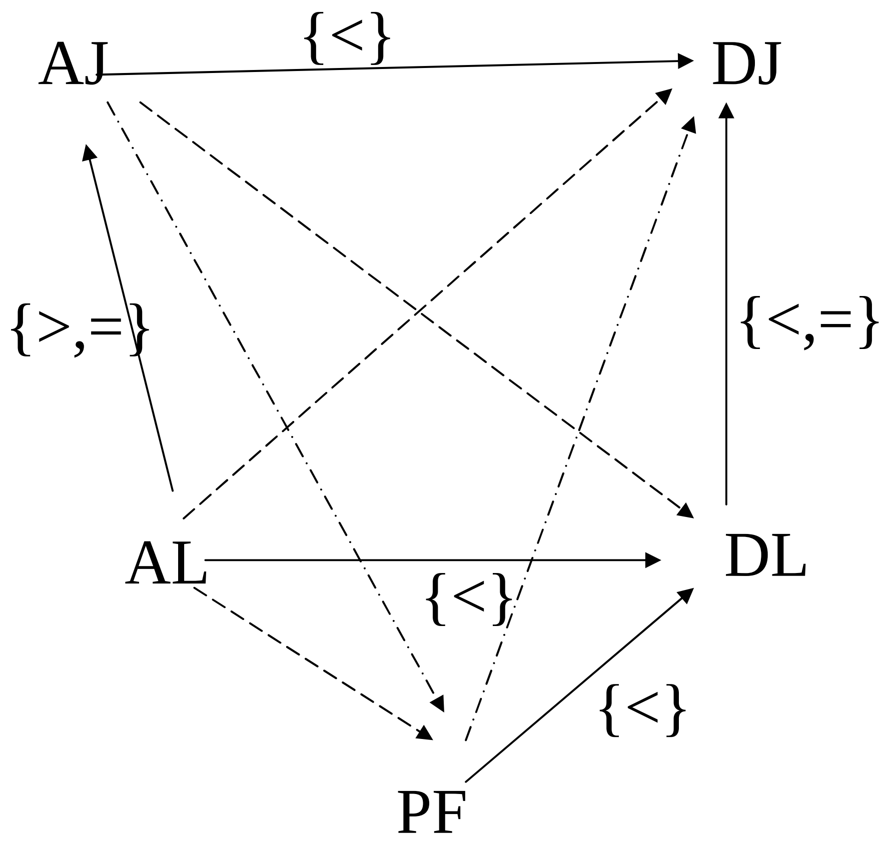
« Lucie n'est pas arrivée <u>avant</u> Jean et elle n'est pas partie <u>après</u> lui, <u>mais après</u> l'arrivée du facteur »

Consistance de GCT

❑ Consistance :

- Instantiation : application m : V -> R (réel)
  - m (Vi) est noté mi - mij est la relation existant entre mi et mj
- Instantiation consistante :
  - instantiation telle que $\forall$ij mij $\in$ Cij (voir exemple)
- Scénario : application V x V -> B_{pt} telle que $\forall$ij sij $\in$ Cij
  - scénario consistant :
    - **il existe une instantiation consistante telle que $\forall$ij sij = mij**
- GCT est consistant ssi il existe une instantiation consistante (et donc il existe aussi un scénario consistant)

Exemple



« Lucie n'est pas arrivée avant Jean et elle n'est pas partie après lui, mais après l'arrivée du facteur »

PF = 6
AJ = 12
AL = 14
DL = 18
DJ = 28

Instantiation consistante

1	>
2	<
3	<
4	<
5	<
6	>
7	>
8	<
9	>
10	<

Scénario consistant

Chemin-consistance de GCT

- Consistance locale : k-consistance
  - 3-consistance ou chemin-consistance

- GCT est chemin-consistant ssi $\forall$**ij** Cij $\subseteq$ Cik o Ckj

- Algos : PC1 en O(n^5), PC2 en O(n^3) avec n : nombre de sommets du graphe
  - on applique Cij := Cij $\cap$ Cik o Ckj jusqu'à stabilisation

- voir exemple

Algos PC1 et PC2

- **PC1 :**

  Itérer jusqu'à stabilisation des Cij

  Itérer 1 ≤ i,j,k ≤ n (i,j,k distincts)

  Cij := Cij ∩ (Cik o Ckj)

- **PC2 :** Itérer tant que Maj n'est pas vide

  Extraire un élément Cij de Maj

  Itérer 1 ≤ k ≤ n (i,j,k distincts)

  Maj <- Maj ∪ Modifier (i,k, Cij o Cjk)

  Maj <- Maj ∪ Modifier (j,k, Cji o Cjk).

Modifier(i,j,C)

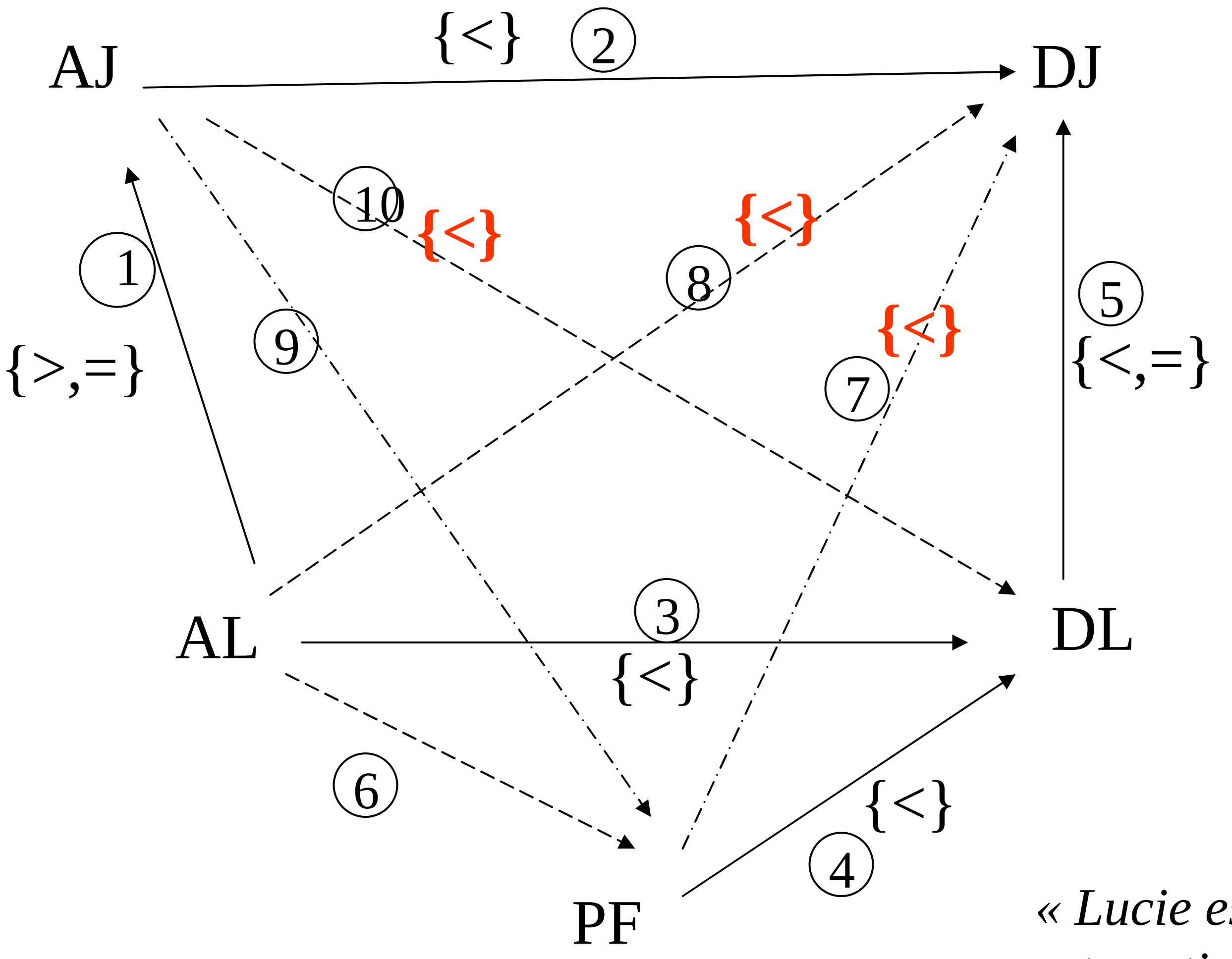
C <- C ∩ Cij

Si C vide alors Sortir(incohérence)

Sinsi C ≠ Cij alors faire Cij <- C; retourner(Cij)

Sinon retourner(nil).

Exemple



- **7 devient {<} (de 4 et 5)**
- **8 devient {<} (de 3 et 5)**
- **10 devient {<} (de 1 et 3)**
- **9 et 6 ne change pas**

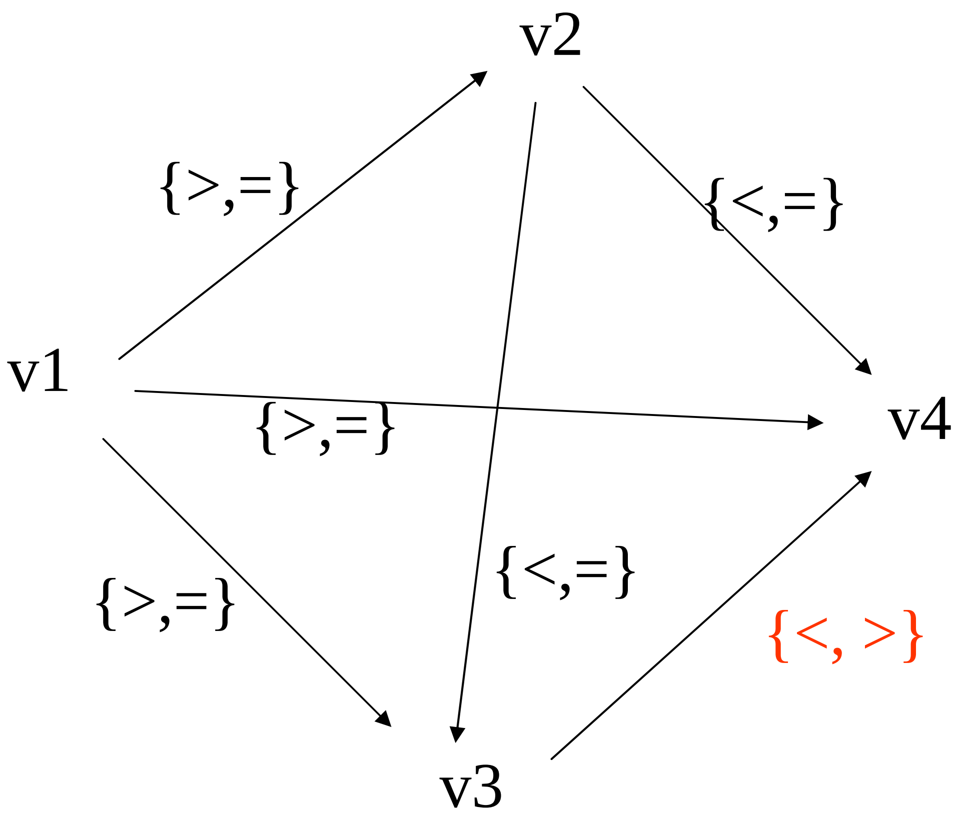
« Lucie est arrivée <u>après</u> Jean et est partie <u>avant</u> lui, <u>bien après</u> l'arrivée du facteur »

Minimalité de GCT

- Minimalité :
  - GCT est minimal

    ssi $\forall ij\ \forall A \in Cij$, il existe un scénario consistant tel que sij = A
  - mais pas tout scénario tel que sij = A avec $A \in Cij$ est consistant
- Premiers résultats :
  - un GCT d'instants chemin-consistant est consistant (très important, voir tractabilité)
  - un GCT d'instants consistant n'est pas forcément minimal (sauf si pas de relation {<,>}, voir tractabilité)

Contre-exemple



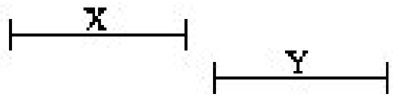
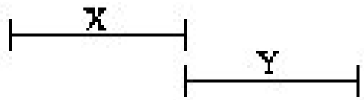
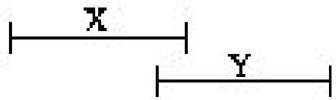
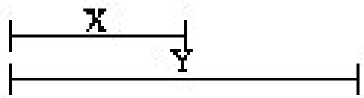
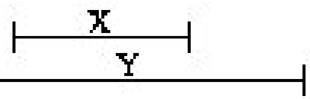
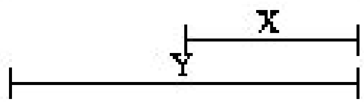
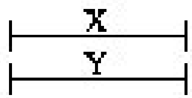
CGT chemin-consistant
mais non minimal :

si v1=v2 alors
m1=m2=m4
et m1=m2=m3
Or m3 #m4

Algèbre d’intervalles (Allen 83)

- Représentation de relations temporelles sur des épisodes
  - Objets temporels : intervalles (couples de points ordonnés de T (**R**))
- 13 relations de base (atomiques) :
  - B_{int} = { b,m,o,s,d,f,a,mi,oi,si,di,fi,eq }
  - voir interprétation
  - complètes, exclusives : partition de R x R
- $2^{B_{int}}$: 8192 relations
  - disjonction : incertitude sur la relation
- Exemple
  - Puissance d ’expression d ’algèbre d’instants/intervalle

Les 13 relations atomiques de Allen

Relation	Symbole	Inverse	Symbole	Signification
X before Y	b (ou <)	Y after X	a (ou >)	
X meets Y	m	Y met-by X	mi	
X overlaps Y	o	Y overlapped-by X	oi	
X starts Y	s	Y started-by X	si	
X during Y	d	Y contains X	di	
X finishes Y	f	Y finished-by X	fi	
X equal Y	eq (ou =)	Y equal X	eq (ou =)	

Correspondance instants-intervalles

relation atomique A	$A = \{((x^-, x^+), (y^-, y^+))\}$ avec x^-, x^+, y^-, y^+ tels que
before	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ < y^-, x^+ < y^+$
after	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ < x^-, y^+ < x^+$
meets	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ = y^-, x^+ < y^+$
met-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ = x^-, y^+ < x^+$
overlaps	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
overlapped-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
during	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- > y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
contains	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- > x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
starts	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- = y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
started-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- = x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
finishes	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- > y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ = y^+$
finished-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- > x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ = x^+$
equals	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- = y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ = y^+$

Exemples

- « Je lis le journal **avant** le petit déjeuner »
  - Lecture {b,m} PetitDej
- « Je lis le journal **pendant** le petit déjeuner »
  - Lecture {s,d,f,eq} PetitDej
- « Je lis le journal **avant ou pendant** le petit déjeuner »
  - Lecture {b,m,s,d,f,eq,**o**} PetitDej
  - Instants :
    - Deb(lect) < Fin(Lect); Deb(PetitDej) < Fin(PetitDej);
    - Fin(Lect) {<,=} Fin(PetitDej)
- « Je lis le journal **avant ou après** le petit déjeuner »
  - Lecture {b,m,a,mi} PetitDej
  - Instants : ???

Opérations

- Union, intersection, complément
- Inverse : voir table
- Composition : voir table
- Elément neutre : {eq}

- Propriétés :
    - ...

- La structure ainsi définie est une algèbre de relation
    - distributivité de la composition sur l 'union
    - inverse de composition = composition des inverses
    - ...

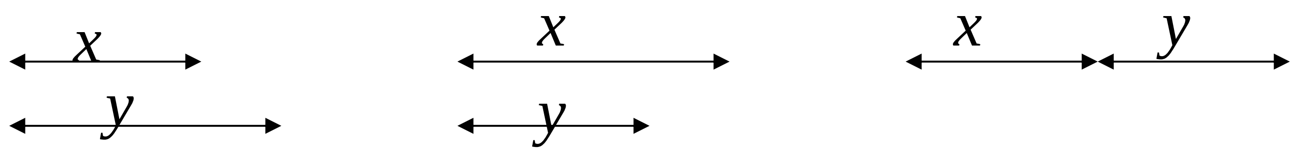
Propriétés des relations

- $R\hat{} = \cup \{A\hat{} / A \in R\}$
- $R \circ S = \cup \{A \circ B / A \in R\ B \in S\}$
- $X(R \cup S)\ Y$ ssi $X\ R\ Y$ ou $X\ S\ Y$
- $X(R \cap S)\ Y$ ssi $X\ R\ Y$ ou $X\ S\ Y$
- $X\ R\hat{}\ Y$ ssi $Y\ R\ X$
- $X\ R\sim\ Y$ ssi non$(X\ R\ Y)$
- $X\ (R \circ S)\ Y$ ssi $\exists\ Z\ /\ X\ R\ Z$ et $Z\ S\ Y$

- $X\ (R \circ S)\hat{}\ Y \equiv X\ (R\hat{} \circ S\hat{})\ Y$
- $X\ (R \circ (S \cup S'))\ Y \equiv X\ (R \circ S)\ Y \cup X\ (R \circ S')\ Y$

Exemple R={m,s,si} et S={f,o}

- R={m,s,si}



- S={f,o}

- R^={mi,si,s} $R^{\sim}$={a,b,m,f,fi,o,oi,d,di,eq}

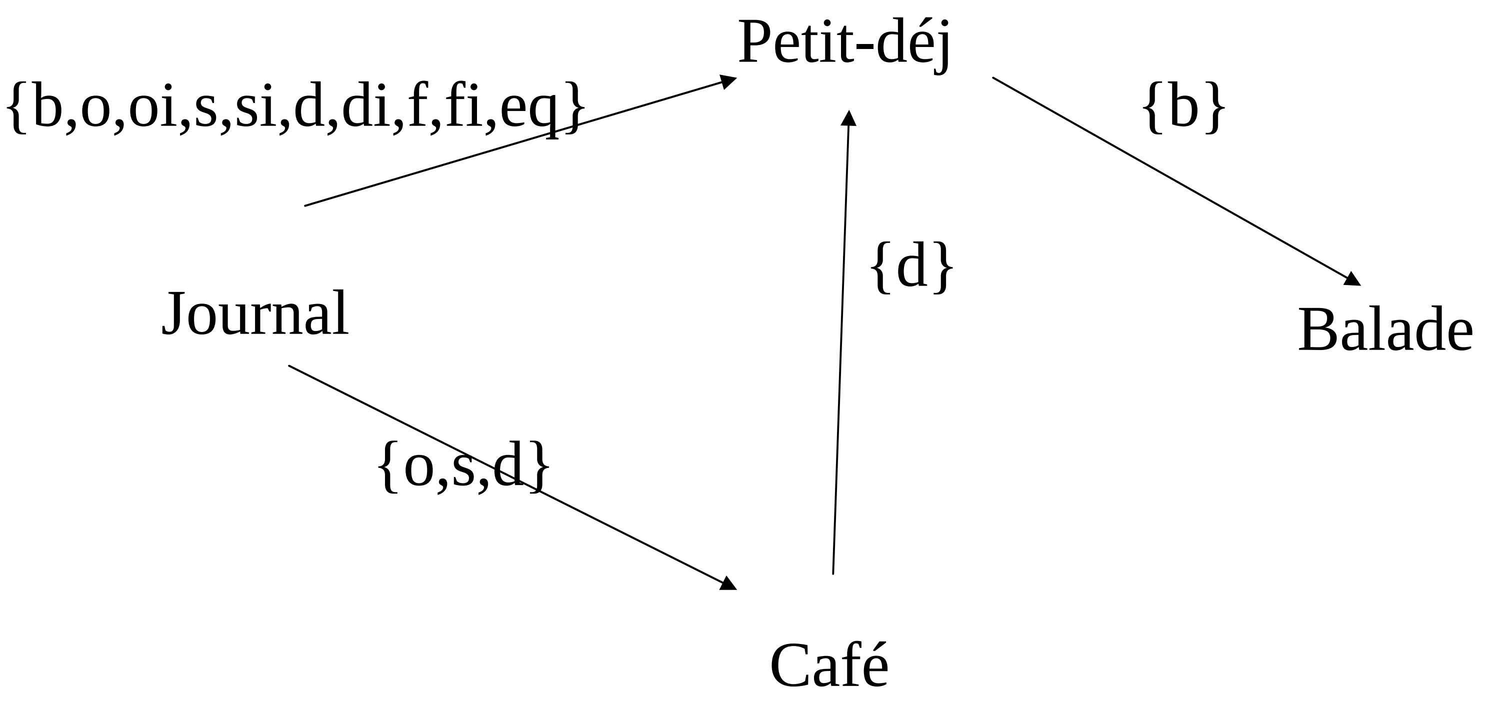
- $R \circ S$ ={d,o,s,b,m,oi,di,fi}

Graphe de contraintes temporelles

- GCT = (V,C)
  - nœuds : variables Vi (domaine : réels)
  - arcs (orientés) Cij entre Vi et Vj
  - exemple :

Exemples (suite)

« Fred lit le journal pendant qu'il prend son petit-déjeuner. Il pose son journal et boit la fin de son café. Après le petit-déjeuner, il part se balader »

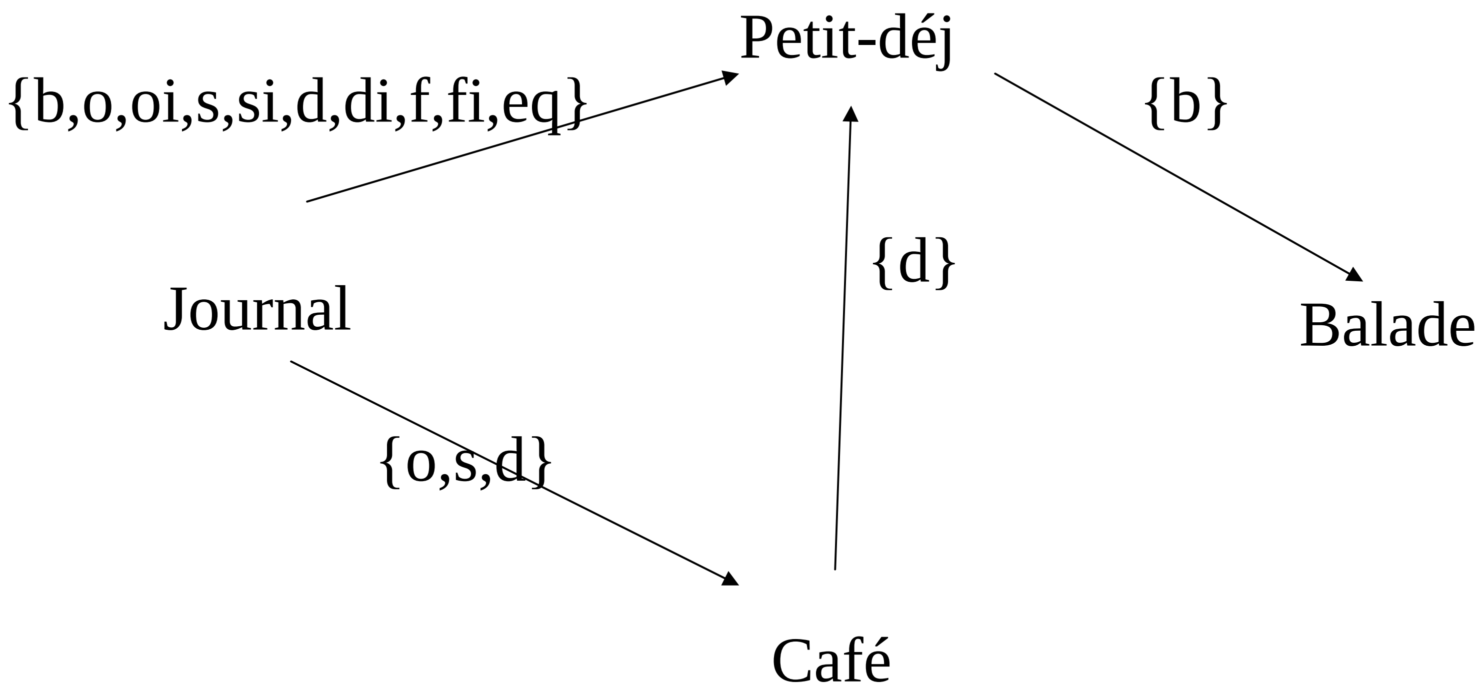


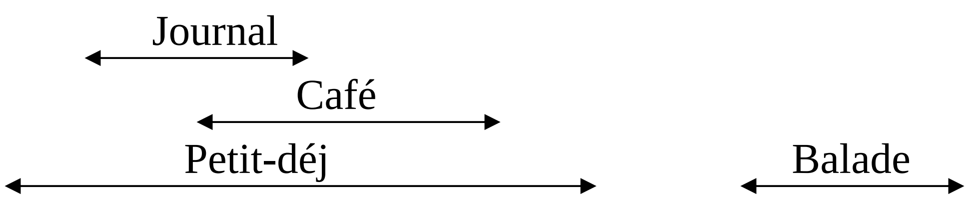
Consistance de GCT (intervalles)

❑ Consistance :

- Instantiation : application m : V -> R
  - ➢ m (Vi) est noté mi - mij est la relation existant entre mi et mj
- Instantiation consistante :
  - ➢ instantiation telle que $\forall$ij mij $\in$ Cij
- Scénario : application V x V -> B_{pt} telle que $\forall$ij sij $\in$ Cij
  - ➢ scénario consistant :
    - **il existe une instantiation consistante telle que $\forall$ij sij = mij**
- GCT est consistant ssi il existe une instantiation consistante (et donc il existe aussi un scénario consistant)

Instantiation consistante





une instantiation consistante

« Fred lit le journal pendant qu'il prend son petit-déjeuner. Il pose son journal et boit la fin de son café. Après le petit-déjeuner, il part se balader »

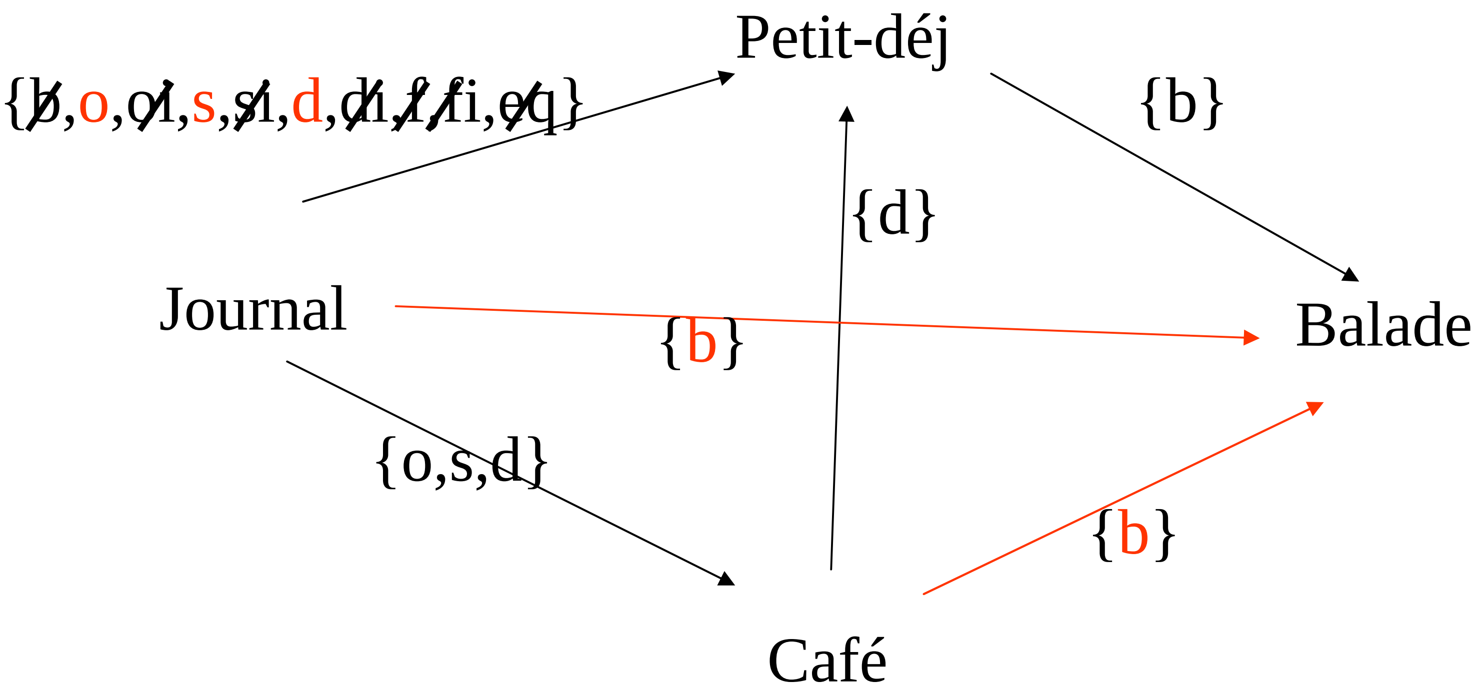
Chemin-consistance de GCT (intervalles)

- GCT est chemin-consistant ssi $\forall$**ij** Cij $\subseteq$ Cik o Ckj

- Algos : PC1en $O(n^5)$, PC2 en $O(n^3)$ avec n : nombre de sommets du graphe
  - on applique Cij := Cij $\cap$ Cik o Ckj jusqu'à stabilisation

- voir exemple

Après chemin-consistance



Minimalité de GCT (intervalles)

Minimalité :

- GCT est minimal

  ssi $\forall ij\ \forall A \in Cij$, il existe un scénario consistant tel que sij = A

- mais pas tout scénario tel que sij = A avec $A \in Cij$ est consistant

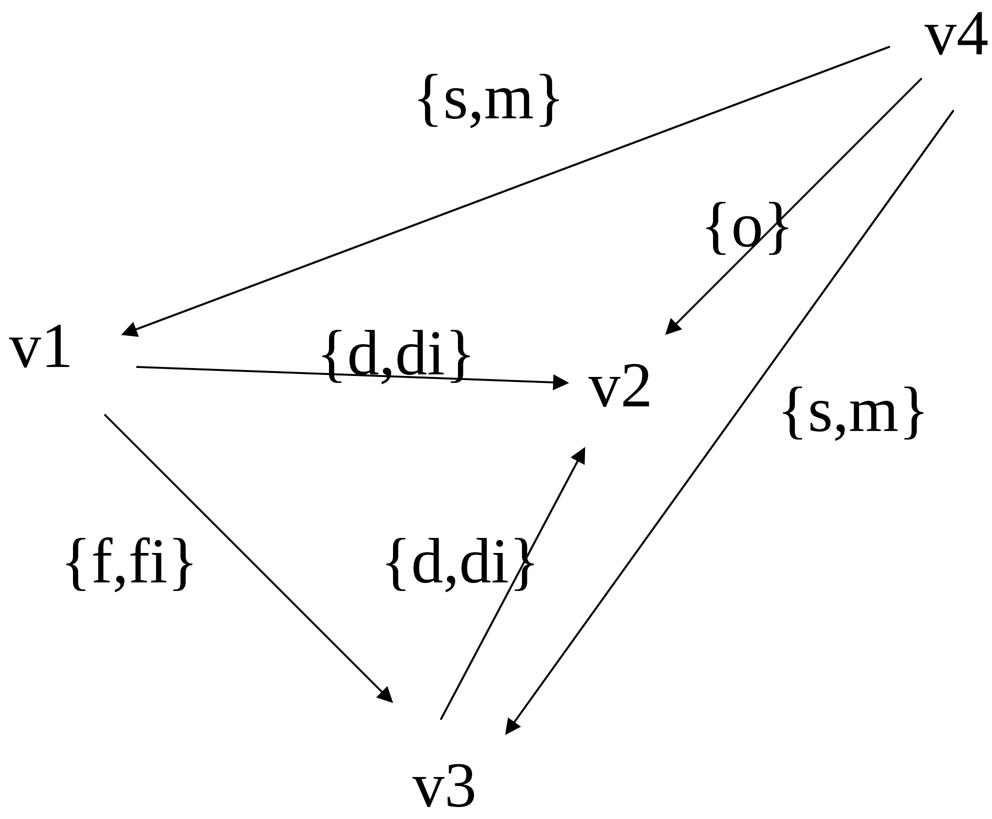
Premiers résultats :

- un GCT d'intervalles chemin-consistant n'est pas forcément consistant - exemple - très important
  (sauf si pointisables - voir tractabilité)

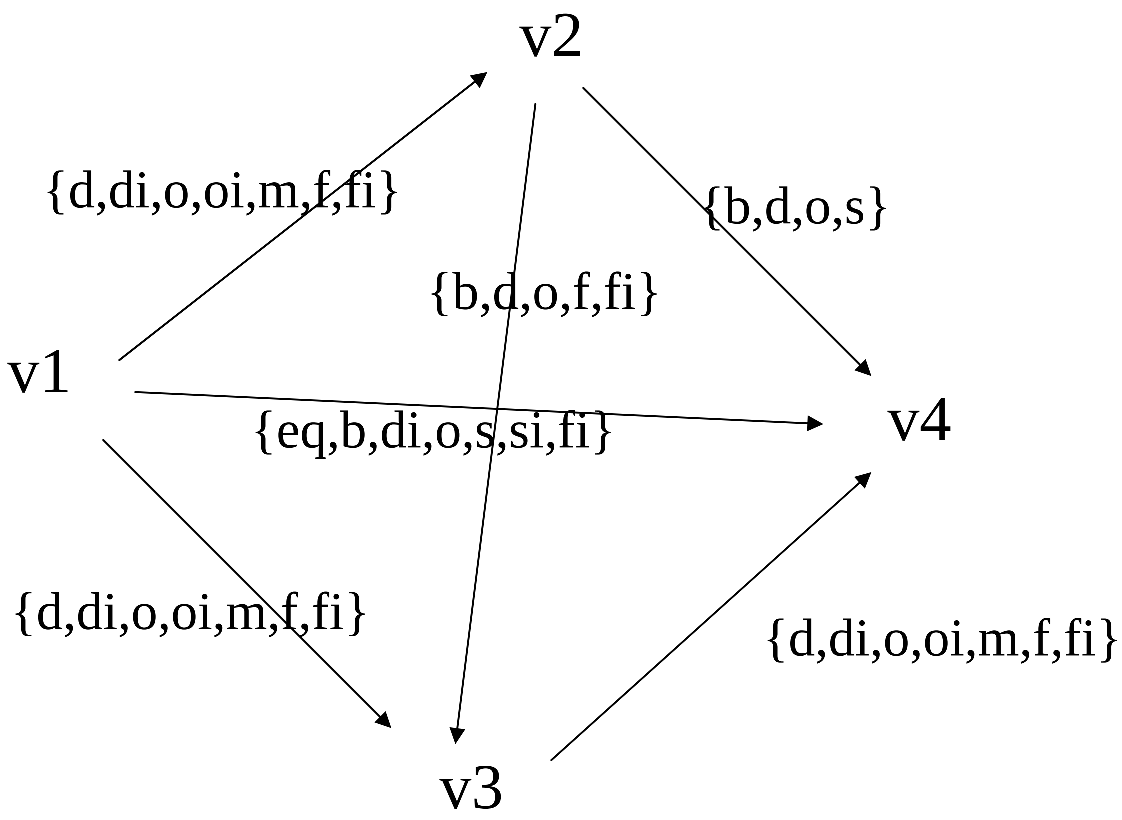
- un GCT d'intervalles consistant n'est pas forcément minimal

  (sauf si convexes - voir tractabilité)

Chemin consistant mais non consistant



Consistant mais non minimal



Problème sur les GCTs d 'intervalles et d 'instants

- Consistance :
  - cohérence de la représentation (majour)

- Minimalité :
  - forme minimale du graphe

- Recherche des solutions : exhiber des scénarios consistants

Complexité

- Problèmes polynomialement réductibles l'un à l'autre
  - on se restreint souvent au pb de la consistance d 'un GCT

- Consistance d'un GCT :
  - algèbre d'instants : polynomial par chemin-consistance O(n3) (O(n2) pour Cspam) pour la consistance et O(n4) pour la minimalité
  - algèbre d'intervalles :
    - la chemin-consistance n'est pas complète
    - le pb de la consistance est NP-complet (réduction de 3-sat)
      - Voir Vilain-Kautz 86
    - existence de fragments de l'algèbre telle que la chemin-consistance est complète ? voir tractabilité

Réduction d'un pb à un autre ...

- Consistance -> minimalité :
  - Pour chaque relation de chaque contrainte, on vérifie que si on l'enlève, le graphe devient non consistant
    - au pire 13 * n * (n-1) / 2 appels au test de consistance

- Consistance -> recherche de solution :
  - Pour chaque relation de chaque contrainte, on vérifie que si on ne garde qu'elle le graphe reste consistant
    - au pire 13 * n * (n-1) / 2 appels au test de consistance

Passage intervalles - instants

- Intervalles → instants
  - contraintes sur les instants début et fin des intervalles
  - possible uniquement pour 187 relations (pointisables)
    - exemple : {b,a} versus {b,m}

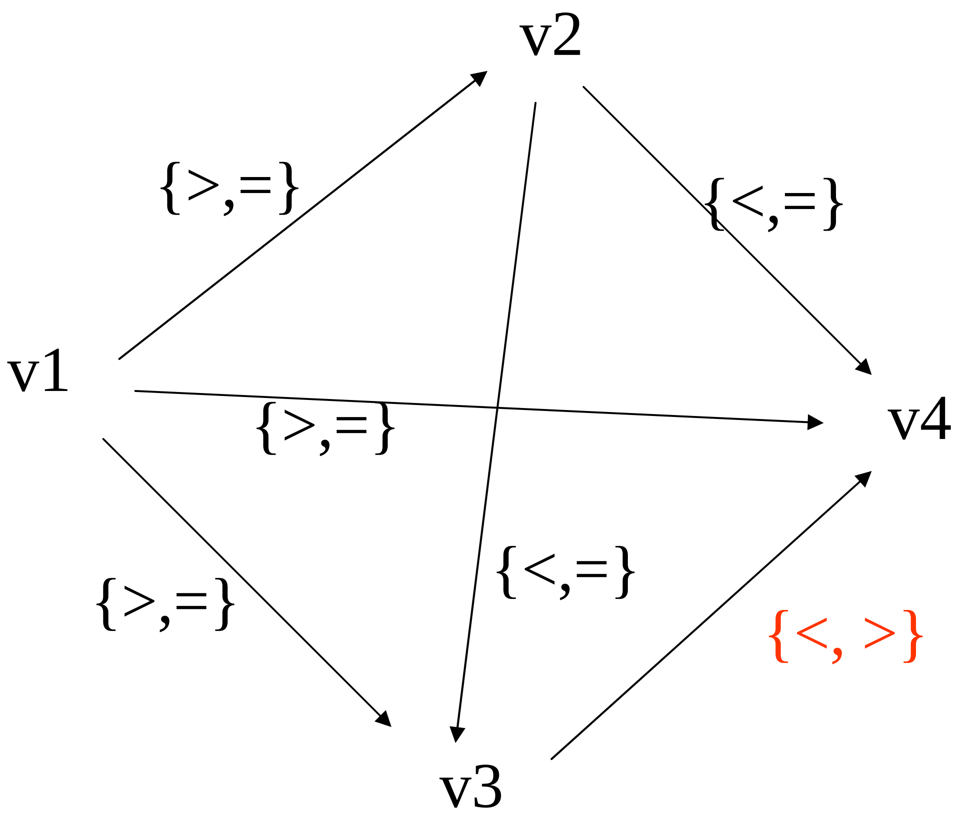
- Instants → intervalles

- Intervalles + instants : « divided instant problem »
  - A vrai sur I1 - A faux sur I2 - I1 {m} I2 : valeur de A au point de contact ?

Traitabilité : Algèbre des instants

- **En général :**
  - consistance :
    - la chemin-consistance est complète :
    - un GCT d 'instants est consistant ssi chemin-consistant
    - et donc algorithme en $O(n^3)$
      (CSPAN en $O(n^2)$ par Van Beek en 90)
  - minimalité :
    - un CGT consistant n 'est pas forcément minimal (exemple)
    - algorithme en $O(n^4)$ par Van Beek en 89)
- **fragment A_C : « relations convexes »**
    - on interdit la relation {<,>} (7 relations)
    - Fragment stable pour composition,intersection, inverse
    - la chemin-consistance est complète et donne le graphe minimal : algo en $O(n^3)$

Contre-exemple



CGT chemin-consistant mais non minimal :

si v1=v2 alors

m1=m2=m4

et m1=m2=m3

Or m3 #m4

Traitabilité : Algèbre des intervalles

- En général :
  - consistance :
    - la chemin-consistance n'est pas complète
  - minimalité :
    - un CGT consistant n'est pas forcément minimal
  - ce sont des problèmes NP-complets
- Fragments ?
  - Approche Ord-clauses : Nebel-Burckert 94-95
  - Approche géométrique : Nökel; Ligozat
  - Ne pas conserver les 13 relations de base

Approche Ord-clauses

- Expression des contraintes sur les bornes des intervalles :
  - formules atomiques de la forme : $x \leq y$ et $x = y$
  - littéraux : formule atomique ou sa négation (non($x \leq y$); $x \neq y$)
  - ORD clause : disjonction de tels littéraux
  - Toute contrainte d 'intervalles peut s 'exprimer comme une conjonction de ORD clause :
    - non($x < y$) se réécrit par $y \leq x$
    - $x < y$ se réécrit en : $x \leq y \wedge x \neq y$

- Exemple : X {o,d} Y

Exemple : X {o,d} Y

$$
\begin{aligned}
&(X^- < X^+ \wedge Y^- < Y^+ \wedge X^- < Y^- \wedge X^- < Y^+ \wedge Y^- < X^+ \wedge X^+ < Y^+) \vee \\
&\qquad (X^- < X^+ \wedge Y^- < Y^+ \wedge Y^- < X^- \wedge X^- < Y^+ \wedge Y^- < X^+ \wedge X^+ < Y^+)
\end{aligned}
$$

Après avoir remplacé les littéraux contenant $<$ nous obtenons la formule suivante :

$$
\begin{aligned}
&(X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge X^- \leq Y^- \wedge X^- \neq Y^- \wedge \\
&\quad X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+) \vee \\
&\quad (X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^- \wedge Y^- \neq X^- \wedge \\
&\qquad X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+)
\end{aligned}
$$

Et après simplification:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge \\
&\qquad Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+ \wedge X^- \neq Y^- \wedge \cancel{(X^- \leq Y^- \vee Y^- \leq X^-)}
\end{aligned}
}
$$

Approche Ord-clauses (suite)

Selon la forme des contraintes (exprimées en Ord-clauses)

- fragment des « relations convexes » : 83/8192 relations
  - conjonction d 'ORD-clauses unitaires (un seul littéral) sans $\neq$ (telles que si x $\neq$ y appartient à la conjonction, on a aussi x $\leq$ y ou y $\geq$ x)
  - puissance d 'expression de l 'algèbre des instants convexes (sans {<,>})
  - stabilité pour la composition, l'inverse, l'intersection
  - Un réseau chemin-consistant est minimal, et donc algo. en $O(n^3)$ pour la consistance et la minimalité (Van Beek)
  - exemple : X {b,m,o} Y (mais pas {o,d})

Exemple Ord-clause

- X {b,m,o} Y : convexe

  $X^- \leq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^- \leq Y^-$

- X {b,o} Y : pointisable

  $X^- \leq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge X^- \leq Y^- \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^-$

- X {b,o,eq} Y : Ord-Horn

  $X^- \leq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge X^- \leq Y^- \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge (X^- \neq Y^- \vee X^+ = Y^+)$

- X {o,f} Y : non Ord-Horn

Approche Ord-clauses (suite)

- fragment des « pointisables » : 188 relations / 8192
  - conjonction d 'ORD-clauses unitaires (un seul littéral)
  - puissance d 'expression de l'algèbre des instants (avec {<,>})
  - stabilité pour la composition, l'inverse, l'intersection
  - algo. en $O(n^3)$ pour la consistance
  - algo. en $O(n^4)$ pour la minimalité
  - X {b,o} Y (ainsi que X {o,d} Y mais pas X {eq,o} Y)

Approche Ord-clauses (ter)

- fragment des « relations Ord-Horn » :
  868 relations / 8192
  - conjonction d 'ORD-clauses avec au plus un littéral positif ($\leq$ ou =)
  - Exemple : X {b,o,eq} Y   (contre-exemple X {o,f} Y)
  - complet pour la chemin-consistance
    - algo. en $O(n^3)$ pour la consistance
    - algo. en $O(n^4)$ pour la minimalité
  - stabilité pour la composition, l'inverse, l'intersection
  - maximalité de cette classe