IFSIC - Université de Rennes 1, Exam. DEA d'info
Module Raisonnement Temporel et Spatial

partie "Approches logiques" avec corrigé et compléments

(tout commentaire bienvenu)

Jeudi 24 janvier 2002, 8h

Durée : **3 heures** Documents autorisés. (Les temps de résolution sont donnés à titre indicatif.)

1 Approches logiques (45mn)

Dans le cadre du calcul des événements de Shanahan, on utilise la formulation générale "non déterministe" donnée en cours (la première solution donnée) pour traduire le lancer d'une pièce de monnaie.

1.1 Exercice 1

On suppose qu'au départ (temps 0, même si on ne demande pas d'utiliser ici la simplification due au choix de temps positifs), la pièce est côté pile. Puis on la lance au temps 2, après quoi elle est côté face, et on la relance au temps 4.

On admet le résultat donné en cours et on pourra donc le généraliser de façon appropriée en se contentant de donner des explications informelles, sans donner les démonstrations rigoureuses.

Question 1.1.1 Décrire la traduction formelle de ces données (fluents et actions, formules dépendant des données, théorie considérée "en interne").

Question 1.1.2 Combien y a-t-il de (classes de) modèles? Décrire chaque classe et justifier la réponse.

Question 1.1.3 Connaît-on précisément la situation aux temps 1, 3 et 5?

Décrire chaque situation en donnant les formules pertinentes, et justifier les réponses.

Question 1.1.4 Que peut-on dire des situations aux temps 2 et 4?

Question 1.1.5 Si on considère la version "déterministe", la solution décrite ci-dessus n'est plus adaptée. Pourquoi: que se passerait-il précisément (on ne demande pas ici la démonstration formelle complète, seulement des indications)?

Comment, avec cette version "déterministe", pourrait-on quand même formaliser ces données (on ne demande ici ni démonstration ni développement)?

1.2 Exercice 2

On considère maintenant la situation vue en cours, plus simple et moins déterminée que celle de l'exercice 1 (un seul lancer, aucune indication de côté de la pièce).

Question 1.2.1 Justifier le plus rigoureusement possible les affirmations données en cours sur $Clipped(t_1, Face, t_2)$ et $Declipped(t_1, Face, t_2)$, ainsi que sur (EC3), (EC4), et sur les valeurs de $Face$, et aussi sur l'existence de quatre classes de modèles.

2 Corrigé détaillé et commenté

Tous les détails n'étaient pas demandés, il sont fournis ici afin d'essayer d'expliquer au mieux chaque élément de réponse.

2.1 Exercice 1

Solution 1.1.1

Fluent(s)	$Face$	*La pièce est côté face*
Action(s)	$Lancer$	*Lancer la pièce*
Formules	$\neg HoldsAt(Face, 0)$	$(RR1)$
	$HoldsAt(Face, 2+\epsilon)$	$(RR2)$
	$Initiates(Lancer, Face, t) \wedge$ $Terminates(Lancer, Face, t)$	(RA)
	$Happens(Lancer, 2)$	$(RB1)$
	$Happens(Lancer, 4)$	$(RB2)$

Il s'agit des données explicitement fournies par l'utilisateur. En "interne", la théorie considérée est:

$$(EC), (RR), Circ((RA) : Initiates, Terminates), Circ((RB) : Happens),$$

où (RR) est la réunion (ou conjonction) de $(RR1)$ et de $(RR2)$, et de même (RB) est $\{(RB1), (RB2)\}$, qui équivaut à $(RB1) \wedge (RB2)$.

Les calculs seront effectués à partir de cette théorie, et les "modèles" seront des modèles de cette théorie.

Comme en cours, (EC) est la réunion des formules rappelées ci-dessous (*ce rappel n'était bien sûr pas demandé, il est donné ici pour assurer l'autosuffisance de ce corrigé*):

$$Clipped(t_1, f, t_2) =_{def} \exists a, t\ [Happens(a, t) \wedge\ t_1 \leq t < t_2\ \wedge Terminates(a, f, t)] \quad (EC1)$$
$$Declipped(t_1, f, t_2) =_{def} \exists a, t\ [Happens(a, t) \wedge\ t_1 \leq t < t_2\ \wedge Initiates(a, f, t)] \quad (EC2)$$

$$HoldsAt(f, t) \Leftarrow Happens(a, t_1) \wedge Initiates(a, f, t_1) \wedge t_1 < t \wedge \neg Clipped(t_1, f, t) \quad (EC3)$$
$$\neg HoldsAt(f, t) \Leftarrow Happens(a, t_1) \wedge Terminates(a, f, t_1) \wedge t_1 < t \wedge \neg Declipped(t_1, f, t) \quad (EC4)$$

$$HoldsAt(f, t) \Leftarrow HoldsAt(f, t_1) \wedge t_1 < t \wedge\ \neg Clipped(t_1, f, t) \quad (EC5)$$
$$\neg HoldsAt(f, t) \Leftarrow \neg HoldsAt(f, t_1) \wedge t_1 < t \wedge \neg Declipped(t_1, f, t) \quad (EC6)$$

Solution 1.1.2 Il y a deux (types de) modèles. La façon pertinente de décrire ces modèles est de donner les différentes valeurs de $HoldsAt(Face, t)$, qui décrivent l'état de la pièce selon le temps:

$\neg HoldsAt(Face, 0)$		(par (RR1), qui est une des données)
$\neg HoldsAt(Face, t)$	pour tout $t,\ 0 < t \leq 2$	(par inertie, puisqu'il ne se produit aucune action strictement entre 0 et 2)
$HoldsAt(Face, t)$	pour tout $t,\ 2 < t \leq 4$	(par inertie, puisqu'il ne se produit aucune action strictement entre 2 et 4, et que l'on sait qu'après le lancer se produisant au temps 2, la pièce est coté face)
$HoldsAt(Face, t)$	pour tout $t,\ 4 < t$	(une des deux possibilités après le lancer du temps 4, et ensuite par inertie, puisqu'il ne se produit aucune action après le temps 4)

Cela donne donc le premier (type de) modèle, le second étant identique, sauf aux temps supérieurs à 4:

$\neg HoldsAt(Face, t)$	pour tout $t,\ 4 < t$	(l'autre possibilité après le lancer du temps 4)

Rappelons qu'une action ne modifie éventuellement la valeur d'un fluent qu'immédiatement après qu'elle se soit produite, d'où les intervalles ouverts à gauche et fermés à droite (le dernier étant infini à droite).

Solution 1.1.3 Sur cet exemple, la façon pertinente de décrire une situation [1] en un temps t donné est de préciser si la formule $HoldsAt(Face, t)$ est valide (cas de la pièce côté face), si la formule $\neg HoldsAt(Face, t)$ est valide (cas de pièce côté pile), ou si la formule $HoldsAt(Face, t)$ est indéterminée (on ne sait pas de quel côté est tombée la pièce). Rappelons qu'une formule est valide ssi elle est vraie dans tout modèle, et qu'elle est indéterminée ssi elle est vraie dans certains modèles et fausse dans d'autres.

D'après la réponse à la question précédente (1.1.2), on connaît donc précisément la situation aux temps 1 et 3, la pièce étant coté pile en 1 et côté face en 3.

Par contre, en 5, on ne sait pas de quel côté est tombée la pièce.

Une justification a déjà été donnée dans la réponse à la question précédente: le cours affirme que cette méthode respecte le "principe d'inertie", et que donc, si l'on n'a pas connaissance d'un évènement (ou d'une modification "inexpliquée" de la valeur d'un fluent), alors on suppose qu'il ne se produit pas d'évènement, et donc qu'aucun changement ne se produit. Ici, on n'a connaissance d'aucun événement entre 0 et 1, ni entre 2 et 3, ni entre 4 et 5, donc la situation en 3, par exemple, est la situation "immédiatement après" 2.

Solution 1.1.4 On a vu que les situations au temps 2 et 4 sont parfaitement déterminées:

$$\neg HoldsAt(Face, 2) \qquad \text{et} \qquad HoldsAt(Face, 4).$$

Cela vient de ce que le formalisme de Shoham respecte le principe d'inertie, et est tel qu'une action ne modifie éventuellement les valeurs des fluents "qu'immédiatement après" s'être produite. Ainsi, la situation en 2 est la situation en 0, et la situation en 4 est la situation "immédiatement après" 2.

Solution 1.1.5 La "variante déterministe" remplace (EC1) et (EC2) respectivement par:

$$Clipped(t_1, f, t_2) =_{def} \exists a, t\ [Happens(a, t) \wedge\ t_1 < t < t_2\ \wedge Terminates(a, f, t)] \quad (EC1')$$

$$Declipped(t_1, f, t_2) =_{def} \exists a, t\ [Happens(a, t) \wedge\ t_1 < t < t_2\ \wedge Initiates(a, f, t)] \quad (EC2')$$

En conséquence, $\neg Clipped(2, Face, t)$ et $\neg Declipped(2, Face, t)$ sont vrais pour tout t tel que $2 < t \leq 4$. Donc, (EC3) donne maintenant $HoldsAt(Face, t)$, tandis que (EC4) donne $\neg HodlsAt(Face, t)$ $(2 < t \leq 4)$. Cela montre que la "théorie interne" est inconsistante, donc le formalisme est inutilisable sans autre modification.

La méthode vue en cours permet toutefois, avec cette version du calcul des événements de Shanahan, de traduire les données.

Il convient alors, en plus du remplacement de $(EC1)$ et $(EC2)$ par $(EC1')$ et $(EC2')$, d'effectuer les deux modifications suivantes (cf transparent 35 du cours):

1. Remplacer (RA) par (RA'):
   $Initiates(LancerF, Face, t) \wedge Terminates(LancerP, Face, t)$ (RA')
2. Remplacer (RB) par (RB') qui est (RB) plus la formule suivante:
   $Happens(LancerF, t) \vee Happens(LancerP, t) \Leftarrow Happens(Lancer, t)$ $(RB3)$.

Les deux types de modèles seraient encore décrits de la même façon, par la valeur de la formule $HoldsAt(Face, t)$ selon la valeur de t. Remarquons qu'ici ils se distingueraient aussi par la valeur des formules $Happens(LancerP, 4)$ (vraie dans les modèles où $\neg HoldsAt(Face, t)$ est vraie pour $4 < t$ et fausse dans les autres) et $Happens(LancerF, 4)$ (vraie dans les modèles où $HoldsAt(Face, t)$ est vraie pour $4 < t$ et fausse dans les autres).

Aucun développement formel n'était demandé (voir ci-dessous en §4.2), on admet en particulier que là aussi la situation en $t = 2$ et en $t = 4$ est identique, pour ce qui concerne $HoldsAt(Face, t)$, à la situation qui "précède immédiatement" t.

1. Au sens informel du mot "situation", on n'est pas en calcul situationnel ici...

2.2 Exercice 2: ***Plus encore que pour les autres questions, ce corrigé est très détaillé, afin de faciliter sa compréhension. Tous ces détails n'étaient bien sûr pas indispensables***

Rappelons que dans ce cas (transparent 34 du cours), tout ce qu'on sait est qu'on lance la pièce à l'instant 2. On a donc (EC) et (RA) comme en Exercice 1, (RR) étant vide ici, et (RB) étant $Happens(Lancer, 2)$. La minimisation de $Happens$, fournie par $Circ((RB) : Happens)$, équivaut ici à la complétion de $Happens$ dans (RB), puisque (RB) est ici un seul atome en $Happens$, et donc une seule clause de Horn non récursive:

$$Happens(a, t) \Leftrightarrow a = Lancer \wedge t = 2. \qquad \text{(HapMin:Ex2)}$$

La minimisation de $Initiates$ et $Terminates$, fournie par $Circ((RA) : Initiates, Terminates)$, équivaut à la formule suivante [en effet, on a deux atomes, donc deux clauses de Horn non récursives]:

$$[Initiates(a, f, t) \Leftrightarrow (a{=}Lancer \wedge f{=}Face)] \wedge [Terminates(a, f, t) \Leftrightarrow (a{=}Lancer \wedge f{=}Face)] \qquad \text{(InTermMin)}$$

(EC1) fournit donc, en utilisant (HapMin:Ex2) et (InTermMin):
$Clipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow \exists a, t\ (a{=}Lancer \wedge t{=}2 \wedge\ t_1 \leq t < t_2\ \wedge\ a{=}Lancer \wedge f{=}Face)$, soit:
$Clipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow (t_1 \leq 2 < t_2\ \wedge f = Face)$.
De même, (EC2) donne $Declipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow (t_1 \leq 2 < t_2\ \wedge\ f = Face)$.
On a ainsi établi rigoureusement le résultat suivant

$$Clipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow Declipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow ((t_1 \leq 2 < t_2)\ \wedge\ f = Face). \quad \text{(Cl-Dcl:Ex2)}$$

Une conséquence de (Cl-Dcl:Ex2) est le résultat énoncé dans le cours:

$$Clipped(t_1, Face, t_2) \quad \text{ssi} \quad Declipped(t_1, Face, t_2) \quad \text{ssi} \quad t_1 \leq 2 < t_2.$$

On peut maintenant justifier les résultats énoncés dans le cours sur (EC3) et (EC4):
$Happens(a, t_1)\ \wedge\ Initiates(a, f, t_1)\ \wedge\ t_1 < t\ \wedge\ \neg Clipped(t_1, f, t)$ est équivalent [d'après (HapMin:Ex2) et (InTermMin)] à: $a = Lancer\ \wedge\ f = Face\ \wedge\ 2 < t\ \wedge\ \neg Clipped(2, Face, t)$.

D'après (Cl-Dcl:Ex2), on a $2 < t \Rightarrow Clipped(2, Face, t)$, c'est-à-dire $\neg[2 < t\ \wedge\ \neg Clipped(2, Face, t)]$. Donc $[Happens(a, t_1)\ \wedge\ Initiates(a, f, t_1)\ \wedge\ t_1 < t\ \wedge\ \neg Clipped(t_1, f, t)] \Leftrightarrow \bot$. Ainsi, la partie précédant le symbole d'implication $\Rightarrow$ de (EC3) est toujours fausse, donc l'implication (EC3) est toujours vraie (est une tautologie), et donc "ne sert à rien": une tautologie n'apporte pas d'information supplémentaire.

On établit de même $[Happens(a, t_1)\ \wedge\ Terminates(a, f, t_1)\ \wedge\ t_1 < t\ \wedge\ \neg Declipped(t_1, f, t)] \Leftrightarrow \bot$ et donc $(EC4) \Leftrightarrow \top$: (EC4) aussi est une tautologie.

Seuls restent donc réellement utiles les axiomes (EC5) et (EC6).
D'après (Cl-Dcl:Ex2), $(EC5)$ équivaut à
$HoldsAt(f, t) \Leftarrow [HoldsAt(f, t_1)\ \wedge\ t_1 < t\ \wedge\ \neg(f = Face\ \wedge\ t_1 \leq 2 < t)]$.
On en déduit:
$HoldsAt(Face, t) \Leftarrow [HoldsAt(Face, t_1)\ \wedge\ t_1 < t\ \wedge\ \neg(t_1 \leq 2 < t)]$, c'est-à-dire:
$HoldsAt(Face, t) \Leftarrow [HoldsAt(Face, t_1)\ \wedge\ ((2 < t_1 < t)\ \vee\ (t_1 < t \leq 2))]$, c'est-à-dire:
$[HoldsAt(Face, t) \Leftarrow HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow ((2 < t_1 < t) \vee (t_1 < t \leq 2))]$ ce qui équivaut à la conjonction des deux implications:
$[HoldsAt(Face, t) \Leftarrow HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (2 < t_1 < t)$, et
$[HoldsAt(Face, t) \Leftarrow HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (t_1 < t \leq 2)$.
De même, $(EC6)$ permet de démontrer que l'on a
$[\neg HoldsAt(Face, t) \Leftarrow \neg HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (2 < t_1 < t)$, et
$[\neg HoldsAt(Face, t) \Leftarrow \neg HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (t_1 < t \leq 2)$. On a démontré:

$$[HoldsAt(Face, t) \Leftrightarrow HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (2 < t_1 < t) \qquad \text{et}$$
$$[HoldsAt(Face, t) \Leftrightarrow HoldsAt(Face, t_1)] \Leftarrow (t_1 < t \leq 2).$$

On a ainsi démontré l'affirmation du cours: "jusqu'à 2 inclus, et après 2, $Face$ garde sa valeur". Ainsi, $Face$ ne peut éventuellement modifier sa valeur que "juste après" l'instant 2, suite au lancer de pièce qui intervient à cet instant. Il s'agit des résultats attendus, et l'on a démontré rigoureusement que le formalisme de Shanahan a bien ce comportement. Cela fournit les quatre types de modèles suivants, décrits par la valeur qu'ils donnent à la formule $HoldsAt(Face, t)$:

1. Modèle où $HoldsAt(Face, t)$, pour tout t,
2. Modèle où $\neg HoldsAt(Face, t)$, pour tout t,
3. Modèle où $HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t \leq 2$ et $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t > 2$, et enfin
4. Modèle où $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t \leq 2$ et $HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t > 2$.

3 Quelques erreurs plus ou moins fréquentes

1. Considérer qu'il y a un lancer de pièce à chaque instant entier.
2. Mélanger calcul des événements et calcul situationnel (évoquer des fluents relationnels et fonctionnels,...).
3. Introduire deux fluents au lieu d'un. On peut très bien, même si cela complique sensiblement les choses, introduire les deux fluents $Face$ et $Pile$. Mais alors il ne faut pas oublier d'ajouter à (RR) la formule qui dit que $Face$ est "le contraire" de $Pile$: $HoldsAt(Face, t) \Leftrightarrow \neg HoldsAt(Pile, t)$ (surtout pas $Face = \neg Pile$ qui n'a aucun sens, car $Face$ et $Pile$ sont des termes, et pas des formules). D'une façon générale, dans ces cas-là, il est également fortement conseillé de modifier (RA) pour tenir compte de ces deux fluents, sinon les minimisations risquent de ne pas produire les résultats attendus (il se peut toutefois qu'ici cela ne soit pas nécessaire, à vérifier...).
4. Remplacer $HoldsAt(Face, 2+\epsilon)$ (RR2) par $HoldsAt(Face, 2)$, qui ne signifie pas la même chose. Cela exigerait qu'entre 0 et 2, il y ait eu au moins un lancer de pièce non décrit explicitement, le dernier de ces lancers ayant placé la pièce côté face [2]. En effet, avec ce formalisme, une action ne modifie éventuellement un fluent "qu'immédiatement après" qu'elle se soit produite. Si le temps est entier, ϵ, plus petite quantité de temps possible, est 1. Si le temps est réel ou décimal, ϵ est positif et "suffisamment petit", en particulier l'énoncé ne doit mentionner aucune action (au moyen de $Happens$) ni aucune modification de fluent (au moyen de $HoldsAt$) strictement entre 2 et $2 + \epsilon$, ni entre 4 et $4 + \epsilon$, ni entre 0 et ϵ.
5. Utiliser le formalisme dit "déterministe" dès la question 1.1.1. Cela présente deux inconvénients: (1) rigoureusement, cela ne répond pas à la question posée, (2) c'est plus difficile.
6. Citer des résultats du cours, sans commentaire particulier et sans les relier aux questions posées.
7. L'exercice 2 était difficile. Il a été donné volontairement en dernier (de la partie "Approches logiques") et il n'était pas attendu qu'il soit résolu en entier. Par contre, il fallait donner des démonstrations rigoureuses, comme l'énoncé l'indiquait. Ne donner que les résultats, d'ailleurs énoncés en cours, n'apportait rien...

4 Compléments au sujet de l'exercice 1: *deux démonstrations formelles non demandées*

4.1 Question 1.1.2

(RB) est un ensemble de deux clauses de Horn non récursives (réduite chacune à un atome). La minimisation de $Happens$, effectuée par $Circ((RB) : Happens)$ équivaut donc ici encore à la complétion de $Happens$ dans (RB), laquelle donne

$$Happens(a, t) \Leftrightarrow (a = Lancer \wedge (t = 2 \vee t = 4)) \quad \text{(HapMin)}$$

(en particulier les données ne mentionnent aucune action a strictement entre 0 et 2, cf point 4 de §3).

2. Il y aurait d'ailleurs un problème dans ce cas. Il faudrait modifier (RB), sinon la minimisation de $Happens$ serait faite sans tenir compte de cette "action fantôme", et il y aurait inconsistance.

La minimisation de $Initiates$ et $Terminates$, réalisée par $Circ((RA) : Initiates, Terminates)$, équivaut, comme dans l'exercice 2, à **(InTermMin)**:

$$[Initiates(a, f, t) \Leftrightarrow (a{=}Lancer \wedge f{=}Face)] \wedge [Terminates(a, f, t) \Leftrightarrow (a{=}Lancer \wedge f{=}Face)].$$

Il n'y a aucune condition sur t, et (InTermMin) signifie en particulier que la seule action qui puisse modifier un fluent est $Lancer$, et que le seul fluent modifiable par une action est $Face$. Ici encore, la circonscription équivaut à la complétion, puisque (RA) équivaut à un ensemble de deux clauses de Horn réduites à des atomes, donc non récursives.

Il est mainternant facile d'adapter un résultat concernant un seul lancer (résultat énoncé en cours, transparent 34, et démontré rigoureusement ci-dessus en partie 2.2) au cas présent de deux lancers. En effet (EC1) et (EC2) fournissent, en utilisant (HapMin) et (InTermMin):

$$\begin{array}{rcl} Clipped(t_1, f, t_2) & \Leftrightarrow & ((t_1 \leq 2 < t_2 \ \vee \ t_1 \leq 4 < t_2) \ \wedge \ f = Face) \\ Declipped(t_1, f, t_2) & \Leftrightarrow & ((t_1 \leq 2 < t_2 \ \vee \ t_1 \leq 4 < t_2) \ \wedge \ f = Face). \end{array}$$

Appelons (Cl-Dcl) ce résultat.

Deux remarques:

1. On ne s'occupe pas dans cet exercice de ce qui se produit avant 0, donc on suppose $0 \leq t_1$, même si supprimer cette condition ne modifie pas les résultats.
2. L'équivalence entre $Clipped(t_1, Face, t_2)$ et $Declipped(t_1, Face, t_2)$ provient de la symétrie parfaite, pour les "axiomes définissant" (EC1) et (EC2), étant donné que l'on est dans un cas très particulier où les conditions données dans (RA) pour $Initiates$ et pour $Terminates$ sont identiques.

Comme dans le cas du cours (démontré en partie 2.2), on s'aperçoit que les axiomes (EC3) et (EC4) ne servent à rien ici (ce qui est heureux car d'après l'identité entre $Clipped$ et $Declipped$, s'ils étaient utilisables, cela provoquerait une inconsistance...). En effet, d'après (Cl-Dcl), (HapMin) et (InTermMin), on obtient les équivalences suivantes:

$$\begin{array}{ll}
\exists a, t_1 \ (Happens(a, t_1) \ \wedge \ Initiates(a, f, t_1) \ \wedge \ t_1 < t \ \wedge \ \neg Clipped(t_1, f, t)) & \equiv \\
\quad \exists a, t_1 \ (a = Lancer \ \wedge \ (t_1 = 2 \ \vee \ t_1 = 4) \ \wedge \ (a = Lancer \ \wedge \ f = Face) \ \wedge \ \ t_1 < t \ \wedge & \\
\qquad\qquad \neg(((t_1 \leq 2 < t) \ \vee \ (t_1 \leq 4 < t)) \ \wedge \ f = Face)) & \equiv \\
\exists t_1 \ ((t_1 = 2 \ \vee \ t_1 = 4) \ \wedge \ f = Face \ \wedge \ t_1 < t \ \wedge \ \neg((t_1 \leq 2 < t) \ \vee \ (t_1 \leq 4 < t))) & \equiv \\
\quad (f = Face \ \wedge \ 2 < t \ \wedge \ \neg(2 \leq 2 < t) \ \wedge \ \neg(2 \leq 4 < t)) \ \vee & \\
\quad (f = Face \ \wedge \ 4 < t \ \wedge \ \neg(4 \leq 2 < t) \ \wedge \ \neg(4 \leq 4 < t)) & \equiv \\
(f = Face \ \wedge \ 2 < t \ \wedge \ \neg(2 < t)) \ \vee \ (f = Face \ \wedge \ 4 < t \ \wedge \ \neg(4 < t)) & \equiv \\
\bot &
\end{array}$$

Ainsi, (EC3) équivaut à la tautologie $HoldsAt(f, t) \Leftarrow \bot$, et donc ne sert à rien (n'apporte aucune information, puisque la formule $\top$ est de toute façon vraie).

On obtient symétriquement que (EC4) équivaut à $\neg HoldsAt(f, t) \Leftarrow \bot$, c'est-à-dire à $\top$.

On obtient ainsi successivement:

1. $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout t tel que $t \leq 2$.

   En effet, si $t_1 < t_2 \leq 2$, on a $\neg Clipped(t_1, Face, t_2)$ et $\neg Declipped(t_1, Face, t_2)$, d'après (Cl-Dcl). (EC6) donne donc ici $\neg HoldsAt(Face, t) \Leftarrow \neg HoldsAt(Face, 0)$ pour tout t tel que $0 < t \leq 2$, et donc $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout t tel que $0 \leq t \leq 2$ d'après (RR1).

2. $HoldsAt(Face, t)$ pour tout t tel que $2 < t \leq 4$.

   Ici, l'axiome (EC5) est le seul des quatre axiomes (EC2–6) qui soit réellement utile. Il fournit précisément (grâce à (Cl-Dcl) encore) $HoldsAt(Face, t) \Leftarrow HoldsAt(Face, t_1)$ pour tous t, t_1 tels que $2 < t_1 <$

$t \leq 4$, or on sait que pour tout t_1 supérieur à 2 et suffisamment proche de 2, on a $HoldsAt(Face, t_1)$ d'après (RR2)[3].

3. $HoldsAt(Face, t_1) \Leftrightarrow HoldsAt(Face, t_2)$ pour tous t_1, t_2 supérieurs à 4 (par exemple $4 < t_1 < t_2$).

   (EC5) et (EC6) fournissent le résultat. En effet, puisque l'on a $\neg Clipped(t_1, Face, t_2)$ et $\neg Declipped(t_1, Face, t_2)$ d'après (Cl-Dcl), (EC5) et (EC6) donnent respectivement $HoldsAt(Face, t_2) \Leftarrow HoldsAt(Face, t_1)$ et $\neg HoldsAt(Face, t_2) \Leftarrow \neg HoldsAt(Face, t_1)$, et la conjonction de ces deux formules équivaut à $HoldsAt(Face, t_1) \Leftrightarrow HoldsAt(Face, t_2)$.

Cette démonstration justifie formellement les réponses données en Solution 1.1.2.

Remarquons qu'il s'agit d'une utilisation vraiment particulière du formalisme, puisque les axiomes (EC3) et (EC4) n'interviennent jamais. $Initiates$ et $Terminates$ interviennent quand même, pour permettre au fluent $Face$ de modifier éventuellement sa valeur "juste après" chaque lancer de pièce, mais uniquement par le biais de $Clipped$ et $Declipped$, qui bloquent l'inertie, produite par (EC5) et (EC6), en $t = 2$ et $t = 4$.

4.2 Question 1.1.5

On part donc de $\{(EC'), (RR), (RA'), (RB')\}$, où (EC'), l'ensemble des axiomes du formalisme considéré ici, est (EC) sauf que $(EC1)$ et $(EC2)$ sont remplacés par $(EC1')$ et $(EC2')$. La théorie considérée en interne est donc

$$\{(EC'), (RR), Circ((RA') : Initiates, Terminates), Circ((RB') : Happens)\}.$$

On trouve donc maintenant la formule suivante [en remplacement de (InTermMin)], par minimisation de $Initiates, Terminates$, c'est-à-dire par $Circ((RA') : Initiates, Terminates)$:

$$(Initiates(a, f, t) \Leftrightarrow a = LancerF \ \wedge \ f = Face) \ \wedge \ (Terminates(a, f, t) \Leftrightarrow a = LancerP \ \wedge \ f = Face).$$

Rappelons que l'on suppose les axiomes de séparation des constantes, donc $Lancer \neq LancerF$, $Lancer \neq LancerP$ et $LancerF \neq LancerP$.

La minimisation de $Happens$, effectuée par $Circ((RB') : Happens)$ est plus compliquée, puisque on a une clause récursive en $Happens$: $(RB3)$.

On admettra ici que l'on trouve le résultat, assez naturel, suivant. Remarquer en particulier que le "$\vee$" de $(RB3)$ devient par minimisation un "ou exclusif", noté ici $\not\Leftrightarrow$.

$$Happens(a, t) \Leftrightarrow ((t = 2 \ \vee \ t = 4) \ \wedge \ ((a = Lancer) \vee (a = LancerF \not\Leftrightarrow a = LancerP))) \quad \text{(HapMin}'\text{)}$$

$(EC1')$ et $(EC2')$ donnent donc:

$$Clipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow \exists t \ \exists a \ ((t = 2 \ \vee \ t = 4) \wedge a = LancerP \ \wedge \ (t_1 < t < t_2) \ \wedge \ f = Face),$$

$$Declipped(t_1, f, t_2) \Leftrightarrow \exists t \ \exists a \ ((t = 2 \ \vee \ t = 4) \wedge a = LancerF \ \wedge \ (t_1 < t < t_2) \ \wedge \ f = Face).$$

Les simplifications de ces formules (noter en particulier que $\exists a \ a = LancerP$ est une tautologie), donnent donc le résultat suivant, qui remplace (Cl-Dcl), et que l'on appellera **(Cl-Dcl′)**:

$$\begin{array}{rcl} Clipped(t_1, f, t_2) & \Leftrightarrow & (((t_1 < 2 < t_2) \ \vee \ (t_1 < 4 < t_2)) \ \wedge \ f = Face) \\ Declipped(t_1, f, t_2) & \Leftrightarrow & (((t_1 < 2 < t_2) \ \vee \ (t_1 < 4 < t_2)) \ \wedge \ f = Face). \end{array}$$

3. L'axiome dual (EC6) fournit de même $\neg HoldsAt(Face, t) \Leftarrow \neg HoldsAt(Face, t_1)$ (pour tous t, t_1 tels que $2 < t_1 < t \leq 4$), mais rien n'établit $\neg HoldsAt(Face, t_1)$ pour un t_1 tel que $2 < t_1 < t \leq 4$, donc on ne peut pas en déduire $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour ces valeurs de t ($2 < t \leq 4$).

On va maintenant vérifier que l'on obtient bien là encore les deux types de modèles décrits en Solution 1.1.2.

Là encore, la façon pertinente de décrire ces modèles est de donner la valeur de vérité de la formule $HoldsAt(Face, t)$ selon les différentes valeur de t, mais il convient d'ajouter aussi la précision suivante: le premier (type de) modèle satisfait également la formule $Happens(LancerF, 4)$ (et falsifie $Happens(LancerP, 4)$), tandis que le second type satisfait également $Happens(LancerP, 4)$ (et falsifie $Happens(LancerF, 4)$).

Là encore, on va trouver $\neg HoldsAt(Face, 2)$ et $HoldsAt(Face, 4)$: le fluent $Face$ n'est (éventuellement) modifié "qu'immédiatement après" un lancer.

Voici les formules qui permettent de décrire les deux types de modèles, suivies de leurs démonstrations :

1. $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t \leq 2$:

   (EC3) ne donne rien, car on n'a pas $Happens(a, t_1) \ \wedge \ t_1 < t < 2$.

   (EC4) ne donne rien pour la même raison.

   (EC5) ne donne rien car on n'a pas $HoldsAt(f, t_1) \ \wedge \ t_1 < t < 2$.

   (EC6) est l'axiome qui donne le résultat $\neg HoldsAt(Face, t)$ (par "inertie") car on a $\neg HoldsAt(Face, 0) \wedge 0 < t \ \wedge \ \neg Declipped(0, Face, t)$. Le problème est $\neg Declipped(0, Face, t)$, or d'après (Cl-Dcl$'$), on a $Declipped(0, Face, t) \Leftrightarrow ((0 < 2 < t) \vee (0 < 4 < t))$. Pour tout $t \leq 2$, $2 < t$ et $4 < t$ sont faux, donc on a bien $\neg Declipped(0, Face, t)$ si $t \leq 2$.

2. $HoldsAt(Face, 4)$ pour tout t tel que $2 < t \leq 4$:

   On obtient de même que seul (EC5) est "applicable", et qu'il donne $HoldsAt(Face, t)$ car on a $HoldsAt(Face, 2 + \epsilon) \ \wedge \ 2 + \epsilon < t \ \wedge \ \neg Declipped(2 + \epsilon, Face, t)$, en effet $Declipped(2 + \epsilon, Face, t) \Leftrightarrow ((2 + \epsilon < 2 < t) \vee (2 + \epsilon < 4 < t))$,
   or $2 + \epsilon < 2$ est faux, et $4 < t$ est faux si $2 < t \leq 4$.

3. Soit on a $Happens(LancerF, 4)$, et alors on a $HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t > 4$,
   soit on a $Happens(LancerP, 4)$, et alors on a $\neg HoldsAt(Face, t)$ pour tout $t > 4$:

   En effet, d'après (Cl-Dcl$'$) on a $\neg Clipped(4, Face, t)$ et $\neg Declipped(4, Face, t)$, puisque $4 < 2 < t$ et $4 < 4 < t$ sont faux. De plus, $Initiates(LancerF, Face, t_1)$ et $Terminates(LancerP, Face, t_1)$ sont vrais pour tout t_1 d'après (RA'), donc pour $t_1 = 4$. Donc, (EC3) et (EC4) fournissent respectivement:
   $HoldsAt(Face, t) \Leftarrow Happens(LancerF, 4)$ et
   $\neg HoldsAt(Face, t) \Leftarrow Happens(LancerP, 4)$ pour tout $t > 4$.
   Comme on sait d'après (HapMin$'$) qu'on a $Happens(LancerF, 4) \not\Leftrightarrow Happens(LancerP, 4)$, on sait que l'on a soit $Happens(LancerF, 4)$, soit $Happens(LancerP, 4)$ (ou exclusif).