Calcul situationnel (examen de janvier 2001)

On considère le scénario représenté par les fluent et actions suivants:

- Fluent: *garée(s)* “La voiture est garée en situation s.”
- Actions

garer	“Garer la voiture, avec la pré-condition *VRAI*.”
voler	“Voler la voiture, avec comme pré-condition le fait que la voiture doit être garée.”
retirer	“Retirer la voiture, avec comme pré-condition le fait que la voiture doit être garée” (retirer signifie retirer par le conducteur ou par une dépanneuse, par exemple pour une mise en fourrière).

On sait de plus:

- Au début (dans la situation initiale) la voiture est garée.
- Garer la voiture la rend garée.
- Voler ou retirer la voiture la rend non garée.

On veut traduire ce scénario en terme de la théorie élémentaire d’actions, en utilisant la solution au problème du cadre vue en cours.

1. Donner les axiomes d’effets et de pré-conditions d’actions qui traduisent les données.
2. En déduire le ou les axiomes de succession d’état correspondant.
3. On rappelle ici l’axiome (PCFR) vu en cours.

$$F(\vec{x}, do(a,s)) \;\Leftrightarrow\; [\gamma_F^+(\vec{x},a,s) \;\vee\; (F(\vec{x},s) \;\wedge\; \neg\gamma_F^-(\vec{x},a,s))] \qquad (PCFR)$$

   (a) Démontrer que (PCFR), plus les axiomes de base, permettent de déduire la formule:

$$\begin{aligned} \forall\, s, s' \;\{ \quad & [\, s \sqsubseteq s' \;\wedge\; F(\vec{x},s) \;\wedge\; \neg F(\vec{x},s')\,] \quad \Rightarrow \\ & \exists\, a, s'' \;[\, \gamma_F^-(\vec{x},a,s'') \;\wedge\; s \sqsubset do(a,s'') \sqsubseteq s' \,] \;\}. \end{aligned}$$

   (b) Que signifie cette dernière formule? Est-elle intuitivement attendue?

4. Soit la formule suivante:

$$\forall s\; \{[\neg \textit{garée}(s) \wedge \textit{executable}(s)] \;\Rightarrow\; \exists s'\; [do(\textit{retirer}, s') \sqsubseteq s \;\vee\; do(\textit{voler}, s') \sqsubseteq s]\}$$

   (a) Que signifie cette formule? Est-elle intuitivement attendue?
   (b) Démontrer rigoureusement cette formule.

Corrigé

Question 1

Axiomes d'effets pour le fluent relationnel *garée*:

– Axiome d'effet positif: $\textit{garée}(do(\textit{garer}, s))$.

– Axiomes d'effets négatifs: $\neg\textit{garée}(do(\textit{retirer}, s))$, $\neg\textit{garée}(do(\textit{voler}, s))$.

Axiomes de pré-conditions d'actions:

– Pour l'action *garer*: $Poss(\textit{garer}, s) \;\;\Leftrightarrow\;\; VRAI$.

– Pour l'action *retirer*: $Poss(\textit{retirer}, s) \;\;\Leftrightarrow\;\; \textit{garée}(s)$.

– Pour l'action *voler*: $Poss(\textit{voler}, s) \;\;\Leftrightarrow\;\; \textit{garée}(s)$.

Question 2

Forme générale de l'axiome d'effet positif de *garée*:
$a = \textit{garer} \;\Rightarrow\; \textit{garée}(do(a, s))$.
Forme générale des axiomes d'effets négatifs de *garée*:
$(a = \textit{retirer} \;\vee\; a = \textit{voler}) \;\;\Rightarrow\;\; \neg\textit{garée}(do(a, s))$.
Grâce aux axiomes d'unicité des noms (ou de "séparation des constantes") des actions, la condition de cohérence donnée en cours est satisfaite: $\neg\exists a\; (a = \textit{garer} \wedge (a = \textit{retirer} \vee a = \textit{voler}))$.

Effectuer la *fermeture causale*, c'est-à-dire ajouter aux axiomes d'effets les axiomes de *fermeture de l'explication* pour le fluent relationnel *garée*, équivaut donc à l'axiome de succession d'états suivant pour *garée*: (PC*garée*)

$$\textit{garée}(do(a, s)) \;\;\Leftrightarrow\;\; [a = \textit{garer} \;\;\vee\;\; (\textit{garée}(s) \;\;\wedge\;\; \neg(a = \textit{retirer} \;\vee\; a = \textit{voler}))]$$

Question 3

(a) On suppose qu'on a (PCFR) plus les axiomes de base. On sait que les axiomes de bases fournissent l'axiome de double induction suivant:

$$\begin{array}{l} \forall R \quad \{ \quad \{ \quad R(S_0, S_0) \;\wedge\; [\forall a, s\; R(s, s) \;\Rightarrow\; R(do(a, s), do(a, s))] \;\wedge \\ \qquad\qquad\quad [\forall a, s, s'\; (s \sqsubseteq s' \wedge R(s, s')) \;\Rightarrow\; R(s, do(a, s'))] \;\; \} \qquad \Rightarrow \\ \qquad\quad [\forall s, s'\; s \sqsubseteq s' \;\Rightarrow\; R(s, s')] \;\; \}. \end{array}$$

Soit $R(s, s')$ la formule

$$[F(\vec{x}, s) \;\;\wedge\;\; \neg F(\vec{x}, s')\,] \quad\;\Rightarrow\;\; \exists\, a, s'' \;\; [\; \gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \;\;\wedge\;\; s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s'\;].$$

$R(S_0, S_0)$ est trivialement satisfaite. (DI1)
En effet, $F(\vec{x}, S_0) \;\wedge\; \neg F(\vec{x}, S_0)$ est $FAUX$ et "$FAUX \;\;\Rightarrow$ n'importe quoi" est toujours vrai.

De même, $R(do(a, s), do(a, s))$ est trivialement satisfaite, donc, comme "n'importe quoi $\Rightarrow VRAI$" est toujours vrai,
$[\forall a, s\; R(s, s) \;\Rightarrow\; R(do(a, s), do(a, s))]$ est également satisfaite. (DI2)

Supposons maintenant $s \sqsubseteq s' \wedge R(s, s')$.

$R(s, do(a, s'))$ est par définition
$[F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, do(a, s'))] \ \Rightarrow \ \exists\, a, s'' \ [\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq do(a, s')]$.

D'après (PCRF), on a $\neg F(\vec{x}, do(a, s')) \Leftrightarrow [\neg\gamma_F^+(\vec{x}, a, s') \ \wedge \ (\neg F(\vec{x}, s') \ \vee \ \gamma_F^-(\vec{x}, a, s'))]$, et donc $\neg F(\vec{x}, do(a, s')) \Rightarrow \neg F(\vec{x}, s') \ \ \vee \ \ \gamma_F^-(\vec{x}, a, s'))$, d'où on déduit
$[F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, do(a, s'))] \ \Rightarrow \ [(F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, s')) \ \vee \ [F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \gamma_F^-(\vec{x}, a, s')]]$,
et à plus forte raison, ce qui suffit ici:
$[F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, do(a, s'))] \ \Rightarrow \ [(F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, s')) \ \vee \ \gamma_F^-(\vec{x}, a, s')]$. (F1)

Comme $s' \sqsubset do(a, s')$ d'après l'axiome de base (4), on obtient, grâce à la définition de $\sqsubseteq$ et à la transitivité de $\sqsubseteq$ (conséquence des axiomes de base et de la définition de $\sqsubseteq$): $do(a, s'') \sqsubseteq s' \ \ \Rightarrow \ \ do(a, s'') \sqsubseteq do(a, s')$.

De $R(s, s')$, on déduit donc:
$[F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, s')] \ \Rightarrow \ \exists\, a, s'' \ [\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq do(a, s')]$. (F2)

De plus, on a $\gamma_F^-(\vec{x}, a, s') \ \Rightarrow \ \exists\, a, s'' \ [\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq do(a, s')]$ (F3)
(intuitivement, choisir $s'' = s'$, ce qui donne $do(a, s'') = do(a, s')$ et donc $do(a, s'') \sqsubseteq do(a, s')$ par définition de $\sqsubseteq$, et aussi, puisqu'on suppose ici $s \sqsubseteq s'$, $s \sqsubset do(a, s'')$ d'après l'axiome (4)).

De (F1), (F2) et (F3) on déduit $R(s, do(a, s'))$, c'est-à-dire qu'on a démontré:
$\forall a, s, s' \ (s \sqsubseteq s' \wedge R(s, s')) \ \Rightarrow \ R(s, do(a, s'))$ (DI3).

De (DI1), (DI2) et (DI3), on déduit $\forall s, s' \ s \sqsubseteq s' \ \Rightarrow \ R(s, s')$ grâce à l'axiome de double induction, c'est-à-dire qu'on a démontré:
$\forall s, s' \ s \sqsubseteq s' \ \Rightarrow \ \{[F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, s')] \ \Rightarrow \ \exists\, a, s'' \, [\, \gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s']\}$,
ce qui équivaut à la formule demandée:
$\forall s, s' \ s\{[\sqsubseteq s' \ \wedge \ F(\vec{x}, s) \ \wedge \ \neg F(\vec{x}, s')] \ \Rightarrow \ \exists\, a, s'' \ [\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s']\}$.

(b) Cette formule signifie que si le fluent relationnel F est passé de $VRAI$ à $FAUX$ entre une situation s et une situation s' successeur de s, il doit exister, parmi la suite d'action qui a permis de passer de s à s', une action a qui a pour effet de rendre F faux (c'est-à-dire qui rend la formule $\gamma_F^-(\vec{x}, a, s'')$ vraie).

Cette formule est donc intuitivement attendue, comme conséquence des axiomes de fermeture de l'explication.

Question 4

(a) La formule signifie que si la voiture n'est plus garée en une situation (exécutable) s, alors il doit exister une action *retirer* ou une action *voler* dans la suite des actions qui ont abouti à s (à partir de la situation initiale).

Elle est attendue, puisque c'est une conséquence des axiomes de fermeture de l'explication: ici, les deux seules actions qui ont pour effet de rendre la voiture *non garée* sont *retirer* et *voler*.

(b) Une démonstration possible utilise la formule établie en question 3. On particularise la formule en donnant aux variables s et s' respectivement les valeurs S_0 et s (la variable s de la formule de la présente question), en choisissant comme fluent relationnel F le fluent *garée*. L'axiome de succession d'état trouvé en question 2 donne en effet comme formule

$\gamma^-_{\textit{garée}}(a, s'')$ la formule $a = \textit{retirer} \ \vee \ a = \textit{voler}$ [il n'y a pas ici de paramètre supplémentaire $\vec{x}$ ni de paramètre de situation dans la formule $\gamma^-_{\textit{garée}}(a, s'')$].

Ainsi, $\exists\ a, s''\ [\gamma^-_F(\vec{x}, a, s'') \ \wedge \ s \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s']$ est la formule $\exists\ a, s''\ [(a = \textit{retirer} \ \vee \ a = \textit{voler}) \ \wedge \ S_0 \sqsubset do(a, s'') \sqsubseteq s]$. On a de toute façon $S_0 \sqsubset do(a, s'')$ comme conséquence des axiomes de base, et $\exists\ a, s''\ [(a = \textit{retirer} \ \vee \ a = \textit{voler}) \ \wedge \ do(a, s'') \sqsubseteq s]$ équivaut à $\exists s'\ do(\textit{retirer}, s') \sqsubseteq s \ \vee \ do(\textit{gare}, s') \sqsubseteq s$.

On obtient ainsi la formule suivante, qui implique évidemment la formule demandée:

$$\forall s\ \{\neg \textit{garée}(s) \ \Rightarrow \ \exists s'\ [do(\textit{retirer}, s') \sqsubseteq s \ \vee \ do(\textit{voler}, s') \sqsubseteq s]\}.$$

Pour les curieux, voici une explication de la validité de cette formule renforcée: Ici les seules situations non exécutables sont du type $do(a, s'')$ avec $a = \textit{voler}$ ou $a = \textit{retirer}$ et $\neg \textit{garée}(s'')$. Ainsi, on a aussi

$\neg executable(s) \Rightarrow \exists s''\ [do(\textit{retirer}, s'') = s \ \vee \ do(\textit{voler}, s'') = s]$, donc à plus forte raison $\neg executable(s) \Rightarrow \exists s''\ [do(\textit{retirer}, s'') \sqsubseteq s \ \vee \ do(\textit{voler}, s'') \sqsubseteq s]$.

On peut d'ailleurs remarquer que l'on a aussi $\neg executable(s) \Rightarrow \neg \textit{garée}(s)$, puisque l'on a $\neg \textit{garée}(do(\textit{retirer}, s''))$ et $\neg \textit{garée}(do(\textit{voler}, s''))$ d'après (PC*garée*) (en fait il suffit ici de considérer les axiomes d'effets négatifs du fluent relationnel *garée*, sans même invoquer (PC*garée*) qui est plus fort).

Bien sûr, ces formules, concernant des situations non exécutables, n'ont qu'un intérêt pratique limité...