Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 8 janvier 1998, 14:00 à 15:30

Exercice :

Dans le système GPS (global positioning system) chaque satellite du réseau transmet à intervalle régulier un message indiquant en particulier sa position, et la date. En comparant la date d'émission et la date de réception du message, le récepteur obtient une mesure de sa distance par rapport au satellite.

Les horloges des satellites du réseau sont parfaitement synchrones, mais l'horloge du récepteur peut différer d'une quantité Δ supposée constante au cours du temps, mais inconnue, appelée *offset*.

Pour chaque $i = 1, \cdots, I$, la mesure de pseudo–distance Y_k^i dont dispose le récepteur à l'instant t_k de la part du i–ème satellite, est

$$Y_k^i = \|r^i(t_k^i) - r_k\| + c\,\Delta + V_k^i \ ,$$

où c est la vitesse de la lumière, $r^i(t_k^i)$ est la position du i–ème satellite à l'instant t_k^i où le message a été émis, et r_k est la position du récepteur à l'instant t_k.

On suppose que la suite $\{V_k^i\,,\, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien de variance R. On note $Y_k = (Y_k^i\,,\, i = 1, \cdots, I\}$ la collection des mesures de pseudo–distance dont dispose le récepteur à l'instant t_k de la part de l'ensemble des satellites du réseau.

(i) **Commenter la terminologie pseudo–distance.**

On suppose que le mobile portant le récepteur se déplace à une vitesse constante, mais inconnue. On dénote par $X = (r, v, \Delta)$ la variable d'état (position et vitesse du mobile, et offset du récepteur). Il s'agit d'un vecteur de dimension 7.

(ii) **On pose $X_k = X(t_k)$. Ecrire l'équation d'etat, exprimant X_{k+1} en fonction de X_k, sous la forme**

$$X_{k+1} = F_k \, X_k \ ,$$

c'est–à–dire donner l'expression de la matrice F_k.

Compte tenu que la vitesse du mobile n'est pas exactement constante, on utilisera plutôt l'équation d'etat suivante

$$X_{k+1} = F_k \, X_k + W_k \ ,$$

où la suite $\{W_k \, , \, k \geq 0\}$ est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance Q.

On suppose que l'état initial X_0 est un vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$, et de matrice de covariance Q_0^X. On suppose que les bruits $\{V_k^i \, , \, k \geq 0\}$ pour $i = 1, \cdots, I$, et $\{W_k \, , \, k \geq 0\}$, et l'état initial X_0 sont mutuellement indépendants.

(iii) **Donner les équations du filtre de Kalman étendu pour l'estimation de l'état X_k basé sur les observations $\mathcal{Y}_k = (Y_0, \cdots, Y_k)$.**

Problème :

L'objectif de ce problème est d'étudier la détection d'un changement brusque dans les probabilités de transition d'une chaîne de Markov cachée, et l'estimation de l'instant r de changement (en supposant qu'il ait été décidé qu'un changement a eu lieu). On s'intéressera ici à proposer une méthode *efficace* de calcul de la fonction de vraisemblance associée au problème d'estimation.

On observe la suite $(Y_0, \cdots, Y_n)$ sur un horizon n fixé, et pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, on considère le modèle $\mathbf{M}(r)$ suivant :

- $\{X_k\,,\ k = 0, \cdots, n\}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, \cdots, N\}$, de loi initiale
$$\mathbf{P}^{(r)}[X_0 = i] = \nu_i \ ,$$
et de matrice de transition
$$\mathbf{P}^{(r)}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] = \pi^k_{i,j}(r) = \begin{cases} \pi_{i,j} & \text{si } k = 0, \cdots, r-1 \\ \\ \bar{\pi}_{i,j} & \text{si } k = r, \cdots, n-1 \end{cases}$$
dépendant du temps.

- La suite des observations $\{Y_k\,,\ k = 0, \cdots, n\}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, la propriété de canal sans mémoire est vérifiée, avec les densités d'observation
$$\mathbf{P}^{(r)}[Y_k \in dy \mid X_k = i] = \psi_i(y)\, dy \ .$$

Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, on se propose de calculer la vraisemblance $\ell(r)$ du modèle $\mathbf{M}(r)$, c'est–à–dire de calculer la distribution de probabilité jointe des observations $(Y_0, \cdots, Y_n)$ sous la probabilité $\mathbf{P}^{(r)}$
$$\mathbf{P}^{(r)}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n] = \ell(r)\ dy_0 \cdots dy_n \ .$$

Première Méthode

(i) **Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, montrer que**
$$\ell(r) = \sum_{i \in E} p^n_i(r) \ ,$$
où la suite $\{p^k(r)\,,\ k = 0, \cdots, n\}$ vérifie une équation forward de Baum dont on donnera l'expression.

(ii) **Combien d'équations faut–il résoudre avec cette méthode pour calculer $\ell(r)$ pour toutes les valeurs $r = 0, \cdots, n+1$?**

(iii) **Montrer qu'on peut réduire de moitié le volume des calculs nécessaires.**

Pour réduire encore le volume des calculs, on considère la méthode suivante.

Deuxième Méthode

(iv) **Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, donner l'expression de l'équation backward de Baum vérifiée par la suite backward $\{v^k(r)\,,\, k = n, \cdots, 0\}$ associée à $\{p^k(r)\,,\, k = 0, \cdots, n\}$.**

(v) **Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, montrer que la quantité**

$$\sum_{i \in E} p_i^k(r)\; v_i^k(r)$$

ne dépend pas de l'instant k. En déduire que

$$\ell(r) = \sum_{i \in E} p_i^r(r)\; v_i^r(r)\ .$$

(vi) **Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, montrer que $p^r(r) = p^r$, où la suite $\{p^k\,,\, k = 0, \cdots, n\}$ vérifie une équation forward de Baum dont on donnera l'expression.**

(vii) **Pour chaque valeur $r = 0, \cdots, n+1$, montrer que $v^r(r) = \bar{v}^r$, où la suite $\{\bar{v}^k\,,\, k = n, \cdots, 0\}$ vérifie une équation backward de Baum dont on donnera l'expression.**

(viii) **Combien d'équations suffit–il de résoudre avec cette méthode pour calculer $\ell(r)$ pour toutes les valeurs $r = 0, \cdots, n+1$?**

(ix) **Comparer les deux méthodes du point de vue de la quantité de données à garder en mémoire.**