Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 11 janvier 1996, 8:00 à 9:30

Exercice 1 :

On considère le modèle de Markov caché associé aux données suivantes :

- *loi initiale* $\nu = (\nu_i)$

$$\nu_i = \mathbf{P}[X_0 = i] \ , \qquad \text{pour tout } i \in E,$$

- *matrice de transition* $\pi = (\pi_{i,j})$

$$\pi_{i,j} = \mathbf{P}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] \ , \qquad \text{pour tout } i,j \in E,$$

- *densités d'observation* $\psi = (\psi_i)$

$$\psi_i(y)\, dy = \mathbf{P}[Y_k \in dy \mid X_k = i] \ , \qquad \text{pour tout } i \in E, \text{ et tout } y \in \mathbf{R}^d.$$

Soit n un instant final *fixé* : on souhaite estimer le nombre N_i de visites de la chaîne de Markov dans l'état i, et le nombre $N_{i,j}$ de transitions effectuées par la chaîne de Markov de l'état i à l'état j, au vu des observations $\mathcal{Y}_n = (Y_0, \cdots, Y_n)$.

(i) **En utilisant la formule**

$$N_i = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[X_k = i]} \ ,$$

calculer l'estimateur $\widehat{N_i} = \mathbf{E}[N_i \mid \mathcal{Y}_n]$ à l'aide des variables forward et backward.

(ii) **En utilisant la formule**

$$N_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}[X_k = i, X_{k+1} = j] \ ,$$

calculer l'estimateur $\widehat{N}_{i,j} = \mathbf{E}[N_{i,j} \mid \mathcal{Y}_n]$ **à l'aide des variables forward et backward.**

(iii) **Montrer comment le résultat obtenu en (ii) permet de retrouver le résulat obtenu de façon directe en (i).**

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'établir les équations du lisseur de Kalman pour le système linéaire suivant :

$$X_{k+1} = F\, X_k + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses habituelles :

- X_0 *variable aléatoire gaussienne.*
- $\{W_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* Q .
- $\{V_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* R *inversible.*
- X_0*,* $\{W_k\}$ *et* $\{V_k\}$ *mutuellement indépendants.*

On suppose en outre que la matrice de covariance Q est *inversible.*

Soit n un instant final *fixé* : on souhaite calculer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $\mathcal{Y}_n = (Y_0, \cdots, Y_n)$, pour tout instant k antérieur à n.

(i) **Montrer que la loi conditionnelle de X_k sachant $\mathcal{Y}_n$ est gaussienne.**

On denote par $\widehat{X}_k^n$ la moyenne de cette loi conditionnelle, i.e.

$$\widehat{X}_k^n \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{E}[X_k \mid \mathcal{Y}_n] \ .$$

On suppose que le filtre de Kalman $(\widehat{X}_k, P_k)$ a été calculé dans un premier temps, pour tout $k = 0, \cdots, n$. L'objectif est d'établir une formule de récurrence *rétrograde* pour le calcul de $\widehat{X}_k^n$ à partir de $\widehat{X}_{k+1}^n$, pour tout $k = n-1, \cdots, 0$.

(ii) **Vérifier que $\widehat{X}_n^n = \widehat{X}_n$ à l'instant final $k = n$.**

(iii) **En utilisant la formule de Bayes, montrer que**

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n \,]\, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] \ ,$$

et que

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] \, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,] \ .$$

(iv) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots Y_n \in dy_n \mid X_{k+1} = x' \,]$$

$$= c(x', y_{k+1}, \cdots, y_n) \; dy_{k+1} \cdots dy_n \ .$$

(v) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x \,]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \, \sqrt{\det Q}} \; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} \, (x' - F\,x)^* \, Q^{-1} \, (x' - F\,x) \Big\} \; dx' \ .$$

(vi) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid \mathcal{Y}_k \,] =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \, \sqrt{\det P_k}} \; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} \, (x - \widehat{X}_k)^* \, P_k^{-1} \, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \; dx \ .$$

(vii) **Déduire de (iii), (iv), (v) et (vi) que**

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid \mathcal{Y}_n \,] =$$

$$= a(Y_0, \cdots, Y_n) \; c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n) \; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} \, (x' - F\,x)^* \, Q^{-1} \, (x' - F\,x) \Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2} \, (x - \widehat{X}_k)^* \, P_k^{-1} \, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \; dx \, dx' \ .$$

(viii) **Expliquer pourquoi la moyenne** $(\widehat{X}_k^n, \widehat{X}_{k+1}^n)$ **de cette loi conditionnelle coïncide avec le maximum de la fonction**

$$\phi(x,x') \;=\; c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n)\; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\,x) \Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^*\, P_k^{-1}\, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \;.$$

(ix) **En déduire que** $\widehat{X}_k^n$ **coïncide avec le minimum de la fonction**

$$J(x) = \tfrac{1}{2}\, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\,x) + \tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^*\, P_k^{-1}\, (x - \widehat{X}_k) \;.$$

(x) **En déduire que** $\widehat{X}_k^n$ **vérifie**

$$[\, F^*\, Q^{-1}\, F + P_k^{-1} \,]\; \widehat{X}_k^n = F^*\, Q^{-1}\, \widehat{X}_{k+1}^n + P_k^{-1}\, \widehat{X}_k \;,$$

c'est–à–dire que

$$\widehat{X}_k^n = \widehat{X}_k + S_k\, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\, \widehat{X}_k) \;,$$

avec

$$S_k = P_k\, F^*\, [\, F\, P_k\, F^* + Q \,]^{-1} \;.$$