Université de Rennes 1
Master EEEA (parcours SISEA)

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 22 février 2018, 10:15 à 12:15

Le but de ce problème est de proposer des formulations équivalentes pour le lissage de Kalman, et de comparer les mérites respectifs des différentes formulations, en terme de temps de calcul (nombre d'opérations mises en œuvre, matrices à inverser, etc.), de taille mémoire (nombre de variables calculées à conserver), d'utilisation/ré–utilisation des observations, d'hypothèses nécessaires.

Pour fixer les notations, on considère une suite d'états cachés $\{X_k\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, vérifiant

$$X_k = F_k\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

où la suite $\{W_k\}$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et une suite d'observations $\{Y_k\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant

$$Y_k = H_k\, X_k + V_k \ ,$$

où la suite $\{V_k\}$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et on suppose que

- la condition initiale X_0 est un vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X,
- la suite $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien, de matrice de covariance Q_k^W,
- la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien, de matrice de covariance Q_k^V,
- les suites $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants.

Pour mémoire, sous l'hypothèse que

la matrice de covariance Q_k^V est inversible à chaque instant,

le meilleur estimateur (au sens du minimum de l'erreur quadratique moyenne) de l'état caché X_k sachant les observations passées $Y_{0:k} = (Y_0, \cdots, Y_k)$ jusqu'à l'instant courant seulement, est le *filtre* de Kalman $\widehat{X}_k$ donné par les équations suivantes : prédiction

$$\widehat{X}_k^- \ = \ F_k\, \widehat{X}_{k-1} \ ,$$

$$P_k^- \ = \ F_k\, P_{k-1}\, F_k^* + Q_k^W \ ,$$

et correction

$$\widehat{X}_k = \widehat{X}_k^- + K_k \, (Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^-) \; ,$$

$$P_k = (I - K_k \, H_k) \, P_k^- \; ,$$

avec la matrice de gain de Kalman définie par

$$K_k = P_k^- \, H_k^* \, (Q_k^I)^{-1} \qquad \text{où} \qquad Q_k^I = H_k \, P_k^- \, H_k^* + Q_k^V \; ,$$

et avec les conditions initiales (formulées pour $k = 0$)

$$\widehat{X}_0^- = \bar{X}_0 \qquad \text{et} \qquad P_0^- = Q_0^X \; .$$

(i) Établir les identités (très simples) suivantes

$$(P_k^-)^{-1} \, P_k = (I - K_k \, H_k)^* \qquad \textbf{et} \qquad (P_k^-)^{-1} \, K_k = H_k^* \, (Q_k^I)^{-1} \; .$$

De même, sous l'hypothèse que

les matrices de covariance Q_k^W et Q_k^V sont inversibles à chaque instant,

le meilleur estimateur (au sens de l'erreur quadratique moyenne) de l'état caché X_k sachant toutes les observations $Y_{0:n} = (Y_0, \cdots, Y_n)$, est le *lisseur* de Kalman $\widehat{X}_k^n$ donné par les équations rétrogrades suivantes

$$\widehat{X}_{k-1}^n = \widehat{X}_{k-1} + L_k \, (\widehat{X}_k^n - \widehat{X}_k^-) \; , \tag{1}$$

$$P_{k-1}^n = P_{k-1} + L_k \, (P_k^n - P_k^-) \, L_k^* \; ,$$

avec la matrice de gain

$$L_k = P_{k-1} \, F_k^* \, (P_k^-)^{-1} \; ,$$

et avec les conditions initiales (formulées pour $k = n$)

$$\widehat{X}_n^n = \widehat{X}_n \qquad \text{et} \qquad P_n^n = P_n \; .$$

Intuitivement, l'incertitude associée au lisseur de Kalman devrait être inférieure à l'incertitude associée au filtre de Kalman.

(ii) Montrer (par exemple par récurrence rétrograde) que les matrices de covariance d'erreur P_k et P_k^n, associées au filtre de Kalman et au lisseur de Kalman respectivement, vérifient la relation $P_k^n \leq P_k$ au sens des matrices symétriques.

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on introduit les variables

$$r_k^n = F_k^* \, (P_k^-)^{-1} \, (\widehat{X}_k^n - \widehat{X}_k^-) \qquad \text{et} \qquad \Pi_k^n = F_k^* \, (P_k^-)^{-1} \, (P_k^n - P_k^-) \, (P_k^-)^{-1} \, F_k \ .$$

(iii) Vérifier que la matrice Π_k^n est symétrique et semi–définie négative.

(iv) Montrer que nécessairement le lisseur de Kalman $\widehat{X}_k^n$ et la matrice de covariance d'erreur associée P_k^n vérifient les relations suivantes

$$\widehat{X}_k^n \; = \; \widehat{X}_k + P_k \, r_{k+1}^n \ , \tag{2}$$

$$P_k^n \; = \; P_k + P_k \, \Pi_{k+1}^n \, P_k \ .$$

(v) Exprimer la différence $(\widehat{X}_k^n - \widehat{X}_k^-)$ en fonction de l'innovation $(Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^-)$ et de la variable r_{k+1}^n introduite.

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, on définit la matrice

$$\Phi_k = (I - K_k \, H_k) \, F_k \ .$$

(vi) Montrer que la variable r_k^n vérifie l'équation rétrograde suivante

$$r_k^n = F_k^* \, H_k^* \, (Q_k^I)^{-1} \, (Y_k - H_k \, \widehat{X}_k^-) + \Phi_k^* \, r_{k+1}^n \ , \tag{3}$$

avec la condition initiale $r_{n+1}^n = 0$ par convention.

(vii) En utilisant la même démarche, montrer que la variable Π_k^n vérifie l'équation rétrograde suivante

$$\Pi_k^n = -F_k^* \, H_k^* \, (Q_k^I)^{-1} \, H_k \, F_k + \Phi_k^* \, \Pi_{k+1}^n \, \Phi_k \ ,$$

avec la condition initiale $\Pi_{n+1}^n = 0$ par convention.

(viii) Comparer les deux approches équivalentes obtenues pour le lissage de Kalman, (1) vs. (2)–(3), selon les critères suivants : volume des calculs impliqués, volume de l'espace mémoire nécessaire, inversion de matrices, hypothèses nécessaires, etc.