Université de Rennes 1
Master recherche STI
Examen du cours UE 14
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 27 janvier 2005, 14:00 à 16:00

Problème :

L’objectif de ce problème est de retrouver les équations du filtre de Kalman, en appliquant les équations du filtre bayésien optimal dans le cas particulier des systèmes linéaires gaussiens.

On considère le système dynamique suivant

$$X_k \,=\, F_k\, X_{k-1} + G_k\, W_k \ ,$$

$$Y_k \,=\, H_k\, X_k + V_k \ ,$$

où $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$, $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ prennent respectivement leurs valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^d$. On fait les hypothèses suivantes sur les coefficients : $F_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $G_k \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{d\times m}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^W *pas nécessairement inversible*,
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X *pas nécessairement inversible*,
- le bruit d’observation $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^V *inversible*,
- les bruits $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$, et la condition initiale X_0, sont mutuellement indépendants.

Il s’agit de calculer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $Y_{0:k}$, et la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $Y_{0:k-1}$, définies par

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k}] \qquad \text{et} \qquad \mu_k^-(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k-1}] \ ,$$

respectivement, et on se propose de procéder par récurrence.

On rappelle (voir l'annexe *Rappels de probabilités* dans le cours) que la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité $\mu(dx)$ sur $\mathbb{R}^m$ est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ par

$$\Phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x\}\, \mu(dx) \ ,$$

et que la distribution $\mu(dx)$ est gaussienne, de moyenne χ et de matrice de covariance (pas nécessairement inversible) Σ, *si et seulement si* sa fonction caractéristique s'écrit

$$\Phi_\mu(u) = \exp\{i\, u^*\, \chi - \tfrac{1}{2}\, u^*\, \Sigma\, u\} \ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$. Enfin, si la matrice de covariance Ξ est inversible, on admettra la formule suivante (qui sera utilisée seulement à la question (x) ci–dessous) : pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et tout $z \in \mathbb{C}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (y' - z)^*\, \Xi^{-1}\, (y' - z)\}\, \frac{dy'}{\sqrt{\det(2\, \pi\, \Xi)}} = \exp\{i\, v^*\, z - \tfrac{1}{2}\, v^*\, \Xi\, v\} \ .$$

(i) **Donner l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_0^-}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_0^-(dx)$, c'est–à–dire de la loi du vecteur aléatoire X_0.**

(ii) **On suppose que la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$ est gaussienne, de moyenne $\widehat{X}_{k-1}$ et de matrice de covariance P_{k-1} pas nécessairement inversible. Donner l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_{k-1}}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$.**

(iii) **Dans le cas particulier du système linéaire gaussien considéré, décrire la loi conditionnelle $Q_k(x, dx')$ du vecteur aléatoire X_k sachant $X_{k-1} = x$. En déduire l'expression de la fonction caractéristique**

$$\Phi_k(x, u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, Q_k(x, dx') \ ,$$

paramétrée par $x \in \mathbb{R}^m$, du noyau markovien $Q_k(x, dx')$.

(iv) **Rappeler l'expression générale de la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ en fonction de la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$ et du noyau markovien $Q_k(x, dx')$.**

(v) **Déduire de (ii), (iii) et (iv) l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k^-}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$. En déduire que la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ est gaussienne et donner l'expression de sa moyenne $\widehat{X}_k^-$ et de sa matrice de covariance P_k^- en fonction de $\widehat{X}_{k-1}$ et de P_{k-1}.**

(vi) **Dans le cas particulier du système linéaire gaussien considéré, donner l'expression de la densité conditionnelle $g_k(x', y')$, paramétrée par $x' \in \mathbb{R}^m$, du vecteur aléatoire Y_k sachant $X_k = x'$. En déduire l'expression de la fonction de vraisemblance $\Psi_k(x') = g_k(x', Y_k)$.**

(vii) **Rappeler l'expression générale de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$ en fonction de la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ et de la fonction de vraisemblance $\Psi_k(x')$. En déduire une première expression, non explicite, de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$.**

Pour pouvoir calculer

$$F_k(u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (Y_k - H_k\, x')^*\, (Q_k^V)^{-1}\, (Y_k - H_k\, x')\}\, \mu_k^-(dx')\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, on définit

$$F_k(u, y') = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (y' - H_k\, x')^*\, (Q_k^V)^{-1}\, (y' - H_k\, x')\}\, \mu_k^-(dx')\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et tout $y' \in \mathbb{R}^d$, et on se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction $y' \longmapsto F_k(u, y')$, où $u \in \mathbb{R}^m$ est fixé.

(viii) **Montrer que**

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ F_k(u, y')\, \frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q_k^V)}} = \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k^-\, u\}$$
$$\exp\{i\, v^*\, H_k\, (\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u) - \tfrac{1}{2}\, v^*\, (H_k\, P_k^-\, H_k^* + Q_k^V)\, v\}\ ,$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$.

(ix) **Monter que la matrice de covariance $\Xi_k = H_k\, P_k^-\, H_k^* + Q_k^V$ est inversible.**

(x) **Déduire de (viii) que**

$$F_k(u, y') \ = \ \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}}\ \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k^-\, u\}$$
$$\exp\{-\tfrac{1}{2}\, (y' - H_k\, (\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u))^*\, \Xi_k^{-1}\, (y' - H_k\, (\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u))\}\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et tout $y' \in \mathbb{R}^d$.

(xi) **En déduire l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$. En déduire que la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$ est gausienne et donner l'expression de sa moyenne $\widehat{X}_k$ et de sa matrice de covariance P_k en fonction de $\widehat{X}_k^-$ et de P_k^-.**